Mathématiques dans un avion

Joss Randal

10 novembre 2024

Énoncé

Soit un avion avec n sièges et n passagers avec $n \geq 2$. Chaque passager a un numéro de siège entre 1 et n et deux passagers différents n'ont pas le même numéro de siège. Les passagers entrent dans l'avion un par un. Malheureusement, le premier passager à se présenter est ivre et il choisit un siège au hasard parmi les n sièges. Tous les autres passagers, lorsqu'ils entrent, s'assoient dans leur siège s'il est libre. S'il est déjà pris, ils choisissent un siège au hasard parmi ceux restants. Le dernier passager à se présenter est un mathématicien. Il se demande quelle est la probabilité qu'il puisse s'asseoir à sa place. Aidez-le.

Préliminaires

$\varphi : [\![1, n]\!] \mapsto [\![1, n]\!]$ associe à l'ordre d'entrée dans l'avion le numéro du siège du passager.
φ est une bijection. Si les passagers entrent dans l'avion un par un dans l'ordre de leur numéro de siège, φ est l'identité, ce que nous supposons désormais.
Mais une étude plus poussée devrait tenir compte que les passagers ne se présentent pas nécessairement dans l'ordre de leur numéro de siège.
$\sigma : [\![1, n]\!] \mapsto [\![1, n]\!]$ associe au passager ayant le numéro de siège n la place $\sigma(n)$ où s'assied ce passager.
σ est une bijection qui vérifie $\forall k \in [\![2, n]\!] \quad \sigma(k) \neq k \Rightarrow \exists l \in [\![1, k-1]\!]\, \sigma(l) = k\}$. On appelle Ω l'ensemble des σ vérifiant la propriété précédente. À chaque σ de Ω on associe un réel $P(\sigma)$ défini comme suit. σ a au plus une orbite non réduite à un point, celle de 1. Si l'orbite de σ est réduite à un point ($\sigma(1) = 1$), alors $P(\sigma) = \frac{1}{n}$. Si σ est telle que l'orbite de 1 est $(1, j_1, j_2 \ldots j_k)$ ou$(1, j_1, j_2 \ldots j_k, n)$, $P(\sigma) = \frac{1}{n} \times \frac{1}{n-j_1+1} \times \frac{1}{n-j_2+1} \times \frac{1}{n-j_k+1} \times \frac{1}{2}$. On va admettre que P définit une probabilité sur Ω (Il faudrait démontrer que $\sum_{\sigma \in \Omega} P(\sigma) = 1$, ce que je n'ai pas pu faire).

Solution 1

On pose $\Omega = \{\sigma \in S_n \,|\, \forall k \in [\![2, n]\!] \quad \sigma(k) \neq k \Rightarrow \exists l \in [\![1, k-1]\!]\, \sigma(l) = k\}$.
Ω représente notre univers, un $\sigma \in \Omega$ représente une « histoire ».
$\sigma(i) = j$ signifie que le passager i s'assied sur le siège j.
Première remarque : il faut voir que toutes les histoires σ ne sont pas équiprobables.
Deuxième remarque : Si au cours du remplissage de l'avion, la place 1 est prise par le passager j ($j < n$), tous les passagers de $j+1$ à n seront bien placés. Donc, quand le passager n se présente, soit la place 1 est prise, donc la place n est libre, auquel cas $\sigma(n) = n$, soit la place 1 est libre et le passager n doit s'y asseoir, c'est dire $\sigma(n) = 1$.
Troisième remarque (on rappelle $n \geq 2$) : On pose $E_1 := \{\sigma \in \Omega | \sigma(n) = 1\}$, et $E_n := \{\sigma \in \Omega | \sigma(n) = n\}$. Alors E_1 et E_n forment une partition de Ω (car on a vu que le dernier passager s'assoit ou bien à la place 1 ou bien à la place n).
Maintenant, pour tout σ de Ω, on considère $T(\sigma) := \min\{i, \sigma(i) \in \{1, n\}\}$.
On pose $F : \Omega \to \Omega$ telle que $F(\sigma)$ vérifie $F(\sigma)(T(\sigma)) = \sigma(n)$, $F(\sigma)(n) = \sigma(T(\sigma))$ et $F(\sigma)(i) = \sigma(i)$ pour les autres i.
Autrement dit dans une histoire σ, on attend le premier passager qui va s'asseoir sur le siège 1 ou sur le siège n et on lui associe l'histoire $F(\sigma)$ où s'il prend le siège 1 dans σ alors il prend le siège n dans $F(\sigma)$ et s'il prend le siège n dans σ alors il prend le siège 1 dans $F(\sigma)$. (On peut vérifier que F est bien définie et à valeur dans Ω).
Alors on vérifie également que F est une bijection (c'est une involution) et quelle envoie E_1 sur E_n et E_n sur E_1.
On vérifie surtout que $P(\sigma) = P(F(\sigma))$. C'est le point clé du raisonnement et cela utilise seulement le fait qu'après $T(\sigma)$ l'histoire est déterministe, et que le passager $T(\sigma)$ a autant de chance de choisir 1 que n puisque son choix est uniforme.
On déduit en sommant sur les $\sigma \in E_1$ que $P(E_1) = P(E_2)$ et que $P(E_1) + P(E_2) = 1$.
On déduit $P(E_2) = \frac{1}{2}$ ce qui signifie que le passager n a une chance sur deux de s'asseoir à la place n.

Solution 2 (C'est la même idée que la solution 1)

Soit Ω l'ensemble des permutations σ de $\{1,\ldots,n\}$ telles que, pour tout k tel que $1 < k \leq n$, s'il n'existe pas de $\ell < k$ tel que $\sigma(\ell) = k$, alors $\sigma(k) = k$.
La remarque fondamentale est que, pour tout σ de Ω, tout entier k tel que $2 \leq k \leq n-1$ est dans $\sigma(\{1,\ldots,n-1\})$. En effet, ou bien il existe $\ell < k$ tel que $\sigma(\ell) = k$ ou bien $\sigma(k) = k$. On a donc $\sigma(n) = 1$ ou $\sigma(n) = n$.
Soit τ la transposition $(1,n)$. Pour tout $\sigma \in \Omega$, $\tau \circ \sigma$ appartient à Ω.
La deuxième remarque importante est que la probabilité de l'issue σ est égale à la probabilité de l'issue $\tau \circ \sigma$.
En effet, les événements $E_k = \{\sigma \in \Omega / \sigma(k) = 1 \text{ ou } \sigma(k) = n\}$ pour k de $\{1,\ldots,n-1\}$ forment un système complet d'événements d'après la première remarque, et $P(\sigma(k) = 1 \mid E_k) = P(\sigma(k) = n \mid E_k) = 1/2$.
La conclusion $P(\sigma(n) = n) = 1/2$ suit de ces deux remarques, sans aucun calcul.

Solution 3

On note p_n la probabilité que, pour un avion de n personnes et n sièges, le passager n (le mathématicien, le dernier à entrer) s'assoit à sa place. On note A_n cet événement.
Il est évident que $p_2 = \frac{1}{2}$. À partir de maintenant, on suppose que $n \geq 3$.
On note X la variable aléatoire qui correspond à la place du premier passager. On a $A_n = A_n \cap (\cup_{k=1}^{n}(X = k))$ puisque les événements $X = k$ pour $k \in [\![1,n]\!]$ forment un système complet d'événements équiprobables. On a donc évidemment $P(X = k) = \frac{1}{n}$.
$p_n = P(A_n) = \sum_{k=1}^{n} P(A_n \cap (X = k)) = \sum_{k=1}^{n-1} P(X = k)P(A_n|X = k)$
car $P(A_n \cap (X = n)) = 0$ et $P(A_n \cap (X = k)) = P(X = k)P(A_n|X = k)$.
Si le premier passager s'assoit sur le siège k, $2 \leq k \leq n-1$, alors les sièges 2 jusqu'à k seront occupés par la suite du remplissage. Puis lorsque vient le tour du passager k, il reste $n-k+1$ sièges libres et $n-k+1$ personnes non assises dans l'avion (en comptant la personne k).
On décrète alors que la nouvelle place de k est la place 1 (qui est libre). En faisant ça alors on se trouve dans la même situation qu'au début (car $n-k+1 \geq 2$) mais avec $n-k+1$ passagers et $n-k+1$ sièges au lieu des n de départ (le passager k joue le rôle du passager 1 et il va choisir sa place au hasard).
Ainsi on voit que $P(A_n|X = k) = p_{n-k+1}$ dès que $2 \leq k \leq n-1$.
D'autre part, $P(A_n|X = 1) = 1$.
Donc, pour $n \geq 3$ et puisque $p_n = \sum_{k=1}^{n-1} 1P(X = k)P(A_n|X = k)$,
$p_n = \frac{1}{n} \times 1 + \frac{1}{n}\sum_{k=2}^{n-1} p_{n-k+1} = \frac{1}{n} + \frac{1}{n}\sum_{k=2}^{n-1} p_k$.
Ceci permet de montrer par récurrence que $p_n = \frac{1}{2}$ dès que $n \geq 3$ donc dès que $n \geq 2$ puisque qu'on a déjà vu que $p_2 = \frac{1}{2}$.