IDENTITÉS REMARQUABLES

127. Définition. — ***Une identité est l'égalité de deux expressions algébriques équivalentes.***

Une identité est donc vérifiée quelles que soient les valeurs numériques attribuées aux lettres qui y figurent. Ces lettres pourront d'ailleurs représenter indifféremment des nombres ou des expressions algébriques.

128. Carré de la somme ou de la différence de deux termes. — Soit à calculer $(a + b)^2$:

$$(a + b)^2 = (a + b)(a + b) = a^2 + ab + ba + b^2.$$

Donc :

$$\boxed{(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2} \qquad (1)$$

En changeant b en $-b$ on obtient :

$$\boxed{(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2} \qquad (2)$$

Applications : 1° $(3x + 5)^2 = 9x^2 + 30x + 25$.

2° $\left(3x^2 - \frac{2}{5}y^3\right)^2 = 9x^4 - \frac{12}{5}x^2y^3 + \frac{4}{25}y^6$.

129. Produit de la somme de deux termes par leur différence.

$$(a + b)(a - b) = a^2 + ab - ba - b^2.$$

Donc :

$$\boxed{(a + b)(a - b) = a^2 - b^2} \qquad (3)$$

EXEMPLES. — 1° $(2x + 3)(2x - 3) = 4x^2 - 9$.

2° $\left(\frac{2}{3}x^2 - 4y\right)\left(\frac{2}{3}x^2 + 4y\right) = \frac{4}{9}x^4 - 16y^2.$

3° $(a + b - c)(a - b + c) = a^2 - (b - c)^2.$

130. Carré d'une somme de plusieurs termes. — Soit à calculer $(a + b + c)^2$.

$$(a + b + c)^2 = (a + b + c)(a + b + c)$$
$$= (a^2 + ab + ac) + (ba + b^2 + bc) + (ca + cb + c^2).$$

Soit :

$$\boxed{(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc} \qquad (4)$$

Cette formule se généralise pour quatre termes ou plus.

Le carré d'une somme comprend :

1° *la somme des carrés de chaque terme;*

2° *la somme des double produits des termes pris deux à deux.*

On écrit symboliquement :

$$\boxed{(a + b + c + d)^2 = \Sigma a^2 + \Sigma 2ab} \qquad (5)$$

Σa^2 se lit « sigma de a^2 » et représente la somme de tous les carrés tels que a^2.

$\Sigma 2ab$ représente de même la somme de tous les doubles produits analogues à $2ab$. Afin de ne pas en oublier on associe chaque terme de la somme à chacun des termes suivants.

EXEMPLES :

1° $(2x - 3y + 5z)^2 = 4x^2 + 9y^2 + 25z^2 - 12xy + 20xz - 30yz.$

2° $(a - b + c - d)^2 =$
$a^2 + b^2 + c^2 + d^2 - 2ab + 2ac - 2ad - 2bc + 2bd - 2cd.$

131. Cube d'une somme ou d'une différence de deux termes.

$$(a + b)^3 = (a + b)^2(a + b) = (a^2 + 2ab + b^2)(a + b)$$
$$= a^3 + 2a^2b + ab^2 + a^2b + 2ab^2 + b^3.$$

D'où :

$$\boxed{(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3} \qquad (6)$$

En changeant b en $-b$ on obtient :

$$\boxed{(a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3} \qquad (7)$$

EXEMPLES : 1° $(x - 2)^3 = x^3 - 6x^2 + 12x - 8$.

2° $(2x + 5y)^3 = 8x^3 + 60x^2y + 150xy^2 + 125y^3$.

132. Somme et différence de deux cubes. — La formule (3) peut s'écrire :

$$a^2 - b^2 = (a - b)(a + b).$$

Elle se généralise de la façon suivante. Nous avons :

$$(a^2 + ab + b^2)(a - b) = \left| \begin{array}{l} a^3 + a^2b + ab^2 \\ \quad - a^2b - ab^2 - b^3 \end{array} \right| = a^3 - b^3$$

D'où :

$$\boxed{a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)} \qquad (8)$$

et en changeant b en $-b$:

$$\boxed{a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)} \qquad (9)$$

133. Généralisation. — On démontrerait de même que :

$$a^4 - b^4 = (a - b)(a^3 + a^2b + ab^2 + b^3)$$

et d'une façon générale quel que soit l'entier n :

$$\boxed{a^n - b^n = (a - b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + \ldots + ab^{n-2} + b^{n-1})} \qquad (10)$$

134. Autres identités. — Les identités précédentes sont d'un emploi courant en calcul algébrique. Il importe donc de pouvoir les utiliser sans hésitation. Les suivantes, moins importantes, pourront être vérifiées à titre d'exercice.

1° $a^2 + b^2 = (a + b)^2 - 2ab$

2° $a^3 + b^3 = (a + b)^3 - 3ab(a + b)$

3° $(a - b)^2 = (a + b)^2 - 4ab$

4° $(x + a)(x + b) = x^2 + (a + b)x + ab$

5° $(ax + by)^2 + (ay - bx)^2 = (a^2 + b^2)(x^2 + y^2)$

6° $(ax + by)^2 - (ay + bx)^2 = (a^2 - b^2)(x^2 - y^2)$

7° $(a + b + c)^3 = \Sigma a^3 + \Sigma 3a^2b + 6abc$

8° $(a + b + c)^3 = a^3 + b^3 + c^3 + 3(b + c)(c + a)(a + b)$

9° $a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = (a + b + c)(a^2 + b^2 + c^2 - bc - ca - ab)$.

QUOTIENTS EXACTS

135. Définition. — ***Si trois polynômes ou monômes* A, B, C *sont tels que* A = BC *on dit que* C *est le quotient exact de* A *par* B.**

On écrit : $\frac{A}{B} = C \Longleftrightarrow A = BC.$

On dit aussi que le polynôme (ou monôme) A est divisible par le polynôme (ou monôme) B.

136. Quotient exact d'un monôme par un monôme.

L'égalité : $3\,a^4x^3y = (2\,a^3xy)\left(\frac{3}{2}\,ax^2\right)$ montre que :

$$\frac{3\,a^4x^3y}{2\,a^3xy} = \frac{3}{2}\,ax^2 = \frac{3}{2}\,a^{4-3}x^{3-1}y^{1-1}$$

De la règle de la multiplication des monômes il résulte que :

Pour qu'un monôme* A *soit divisible par un monôme* B, *il faut et il suffit que le monôme* A *contienne toutes les lettres de* B *avec des exposants au moins égaux.

Dans ces conditions, le monôme quotient a pour coefficient le quotient des coefficients du dividende et du diviseur et l'exposant d'une lettre dans le quotient est la différence de ses exposants dans le dividende et dans le diviseur.

137. Quotient exact d'un polynôme par un monôme.

L'égalité : $6\,a^3x^2y - 5\,a^3x^4 + 2\,a^4x^2y = 2\,a^3x^2\left(3\,y - \frac{5}{2}\,x^2 + ay\right)$

montre que :

$$\frac{6\,a^3x^2y - 5\,a^3x^4 + 2\,a^4x^2y}{2\,a^3x^2} = 3y - \frac{5}{2}\,x^2 + ay.$$

Le quotient est un polynôme qui s'obtient en divisant chaque terme du dividende par le monôme diviseur. On en déduit que :

Pour qu'un polynôme soit divisible par un monôme, il faut et il suffit que tous ses termes soient divisibles par ce monôme.

Remarque. — L'égalité :

$$6\,x^3 + 3\,x^2 + 8\,x + 4 = (2\,x + 1)\,(3\,x^2 + 4)$$

montre que

$$\frac{6x^3 + 3x^2 + 8x + 4}{2x + 1} = 3x^2 + 4.$$

Nous voyons que le quotient exact de deux polynômes est parfois un polynôme ou un monôme.

FACTORISATION DES POLYNÔMES

138. Définition. — ***Factoriser un polynôme, c'est l'écrire sous la forme d'un produit de facteurs (monômes et polynômes).***

Comme le degré du polynôme est la somme des degrés de chacun des facteurs le nombre de ceux-ci est toujours limité.

139. Mise en facteur d'un monôme dans un polynôme. — Soit le polynôme

$$a^3x^2y - \frac{5}{2}a^3x^4 + \frac{2}{3}a^4x^2y.$$

Tous les termes sont divisibles par le monôme a^2x. Nous pouvons donc écrire :

$$a^3x^2y - \frac{5}{2}a^3x^4 + \frac{2}{3}a^4x^2y = a^2x\left(axy - \frac{5}{2}ax^3 + \frac{2}{3}a^2xy\right).$$

On dit que *le monôme a^2x a été mis en facteur commun* dans le polynôme. Tout monôme mis en facteur commun doit être un diviseur de chacun des termes du polynôme; il en résulte que :

Le monôme de plus haut degré pouvant être mis en facteur dans un polynôme est formé des lettres communes à tous les termes du polynôme, chacune d'elles étant affectée de son plus petit exposant.

Le coefficient de ce monôme est arbitraire. On peut, par exemple, s'arranger pour faire disparaître les dénominateurs à l'intérieur des parenthèses. Ainsi dans le polynôme précédent, nous pouvons mettre en facteur $\frac{1}{6}a^3x^2$. Nous obtenons :

$$a^3x^2y - \frac{5}{2}a^3x^4 + \frac{2}{3}a^4x^2y = \frac{1}{6}a^3x^2(6y - 15x^2 + 4ay).$$

140. Autres procédés de décomposition. — Après avoir, dans un polynôme, mis en facteur le monôme de plus haut degré possible, on pourra essayer l'un des procédés suivants de décomposition.

141. Groupement des termes deux à deux. — Ce procédé s'applique aux polynômes de quatre ou six termes que l'on essaye de ramener à un produit d'un binôme par un binôme ou un trinôme

1° $ax + by + ay + bx = ax + ay + bx + by = a(x + y) + b(x + y)$
$= (a + b)(x + y).$

2° $x^2 - (a + b)x + ab = x^2 - ax - bx + ab = x(x - a) - b(x - a)$
$= (x - a)(x - b).$

3° $ax + by + a - bx - ay - b = x(a - b) + y(b - a) + a - b =$
$= (a - b)(x - y + 1).$

142. Carré ou cube d'un binôme. — On voit immédiatement que :

1° $x^2 - 14x + 49 = x^2 - 2.7.x + 7^2 = (x - 7)^2.$

2° $x^3 + 6x^2 + 12x + 8 = x^3 + 3.2.x^2 + 3.2^2.x + 2^3 = (x + 2)^3.$

143. Différence de deux carrés. — L'un des procédés les plus féconds consiste à ramener l'expression à décomposer à la forme $A^2 - B^2$ qui est égale au produit $(A + B)(A - B)$. Ainsi :

1° $x^2 - 25 = x^2 - 5^2 = (x + 5)(x - 5).$

2° $9a^2x^4 - 4b^2 = (3ax^2)^2 - (2b)^2 = (3ax^2 + 2b)(3ax^2 - 2b).$

3° $x^2 - 6x + 8 = (x - 3)^2 - 9 + 8 = (x - 3)^2 - 1^2$
$= (x - 3 + 1)(x - 3 - 1) = (x - 2)(x - 4).$

4° $a^2 + b^2 - c^2 + 2ab = (a + b)^2 - c^2 = (a + b + c)(a + b - c).$

5° $x^4 + x^2 + 1 = (x^4 + 2x^2 + 1) - x^2 = (x^2 + 1)^2 - x^2$
$= (x^2 + x + 1)(x^2 - x + 1).$

144. Généralisation. — On peut utiliser également les identités :

$$a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$$
$$a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$$

et d'une façon générale

$$(a^n - b^n) = (a - b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + \dots + b^{n-1}).$$

EXEMPLES : 1° $x^3 - 8 = x^3 - 2^3 = (x - 2)(x^2 + 2x + 4).$
2° $x^3 + 1 = x^3 + 1^3 = (x + 1)(x^2 - x + 1).$
3° $x^5 - a^5 = (x - a)(x^4 + ax^3 + a^2x^2 + a^3x + a^4).$

145. Application. — Soit à décomposer le polynôme

$$P = x^3 + 2x^2 - 5x - 6.$$

Ce polynôme prend pour $x = 2$ la valeur zéro. On vérifie que :

$$0 = 2^3 + 2.2^2 - 5.2 - 6.$$

Retranchons terme à terme les deux égalités précédentes, nous obtenons :

$$P = (x^3 - 2^3) + 2(x^2 - 2^2) - 5(x - 2).$$

Sous cette forme, on voit que P est égal à une somme de termes tous divisibles par $x - 2$. On peut écrire :

$$\begin{aligned} P &= (x-2)(x^2+2x+4)+2(x-2)(x+2)-5(x-2) \\ &= (x-2)[x^2+2x+4+2(x+2)-5]. \end{aligned}$$

Soit : $$P = (x-2)(x^2+4x+3).$$

Autrement dit, le polynôme P qui s'annule pour $x = 2$ est divisible par $x - 2$. Plus généralement :

Si un polynôme s'annule pour $x = a$, il est divisible par $x - a$.

— On peut utiliser à nouveau cette propriété en remarquant que P s'annule pour $x = -1$. Comme $x - 2$ n'est pas nul pour cette valeur de x, c'est $x^2 + 4x + 3$ qui est égal à 0 (nº 35). On obtient de même :

$$x^2+4x+3 = (x+1)(x+3).$$

D'où finalement : $$P = (x-2)(x+1)(x+3).$$

EXERCICES

— Vérifier les identités suivantes :

243. $(a+b)^3 + 2(a^3+b^3) = 3(a+b)(a^2+b^2)$.

244. $(b-c)^3 + (c-a)^3 + (a-b)^3 = 3(b-c)(c-a)(a-b)$.

245. $(a+b+c)(bc+ca+ab) = (b+c)(c+a)(a+b)+abc$.

246. $(ax+mby)^2 - m(ay+bx)^2 = (a^2-mb^2)(x^2-my^2)$.

247. $(a^2+mb^2)^2 - 4ma^2b^2 = (a^2-mb^2)^2$.

248. $(a^3+3mab^2)^2 - m(3a^2b+mb^3)^2 = (a^2-mb^2)^3$.

249. $(ax+by+cz)^2 + (bx-ay)^2 + (cy-bz)^2 + (az-cx)^2 = (a^2+b^2+c^2)(x^2+y^2+z^2)$.

250. $(ab+bc+ca)^2 + (a^2-bc)^2 + (b^2-ca)^2 + (c^2-ab)^2 = (a^2+b^2+c^2)^2$.

251. $(a+b+c)^3 - (b+c-a)^3 - (c+a-b)^3 - (a+b-c)^3 = 24abc$.

252. $(a+b+c)^2 + (b+c-a)^2 + (c+a-b)^2 + (a+b-c)^2 = 4(a^2+b^2+c^2)$.

253. $a^2(b-c) + b^2(c-a) + c^2(a-b) + (b-c)(c-a)(a-b) = 0$.

254. $a^3(b-c) + b^3(c-a) + c^3(a-b) + (a+b+c)(b-c)(c-a)(a-b) = 0$.

255. *Triangle de Pascal.* — On calcule les puissances successives de $(a+b)$ et on établit le tableau des coefficients des résultats ordonnés :

	Coefficients :
$(a+b)^1 = a+b$	1 1
$(a+b)^2 = a^2+2ab+b^2$	1 2 1
$(a+b)^3 = a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$	1 3 3 1
$(a+b)^4 = a^4+4a^3b+6a^2b^2+4ab^3+b^4$	1 4 6 4 1
. . . .	. . . .

Montrer que chaque coefficient du tableau triangulaire obtenu est égal à la somme de celui qui est placé au-dessus de lui et de celui qui est placé à la gauche de ce dernier. En déduire les lignes suivantes du tableau et établir les identités donnant $(a+b)^5$; $(a+b)^6$ ..

— Calculer les expressions suivantes :

256. $(2x + 3y)^2 - (2x - 3y)^2 - 2(6xy)$.

257. $(x + y)(x + 1)(y + 1) - x(y + 1)^2 - y(x + 1)^2$.

258. $(3x - 2y + 1)(6xy - 3x + 2y) - (3x - 2y)(3x + 1)(2y - 1)$.

259. $(x + 2y + 3z)(2y + 3z - x)(3z + x - 2y)(x + 2y - 3z) + (4y^2 + 9z^2 - x^2)^2$.

260. $(2x + 3y + z)^2 + (3y + z - 2x)^2 + (z + 2x - 3y)^2 + (2x + 3y - z)^2$.

261. $(5x - 3y + 2z)^3 + 3(5x - 3y)(5x + 2z)(3y - 2z)$.

262. $(7a + 5b + 4c)^2 + (4b - 5c)^2 + (7c - 4a)^2 + (5a - 7b)^2$.

263. $(x^2 - xy + y^2)(x - y)(x^2 + xy + y^2)(x + y)$.

264. $(a - b + c)^3 + (a + b - c)^3 + 4a(a^2 + 3bc)$.

265. $(x^2 - 2x + 2)(x^2 - 2)(x^2 + 2x + 2)(x^2 + 2)$.

266. $(2x + 4y - z)^2 - (x - y + 4z)^2 - 2(x + y + z)(x + 7y - 7z)$.

267. Former le carré du polynôme $ax^3 + bx^2 + cx + d$.

Peut-on déterminer a, b, c et d de façon à obtenir :

$$9x^6 - 24x^5 + 46x^4 - 52x^3 + 41x^2 - 20x + 4.$$

268. Soit $P = a + b + c + d$, $Q = a + b - c - d$, $R = a - b + c - d$ et $S = a - b - c + d$.

Calculer l'expression : $PQ(P^2 + Q^2) - RS(R^2 + S^2)$.

269. On pose $a + b = S$ et $ab = P$.

1° Calculer en fonction de S et de P les expressions $a^2 + b^2$, $a^3 + b^3$ et $a^4 + b^4$.

2° Calculer pour $S = 1$ l'expression $6(a^2 + b^2)^2 - 3(a^4 + b^4) - 2(a^3 + b^3)^2$.

270. On suppose $A = (x - y)^2$, $B = 4xy$, $D = -(x + y)^2$.

Vérifier les identités : 1° $A + B + C = 0$.

2° $A^2 - BC = B^2 - CA = C^2 - AB$ 3° $A^3 + B^3 + C^3 = 3ABC$.

Montrer que la première d'entre elles entraîne les suivantes.

271. On prend sur un axe d'origine O, les points A, B, C et M d'abscisses a, b, c et x.

1° Démontrer la relation $\overline{OA}^2 \cdot \overline{BC} + \overline{OB}^2 \cdot \overline{CA} + \overline{OC}^2 \cdot \overline{AB} = -\overline{BC} \cdot \overline{CA} \cdot \overline{AB}$.

2° En déduire une relation analogue en remplaçant O par M et la valeur en fonction de a, b, et c de l'expression :

$$(x - a)^2(b - c) + (x - b)^2(c - a) + (x - c)^2(a - b).$$

272. Les données étant les mêmes qu'à l'exercice précédent :

1° Démontrer la relation :

$$\overline{OA}^3 \cdot \overline{BC} + \overline{OB}^3 \cdot \overline{CA} + \overline{OC}^3 \cdot \overline{AB} = -\overline{BC} \cdot \overline{CA} \cdot \overline{AB}\,(\overline{OA} + \overline{OB} + \overline{OC}).$$

2° Utiliser la relation analogue en remplaçant O par M pour calculer l'expression :

$$(x - a)^3(b - c) + (x - b)^3(c - a) + (x - c)^3(a - b).$$

273. On désigne par p la demi-somme des trois nombres a, b et c. Démontrer que :

1° $p^2 + (p - a)^2 + (p - b)^2 + (p - c)^2 = a^2 + b^2 + c^2$.

2° $16p(p - a)(p - b)(p - c) = 4b^2c^2 - (b^2 + c^2 - a^2)^2$.

274. Soient : $x = 7a + 3b + 6c$, $y = 6a + 2b + 6c$ et $z = 3a + 3b + 2c$.

1° Calculer l'expression $y^2 + z^2 - x^2$.

2° Montrer que si a, b, c sont les côtés d'un triangle rectangle (d'hypoténuse a) il en est de même de x, y et z.

275. Reprendre l'exercice précédent pour :
$x = 9a + 4b + 8c, \quad y = 4a + b + 4c, \quad z = 8a + 4b + 7c.$

276. Montrer que lorsque a, b et c satisfont aux relations suivantes, le triangle de côtés a, b et c est rectangle :

1° $a = x^2 + y^2 \quad b = x^2 - y^2 \quad c = 2xy.$
2° $a = 5(2x^2 + 2xy + y^2) \quad b = 8x^2 + 2xy - 3y^2 \quad c = 6x^2 + 14xy + 4y^2.$

277. 1° Démontrer les relations

a) $(Ax + By)^2 + (Ay - Bx)^2 = (A^2 + B^2)(x^2 + y^2).$
b) $(Ax + By)^2 - (Ay + Bx)^2 = (A^2 - B^2)(x^2 - y^2).$

2° En déduire les identités suivantes :

a) $[(a^2 - b^2)x + 2aby]^2 + [(a^2 - b^2)y - 2abx]^2 = (a^2 + b^2)^2(x^2 + y^2).$
b) $[(a^2 + b^2)x + 2aby]^2 - [(a^2 + b^2)y + 2abx]^2 = (a^2 - b^2)^2(x^2 - y^2).$
c) $[(a^2 + b^2)x + (a^2 - b^2)y]^2 - [(a^2 + b^2)y + (a^2 - b^2)x]^2 = 4a^2b^2(x^2 - y^2).$

— Calculer les quotients de :

278. $\frac{3}{5}a^5x^7y^3$ par $\frac{4}{5}a^3x^2y$

279. $-\frac{12}{25}a^4b^3x^5$ par $\frac{4}{5}a^4bx^2.$

280. $\frac{10}{7}a^3b^5x^4y^2$ par $-\frac{2}{21}a^3x^2y$

281. $-\frac{9}{20}a^7b^3x^6y^4$ par $-\frac{3}{5}a^3bx^4y^3.$

282. $15x^5 - 9x^4 + 12x^3 - 3x^2$ par $3x^2.$

283. $\frac{15}{2}a^2b^3x^4 - \frac{10}{3}a^3b^2x^3 + 5a^2bx^2$ par $\frac{5}{6}a^2bx^2.$

284. $\frac{3}{5}x^3y^4z^2 - \frac{21}{4}x^2y^5z + \frac{9}{10}x^4y^2z^3$ par $\frac{3}{20}x^2y^2z.$

— Mettre en facteur le monôme de plus haut degré possible dans les polynômes :

285. $15a^4x^3y^2 - 12a^2x^5y^3 + 21a^3x^3y^5 - 9a^2x^3y^5.$

286. $5a^2b^4x^4 + 15ab^2x^5 - 10a^3b^2x^3 + 25a^5b^3x^3.$

287. $\frac{6}{5}a^2b^6x^3y^5 - \frac{7}{10}a^3b^5x^4y^4 + \frac{4}{15}a^4b^4y^7 - \frac{5}{6}a^5b^3x^2y^3.$

— Décomposer en produit de deux facteurs :

288. $ax - by + ay - bx.$

289. $x^2 - (a + b)xy + aby^2.$

290. $a(x^2 + 1) - x(a^2 + 1).$

291. $ab(x^2 + y^2) + xy(a^2 + b^2).$

292. $(xy + ab)^2 + (ay - bx)^2.$

293. $(ax - mby)^2 + m(ay + bx)^2.$

294. $64x^4 - 49y^2.$

295. $25a^4x^2 - 16b^2y^4.$

296. $x^2 - 14x + 33.$

297. $x^4 - 3x^2 + 1.$

298. $125x^3 - 27y^3.$

299. $(3x + 7)^2 - (2x + 9)^2.$

300. $64a^3x^9 + b^3y^6.$

301. $(2x + 3y)^2 - 4(2x + 3y).$

— Décomposer en produit de trois ou quatre facteurs :

302. $x^4 - 1.$

303. $a^2(x^2 + b^4) - b^2(x^2 + a^4).$

304. $16x^4 - 81y^4.$

305. $(xy - 1)^2 - (x - y)^2.$

306. $x^4 - 5x^2 + 4$.

307. $(ax + by)^2 - (ay + bx)^2$.

308. $4b^2c^2 - (b^2 + c^2 - a^2)^2$.

309. $(a^2x^2 + b^2y^2) - (b^2x^2 + a^2y^2)$.

310. $(a^2 + b^2 - 5)^2 - 4(ab + 2)^2$.

311. $(4x^2 - 3x - 18)^2 - (4x^2 + 3x)^2$

312. Mettre $x^4 + 4$ sous forme d'un produit de deux facteurs de second degré. Ajouter et retrancher $4x^2$.

Application : Mettre $x^8 - 16$ sous forme d'un produit de quatre facteurs du second degré.

313. 1° Calculez les expressions

$$A = 90(a^2 + b^2 + c^2) - (7a + 5b - 4c)^2 - (4b + 5c)^2 - (4a + 7c)^2.$$

$$B = (5a + 3b - 8c)^2 - 80(a^2 - b^2 + c^2) - (8b - 3c)^2 + (8a + 5c)^2.$$

2° Montrer que A et B sont les carrés de deux binômes.

3° Calculer la différence A — B et la mettre sous forme d'un produit de facteurs du premier degré.

314. On considère l'expression :

$$A = (x + y + z)^3 - (y + z - x)^3 - (z + x - y)^3 - (x + y - z)^3.$$

1° Montrer que A est nulle pour $x = 0$, quels que soient y et z et de même pour $y = 0$ et pour $z = 0$. En déduire que $A = mxyz$, dans laquelle m est un facteur numérique que l'on calculera en faisant $x = y = z = 1$.

2° Vérifier le résultat obtenu en appliquant la formule :

$$(a + b + c)^3 = \Sigma a^3 + \Sigma\, 3a^2b + 6\,abc.$$

315. Calculer pour $x = 5$ la valeur numérique du polynôme

$$2x^2 - 7x - 15$$

et le décomposer en un produit de facteurs du 1er degré.

— Reprendre l'exercice précédent pour :

316. $3x^2 - 13x + 4$ pour $x = 4$.

317. $2x^3 + 7x^2 + 3x$ pour $x = -3$.

318. $4x^3 - 28x^2 - 25x + 175$ pour $x = 7$.

319. Soit le polynôme $A = 2x^3 - 7x^2 - 3x + 18$.

1° Calculer sa valeur pour $x = 2$ et pour $x = 3$.

2° En déduire que $A = (ax + b)(x - 2)(x - 3)$, a et b étant des coefficients que l'on calculera.

320. Montrer que l'on peut mettre $b - c$ en facteur dans l'expression

$$a^2(b - c) + b^2(c - a) + c^2(a - b)$$

et achever la décomposition en un produit de 3 facteurs du 1er degré.

321. Montrer que l'expression : $a^3(b - c) + b^3(c - a) + c^3(a - b)$ s'annule pour $a = b$, $b = c$, $c = a$ et $a = -(b + c)$. En déduire qu'elle peut s'écrire sous la forme $m(a + b + c)(a - b)(b - c)(c - a)$ dans laquelle m est un coefficient que l'on déterminera en faisant $a = 2$, $b = 1$ et $c = 0$.