Exercices de factorisation
d'équation
d'inéquation

Préambule : Très souvent dans les exercices d'équation ou d'inéquation il faut d'abord factoriser l'expression étudiée.
Aussi les trois types d'exercices sont traités en même temps.

Important : Il faut beaucoup s'entraîner pour acquérir les automatismes !

I) Rappels sur les identités remarquables de factorisation

1) $\boxed{a^2 + b^2 + 2ab = (a+b)^2}$

Un terme au carré plus un autre terme au carré + 2 fois le produit de ces deux termes est égal au carré de la somme de ces deux termes.

Exemple : $4x^2 + 12x + 9 = (2x)^2 + 3^2 + 2\times(2x)\times 3$
$= (2x+3)^2$

2) $\boxed{a^2 + b^2 - 2ab = (a-b)^2}$

Un terme au carré + un autre terme au carré − 2 fois le produit de ces deux termes est égal au carré de la différence de ces deux termes.

Exemple : $16x^2 - 40x + 25 = (4x)^2 + 5^2 - 2\times(4x)\times 5$
$= (4x-5)^2$

3) $\boxed{a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)}$

La différence des carrés de deux termes est égale au produit de la différence et de la somme de ces deux termes.

Exemple : $16x^2 - 25 = (4x)^2 - 5^2$
$= (4x-5)(4x+5)$

Important :
1) Il n'existe pas d'identité remarquable générale pour $a^2 + b^2$
2) Ne confondez pas $a^2 - b^2$ et $(a-b)^2$!!!

II) Rappel sur les inéquations

1) Si dans un produit il y a un nombre impair de termes négatifs, le produit est négatif.
S'il y a un nombre pair de termes négatifs, le produit est positif.

2) Si dans une inégalité on multiplie ou divise les deux termes par un nombre positif, le sens de l'inégalité reste inchangé :

$\geq \longrightarrow \geq$

$> \longrightarrow >$

$\leq \longrightarrow \leq$

$< \longrightarrow <$

3) Si dans une inégalité on multiplie ou divise les deux termes par un nombre négatif, le sens de l'inégalité doit être inversé :

$$\geq \longrightarrow \leq$$

$$> \longrightarrow <$$

$$\leq \longrightarrow \geq$$

$$< \longrightarrow >$$

4) Si dans une inégalité on inverse les deux termes, le sens de l'inégalité doit être inversé.

Exemple : $a < b$ avec a et b non nuls

$$\Rightarrow \frac{1}{a} > \frac{1}{b}$$

ou $\frac{1}{b} < \frac{1}{a}$, ce que je conseille : inverser l'ordre des termes plutôt que le sens de l'inégalité, car en gardant le même sens on rend le raisonnement plus confortable.

5) Une fonction affine $ax+b$ s'annule pour $x = -\frac{b}{a}$.

Si $a > 0$, la fonction est croissante et l'ordre des signes est $-\ 0\ +$:

x	$-\infty$		$-\frac{b}{a}$		$+\infty$
$ax+b$		$-$	0	$+$	

Si $a < 0$, la fonction est décroissante et l'ordre des signes est $+\ 0\ -$:

x	$-\infty$		$-\frac{b}{a}$		$+\infty$
		$+$	0	$-$	

III) Batterie d'exercices

Note préalable : Cette section comprend un certain nombre d'exercices expliqués de façon détaillée, l'idée étant de développer les automatismes par la lecture.

Bon courage, donc ! :-)

Exercice 1

Résoudre l'équation

$$x(3x-4)+4(3x-4)=0$$

puis l'inéquation

$$x(3x-4)+4(3x-4)\geqslant 0$$

a) Le facteur commun est à l'évidence $3x-4$.

$$x(3x-4)+4(3x-4)=\boxed{(3x-4)(x+4)}$$

b) L'équation $x(3x-4)+4(3x-4)=0$ admet donc deux solutions :

$3x-4=0$ et $x+4=0$

$3x=4$ d'où $\boxed{x=-4}$

d'où $\boxed{x=\frac{4}{3}}$

d'où $\boxed{S=\left\{-4\,;\,\frac{4}{3}\right\}}$

c) Pour traiter l'inéquation $x(3x-4)+4(3x-4)\geqslant 0$ il faut étudier le signe des fonctions affines $3x-4$ et $x+4$ dans un tableau de signes.

x	$-\infty$		-4		$\frac{4}{3}$		$+\infty$	
$3x-4$		$-$		$-$	0	$+$		car le coefficient de x, 3, est positif
$x+4$		$-$	0	$+$		$+$		car le coefficient de x, 1, est positif.
$(3x-4)(x+4)$		$+$	0	$-$	0	$+$		

⚠ Important : Faites bien attention à mettre les valeurs de x en haut du tableau dans le bon ordre ! (Je vois relativement souvent l'erreur consistant à inverser l'ordre des valeurs.)

Comme 0 est inclus (car l'inégalité étudiée est ≥ 0), les intervalles solutions de l'inéquation sont :

$$\boxed{S =]-\infty ; -4] \cup \left[\frac{4}{3} ; +\infty\right[}$$

Exercice n°2

Résoudre l'équation

$$(2x-3)(x+1)+5(-3+2x)=0$$

puis l'inéquation

$$(2x-3)(x+1)+5(-3+2x)<0$$

a) A toute première vue, il n'y a pas de facteur commun.
Il faut cependant remarquer que $-3+2x = 2x-3$
(seul l'ordre des termes a été modifié).

D'où $(2x-3)(x+1)+5(-3+2x)$

$= (2x-3)(x+1)+5(2x-3)$

$= (2x-3)(x+1+5) = \boxed{(2x-3)(x+6)}$

b) L'équation admet donc deux solutions :

$2x-3=0$ $\qquad$ $x+6=0$

$2x=3$ $\qquad$ d'où $\boxed{x=-6}$

d'où $\boxed{x=\frac{3}{2}}$

d'où $\boxed{S=\left\{-6\,;\,\frac{3}{2}\right\}}$

c) L'inéquation est étudiée à l'aide du tableau suivant

x	$-\infty$		-6		$\frac{3}{2}$		$+\infty$	
$2x-3$		$-$		$-$	0	$+$		car le coefficient de x, 2, est >0
$x+6$		$-$	0	$+$		$+$		car le coefficient de x, 1, est >0
$(2x-3)(x+6)$		$+$	0	$-$	0	$+$		

Comme 0 est exclus (l'inéquation est $<$),
l'intervalle solution de l'inéquation est

$$\boxed{S = \left]-6 ; \frac{3}{2}\right[}$$

Exercice 3

Résoudre l'équation

$$(-5x+2)(3x+4) + (3x+4)(-x+3) = 0$$

puis l'inéquation

$$(-5x+2)(3x+4) + (3x+4)(-x+3) > 0$$

a) Le facteur commun est à l'évidence $3x+4$.

D'où $(-5x+2)(3x+4) + (3x+4)(-x+3)$

$= (3x+4)(-5x+2-x+3)$

$= \boxed{(3x+4)(-6x+5)}$

b) L'équation admet les deux solutions

$3x+4=0$ $\qquad -6x+5=0$

$3x=-4$ $\qquad -6x=-5$

d'où $\boxed{x=-\frac{4}{3}}$ $\qquad$ d'où $x=\frac{-5}{-6}$

soit $\boxed{x=\frac{5}{6}}$

d'où $\boxed{S=\left\{-\frac{4}{3}\,;\,\frac{5}{6}\right\}}$

c) L'inéquation est étudiée à l'aide du tableau suivant :

x	$-\infty$		$-\frac{4}{3}$		$\frac{5}{6}$		$+\infty$	
$3x+4$		$-$	0	$+$	|	$+$		car le coefficient de x, 3, est >0
$-6x+5$		$+$	|	$+$	0	$-$		car le coefficient de x, -6, est <0
$(3x+4)(-6x+5)$		$-$	0	$+$	0	$-$		

0 étant exclus (l'inéquation est >0), l'intervalle solution est $\boxed{S=\left]-\frac{4}{3}\,;\,\frac{5}{6}\right[}$

Exercice 4

Résoudre l'équation

$$(x-1)(7x+5) = 2(x-1)^2 - (x-1)$$

puis l'inéquation

$$(x-1)(7x+5) \leq 2(x-1)^2 - (x-1)$$

a) Il ne faut <u>surtout pas</u> développer les parties gauche et droite.

Il faut écrire l'équation en faisant passer la partie droite à gauche de l'égalité en changeant les signes :

$$(x-1)(7x+5) - 2(x-1)^2 + (x-1) = 0$$

Le facteur commun est $(x-1)$, d'où

$$(x-1)(7x+5) - 2(x-1)^2 + (x-1)$$

$$= (x-1)\left[7x+5 - 2(x-1) + 1\right]$$

$(x-1)^2 = (x-1)(x-1)$
Un facteur $x-1$ est sorti. Il reste l'autre

$(x-1) = 1 \times (x-1)$
$(x-1)$ est sorti, il reste 1

$$= (x-1)(7x+5-2x+2+1)$$

$$\boxed{= (x-1)(5x+8)}$$

b) Les deux solutions de l'équation sont

$x-1=0$ $\quad\quad$ $5x+8=0$

d'où $\boxed{x=1}$ $\quad\quad$ $5x=-8$

d'où $\boxed{x=-\frac{8}{5}}$

d'où $\boxed{S=\left\{-\frac{8}{5}, 1\right\}}$

c) L'inéquation demandée est équivalente à

$(x-1)(5x+8) \leq 0$

Elle est étudiée à l'aide du tableau suivant :

x	$-\infty$		$-\frac{8}{5}$		1		$+\infty$
$x-1$		$-$		$-$	0	$+$	
$5x+8$		$-$	0	$+$		$+$	
$(x-1)(5x+8)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

L'intervalle solution de l'inéquation est

$\boxed{S=\left]-\frac{8}{5} ; 1\right[}$

Exercice 5

Résoudre l'équation

$$(4x-1)(7x+3)+(x-3)(1-4x)=0$$

a) Comparons les facteurs $(4x-1)$ et $(1-4x)$: l'ordre des termes est inversé, mais ce sont surtout les signes qui sont inversés :

$$4x \to -4x$$

$$-1 \to +1$$

Il faut donc réécrire l'expression en inversant le signe + devant le deuxième terme et en inversant les signes (et l'ordre) de $(1-4x)$ (et uniquement dans cette parenthèse) :

$$(4x-1)(7x+3)+(x-3)(1-4x)$$

$$=(4x-1)(7x+3)-(x-3)(+4x-1)$$

De cette façon, le facteur commun est $(4x-1)$:

$$(4x-1)(7x+3)-(x-3)(4x-1)$$

$$=(4x-1)\left[7x+3-(x-3)\right]$$

$$=(4x-1)(7x+3\underbrace{-x+6})=(4x-1)(6x+9)$$

il faut inverser
tous les termes
de la parenthèse

Dans $6x+9$, 6 et 9 sont tous deux divisibles par 3. On peut donc mettre 3 en facteur (on place alors 3 devant le bloc de parenthèses).

$$(4x-1)(6x+9) = \boxed{3(4x-1)(2x+3)}$$

⚠ Dans une factorisation, vérifiez toujours si vous ne pouvez pas aller un peu plus en mettant en facteur un diviseur commun aux termes d'une parenthèse.
(garder $(6x+9)$ ne vous retire normalement pas de points, mais montrer que vous avez vu que 3 pouvait être mis en facteur, c'est mieux.)

Les deux solutions de l'équation sont donc :

$4x-1=0$

$4x=1$

d'où $\boxed{x=\dfrac{1}{4}}$

$2x+3=0$

$2x=-3$

d'où $\boxed{x=-\dfrac{3}{2}}$

d'où $\boxed{S=\left\{-\dfrac{3}{2}\,;\,\dfrac{1}{4}\right\}}$

Exercice 6

Résoudre l'équation

$$(-3x+1)(2x+1) = (x-10)(-2x-1)$$

Il ne faut bien sûr **surtout pas** développer les parties gauche et droite.

En passant la partie droite à gauche, et en changeant le signe du bloc de parenthèses :

$$(-3x+1)(2x+1) = (x-10)(-2x-1)$$

$$\Leftrightarrow (-3x+1)(2x+1) - (x-10)(-2x-1) = 0$$

On voit que les signes de $(2x+1)$ et $(-2x-1)$ sont inversés :

$$2x \rightarrow -2x$$

$$1 \rightarrow -1$$

On inverse donc le signe devant les parenthèses et les signes de $(-2x-1)$:

$$(-3x+1)(2x+1) - (x-10)(-2x-1)$$

$$= (-3x+1)(2x+1) + (x-10)(+2x+1)$$

$$= (2x+1)(-3x+1+x-10)$$

$$= (2x+1)(-2x-9)$$

Ici on peut mettre dans la 2ème parenthèse "– en facteur" :

$$(2x+1)(-2x-9) = \boxed{-(2x+1)(2x+9)}$$

Les deux solutions de l'équation sont donc

$2x+1=0$ $\quad\quad$ $2x+9=0$

$2x=-1$ $\quad\quad$ $2x=-9$

d'où $\boxed{x=-\frac{1}{2}}$ $\quad\quad$ d'où $\boxed{x=-\frac{9}{2}}$

et $\boxed{S=\left\{-\frac{9}{2}\,;\,-\frac{1}{2}\right\}}$

Exercice 7

Résoudre l'équation

$$(2x+3)^2=25$$

puis l'inéquation

$$(2x+3)^2\leq 25$$

Ne pas développer $(2x+3)^2$!

a) L'équation s'écrit aussi

$$(2x+3)^2-25=0$$

soit $(2x+3)^2-5^2=0$

soit encore

$$(2x+3-5)(2x+3+5)=0$$

$$(2x-2)(2x+8)=0$$

Dans les deux parenthèses, on peut mettre 2 en facteur, qu'on place deux fois avant les parenthèses :

$$(2x-2)(2x+8) = 2\times 2(x-1)(x+4)$$
$$= \boxed{4(x-1)(x+4)}$$

Les deux solutions de l'équation sont :

$x-1=0$ $\qquad$ $x+4=0$

d'où $\boxed{x=1}$ $\qquad$ d'où $\boxed{x=-4}$

Soit $\boxed{S=\{-4\,;1\}}$

b) L'inéquation initiale s'écrit aussi

$$4(x-1)(x+4)\leq 0$$

Le tableau de signes est

x	$-\infty$		-4		1		$+\infty$
$x-1$		$-$		$-$	0	$+$	
$x+4$		$-$	0	$+$		$+$	
$(x-1)(x+4)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Comme 0 est inclus (≤ 0), l'intervalle solution est

$$\boxed{S=[-4\,;1]}$$

Exercice n° 8

Résoudre l'équation

$$(2x+1)^2 = (5x-7)^2$$

puis l'inéquation

$$(2x+1)^2 > (5x-7)^2$$

Comme pour les exercices précédents, ne pas développer les carrés.

a) $(2x+1)^2 = (5x-7)^2$

s'écrit aussi

$$(2x+1)^2 - (5x-7)^2 = 0$$

soit $\left[(2x+1)-(5x-7)\right]\left[(2x+1)+(5x-7)\right] = 0$

$$(2x+1-5x+7)(2x+1+5x-7) = 0$$

$$(-3x+8)(7x-6) = 0$$

Les deux solutions de l'équation

$-3x+8=0$

$-3x=-8$

$3x=8$

d'où $\boxed{x=\frac{8}{3}}$

$7x-6=0$

$7x=6$

d'où $\boxed{x=\frac{6}{7}}$

soit $\boxed{S=\left\{\frac{6}{7}\,;\,\frac{8}{3}\right\}}$

b) L'inéquation s'écrit aussi

$$(-3x+8)(7x-6) > 0$$

Elle se résoud à l'aide du tableau de signes suivant :

x	$-\infty$		$\frac{6}{7}$		$\frac{8}{3}$		$+\infty$
$-3x+8$		$+$		$+$	0	$-$	
$7x-6$		$-$	0	$+$		$+$	
$(-3x+8)(7x-6)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

car le coefficient de x, -3, est < 0

Comme 0 est exclu (> 0), l'intervalle solution est

$$\boxed{S = \left]\frac{6}{7} ; \frac{8}{3}\right[}$$

Exercice 9

Résoudre l'équation

$$16x^2 - 25 = (4x+5)(7x-2)$$

puis l'inéquation

$$16x^2 - 25 < (4x+5)(7x-2)$$

Je me répète : ne pas développer le produit des parenthèses.

Il faut remarquer que $16x^2 - 25 = (4x)^2 - 5^2$
$= (4x-5)\underline{(4x+5)}$

Ce facteur est présent dans $(4x+5)(7x-2)$

a) L'équation s'écrit aussi

$$(4x-5)(4x+5) - (4x+5)(7x-2) = 0$$

soit

$$(4x+5)\left[(4x-5) - (7x-2)\right] = 0$$

$$(4x+5)(4x-5-7x+2) = 0$$

$$(4x+5)(-3x-3) = 0$$

En mettant -3 en facteur dans la 2ème parenthèse :

$$-3(4x+5)(x+1) = 0$$

Les deux solutions de l'équation sont :

$4x+5=0$ $\qquad$ $x+1=0$

$4x=-5$ $\qquad$ d'où $\boxed{x=-1}$

d'où $\boxed{x = -\frac{5}{4}}$

Soit $\boxed{S = \left\{-\frac{5}{4} ; -1\right\}}$ $\quad \left(\frac{5}{4} > 1 \Rightarrow -\frac{5}{4} < -1\right)$

b) L'inéquation s'écrit aussi

$$(4x-5)(4x+5) - (4x+5)(7x-2) < 0$$

soit

$$-3(4x+5)(x+1) < 0$$

Comme $-3 < 0$, l'inéquation revient à

$$(4x+5)(x+1) > 0$$

Le tableau de signes permettant de la résoudre est

x	$-\infty$		$-\frac{5}{4}$		-1		$+\infty$
$4x+5$		$-$	0	$+$		$+$	
$x+1$		$-$		$-$	0	$+$	
$(4x+5)(x+1)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Comme 0 est exclus (>0), l'intervalle solution est

$$\boxed{S = \left]-\infty ; -\frac{5}{4}\right[\cup \left]-1 ; +\infty\right[}$$

Exercice 10

Résoudre l'équation

$$25x^2 - 70x + 49 = -4(5x-7)$$

Il faut remarquer que

$$25x^2 - 70x + 49 = (5x)^2 + 7^2 - 2\times(5x)\times 7$$
$$= (5x-7)^2$$

L'équation s'écrit donc

$$(5x-7)^2 + 4(5x-7) = 0$$

soit $(5x-7)(5x-7+4) = 0$

$$(5x-7)(5x-3) = 0$$

Les deux solutions sont :

$5x-7=0$ d'où $\boxed{x = \frac{7}{5}}$

$5x-3=0$ d'où $\boxed{x = \frac{3}{5}}$

soit $\boxed{S = \left\{\frac{3}{5} ; \frac{7}{5}\right\}}$

Exercice 10

Résoudre l'inéquation

$$36x^2 - 12x + 1 \geqslant (6x-1)(9x-4)$$

Bien évidemment, il ne faut pas développer $(6x-1)(9x-4)$.

Il faut remarquer que

$$36x^2 - 12x + 1 = (6x)^2 + 1^2 - 2\times(6x)\times 1$$
$$= (6x-1)^2$$

L'inéquation s'écrit alors

$$(6x-1)^2 - (6x-1)(9x-4) \geqslant 0$$

soit

$$(6x-1)\left[(6x-1) - (9x-4)\right] \geqslant 0$$

$$(6x-1)(6x-1-9x+4) \geqslant 0$$

$$(6x-1)(-3x+3) \geqslant 0$$

soit finalement

$$3(6x-1)(-x+1) \geqslant 0$$

Le tableau de signes correspondant à cette inéquation est

x	$-\infty$		$\frac{1}{6}$		1		$+\infty$
$6x-1$		$-$	0	$+$		$+$	
$-x+1$		$+$		$+$	0	$-$	
$3(6x-1)(-x+1)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

d'où $\boxed{S = \left[\frac{1}{6}\,;\,1\right]}$

Exercice 11

Résoudre l'équation

$$3x^2 - 18x + 27 = (x-3)(-3x+2)$$

Je ne me souviens plus : ai-je prévenu qu'il ne faut pas développer ? :-)

A priori, $3x^2 - 18x + 27$ ne ressemble pas à une identité remarquable : $3x^2 = (\sqrt{3}x)^2$, $27 = (\sqrt{27})^2$ (?).

Comme 3, 18 et 27 sont tous trois divisibles par 3, on peut mettre 3 en facteur :

$$3x^2 - 18x + 27 = 3(x^2 - 6x + 9)$$

Or $x^2 - 6x + 9 = x^2 + 3^2 - 2 \times (x) \times 3$

$$= (x-3)^2$$

L'équation s'écrit donc

$$(x-3)^2 - (x-3)(-3x+2) = 0$$

soit

$$(x-3)\left[(x-3) - (-3x+2)\right] = 0$$

$$(x-3)(x-3+3x-2) = 0$$

$$(x-3)(4x-5) = 0$$

Les deux solutions sont

$\boxed{x = 3}$ et $\boxed{x = \frac{5}{4}}$ soit $\boxed{S = \left\{\frac{5}{4} ; 3\right\}}$