Proposition de démonstration

de la conjecture de Syracuse

par Rémy Aumeunier

La conjecture de Syracuse, connue sous le nom de problème de Collatz, a été introduite par le mathématicien allemand Lothar Collatz en 1937. C'est l'énoncé mathématique non prouvé selon lequel, en partant de n'importe quel entier $n > 0$, la séquence U_n arrive à la valeur 1, après avoir suivi les règles suivantes :

$$U_0 \in \mathbb{R}^* \quad U_{n+1} = \begin{cases} \frac{U_n}{2} & \text{si } U_n \text{ est un entier pair} \\ 3U_n + 1 & \text{si } U_n \text{ est un entier impair} \end{cases}$$

1 Préambule

Cette méthode proposée implique de transformer la séquence U_n en une forme polynomiale. L'analyse de la polynomisation de la séquence de Syracuse offre une approche non conventionnelle pour examiner de manière approfondie le comportement de ces séquences. À travers cette perspective, je vise à fournir des éclaircissements qui pourraient apporter des éléments de réponse à la conjecture ou à aborder ce problème d'une manière inattendue.

2 Polynomisation de la séquence de Syracuse

Pour effectuer la polynomisation des éléments de la suite de Syracuse, j'utilise une variante de la méthode de Horner connue sous le nom de Ruffini-Horner. Cette méthode permet d'associer une valeur à une représentation polynomiale.

$$U_0 \in \mathbb{R}^* \quad U_{n+1} = \begin{cases} \frac{U_n}{2} & \text{si } U_n \text{ est un entier pair} \\ 3U_n + 1 & \text{si } U_n \text{ est un entier impair} \end{cases}$$

$$\{q_x, p_x\} \in \mathbb{R} \quad n_0 \frac{3^p}{2^{q_0}} + \frac{3^{p-1}}{2^{q_1}} + \frac{3^{p-2}}{2^{q_2}} + \frac{3^{p-3}}{2^{q_3}} + \frac{3^{p-4}}{2^{q_4}} + \cdots + \frac{3^{p_0}}{2^{q_n}} = n_x$$

Et si je considère la suite de Syracuse compressée, j'obtiens une forme que je vais qualifier de canonique.Pusiqu'une multiplication par 3 implique obligatoirement une division par 2.

$$n_0 \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^p \cdot \frac{1}{2^q} + \left(\frac{3}{2}\right)^{p-1} \cdot \frac{1}{2^{q_1}} + \left(\frac{3}{2}\right)^{p-2} \cdot \frac{1}{2^{q_2}} + \left(\frac{3}{2}\right)^{p-3} \cdot \frac{1}{2^{q_3}} + ... + \left(\frac{3}{2}\right)^{p-n} \cdot \frac{1}{2^{q_p}} = n_x$$

Ainsi, chaque valeur de la séquence peut être associée à une transposition distincte . Cette transposition suit systématiquement une structure commune, imposée par la méthode Syracuse. Ici, p désigne le nombre de multiplications par 3 avec une incrémentation de raison 1, tandis que la plus grande puissance de 2 reflète le nombre de divisions par 2 effectuées.

2.1 Application numérique

La polynomisation de la séquence de Syracuse est une simple transposition des valeurs, qui consiste à associer toutes les valeurs de suite à une représentation polynomiale.

$$U_0 \in \mathbb{R}^* \quad U_{n+1} = \begin{cases} \frac{U_n}{2} & \text{si } U_n \text{ est un entier pair} \\ 3U_n + 1 & \text{si } U_n \text{ est un entier impair} \end{cases}$$

$$U_{15} = \{46, 23, 70, 35, 106, 53, 160, 80, 40, 20, 10, 5, 16, 8, 4, 2, 1\}$$

À partir de la liste précédente et du point d'entrée ici 15, j'écris toutes les valeurs intermédiaires sous forme de fraction.

$$\frac{\left(\frac{\left(\frac{\left(\frac{\left(\frac{15\cdot 3+1}{2}\right)\cdot 3+1}{2}\right)\cdot 3+1}{2}\right)\cdot 3+1}{2\cdot 2\cdot 2\cdot 2\cdot 2}\right)\cdot 3+1}{2\cdot 2\cdot 2\cdot 2}$$

Que je réarrange ensuite sous forme de pseudo-polynôme.

$$\left(...\right) + \frac{1}{2^4}$$

$$\left(...\right) + \frac{3}{2^9} + \frac{1}{2^4}$$

$$\left(...\right) + \frac{3^2}{2^{10}} + \frac{3}{2^9} + \frac{1}{2^4}$$

$$\cdots$$

$$15\frac{3^5}{2^{12}} + \frac{3^4}{2^{12}} + \frac{3^3}{2^{11}} + \frac{3^2}{2^{10}} + \frac{3^1}{2^9} + \frac{3^0}{2^4}$$

3 Proposition de démonstration

Dans cette proposition de démonstration, je vais considérer les valeurs intermédiaires à partir de leur représentation sous forme de pseudo-polynôme. Puis, étudier le comportement de q et analyser son implication dans le calcul des valeurs intermédiaires de la suite de Syracuse n_x.

$$n_0 \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^p \cdot \frac{1}{2^q} + \left(\frac{3}{2}\right)^{p-1} \cdot \frac{1}{2^{q_1}} + \left(\frac{3}{2}\right)^{p-2} \cdot \frac{1}{2^{q_2}} + ... + \left(\frac{3}{2}\right)^{p-n} \cdot \frac{1}{2^{q_p}} = n_x$$

n_0 représente le premier élément de la séquence. La variable p dénombre les valeurs impaires rencontrées au cours des itérations, tandis que q correspond au nombre de divisions par 2 surnuméraires liées aux entiers pairs de la forme $(2^{n>1}n_a)$. C'est précisément l'évolution de q, qui est monotone croissante, qui démontre la convergence inéluctable de la suite vers 1. En effet, la limite de q nous permet d'établir une relation d'ordre : $n_0 \cdot 3 < 2^{p+q}$. Cette relation garantit l'existence d'une partie entière égale à zéro, ce qui démontre la convergence de la suite vers 1.

$$\lfloor \frac{n_0 \cdot 3^p}{2^{p+q}} \rfloor + \lfloor \frac{3^{p-1} + \cdots + 3^{p_0} \cdot 2^{b_n}}{2^{p+q}} \rfloor + (n_0 \cdot 3^p + 3^{p-1} + \ldots 2^{b_n}) mod (2^{p+q})$$

$$0 + 0 + \frac{n_0 \cdot 3^p + 3^{p-1} + \cdots + 3^{p_0} \cdot 2^{b_n}}{2^{p+q}} = \frac{2^{p+q}}{2^{p+q}} = 1$$

Concrètement, il y a une surdensité de divisions par 2 liée à la présence d'entiers pairs de la forme $(2^{n>1}n_a)$ par rapport aux entiers impairs, ce qui impose la convergence de la suite vers 1. Cette convergence se démontre grâce à la représentation des valeurs intermédiaires sous forme de pseudo-polynômes, qui permet d'étudier le comportement de la suite de Syracuse lorsque la relation d'ordre est établie. Il est important de noter aussi que la suite de Syracuse ne génère que des entiers tout au long de son processus, ce qui explique la convergence vers 1, car la suite décroît.

3.1 Application numérique :

$$15 \cdot \frac{3^3}{2^3} + \frac{3^2}{2^3} + \frac{3}{2^2} + \frac{1}{2} = \frac{15 \cdot 3^3}{2^3} + \frac{3^2 + 3 \cdot 2^1 + 2^2}{2^3} = 53$$

$$\lfloor 15 \cdot \frac{3^3}{2^3} \rfloor + \lfloor \frac{3^2 + 3 \cdot 2^1 + 2^2}{2^3} \rfloor + (15 \cdot 3^3) mod (2^3) + (3^2 + 3 \cdot 2^1 + 2^2) mod (2^3) = 53$$

$$50 + 2 + \frac{5+3}{2^3} + (5+3) mod (2^3) = 53$$

$$50 + 2 + 1 + 0 = 53$$

Ici, $(5+3) \mod (2^3) = 0$ parce que toute autre valeur implique un nombre décimal. Puis à partir d'un certain rang.

$$15 \cdot \frac{3^5}{2^{12}} + \frac{3^4}{2^{12}} + \frac{3^3}{2^{11}} + \frac{3^2}{2^{10}} + \frac{3}{2^9} + \frac{1}{2^4} = 1$$

$$\frac{15\cdot 3^5}{2^{12}} + \frac{3^4+3^3\cdot 2+3^2\cdot 2^2+3\cdot 2^3+2^8}{2^{12}} = 1$$

$$15\cdot 3^5 < 2^{12} \quad \lfloor\frac{15\cdot 3^5}{2^{12}}\rfloor = 0 \quad (15\cdot 3^5)mod(2^{12}) = 15\cdot 3^5$$

$$\frac{15\cdot 3^5+3^4+3^3\cdot 2+3^2\cdot 2^2+3\cdot 2^3+2^8}{2^{12}} = \frac{2^{12}}{2^{12}} = 1$$

La valeur de la partie entière s'érode pour finir par être égale à zéro, ce qui conduit à une fraction de puissance de 2, égale à 1.Parce que la suite ne peut contenir que des valeurs entières.

3.2 Récurrence

Cette approche permet aussi de raisonner par récurrence. Par exemple, si je considère un grand entier n, chaque fois que la partie entière de la division dans le calcul de nx sera égale à zéro, je peux repartir de cet entier différent de 1, et ne plus prendre en compte l'ancienne transposition, pour construire une nouvelle séquence, et ainsi de suite jusqu'à ce que la suite soit égale à 1.

$$0 + n_x\cdot\frac{2^{q_0}}{2^{q_0}} = n_0'$$

$$n_0'\frac{3^p}{2^{q_0}} + \frac{3^{p-1}}{2^{q_0}} + \frac{3^{p-2}}{2^{q_1}} + \frac{3^{p-3}}{2^{q_2}} + \frac{3^{p-4}}{2^{q_3}} + \cdots + \frac{3^{p_0}}{2^{q_n}} = 1$$

3.3 Cycle

(et la je suis a la ramasse pour demontre l'unicité du clyle 134)

$$U_4 = \{\mathbf{1},3,4,\mathbf{1},3,4...,\mathbf{1},3,4\}$$

$$\frac{4}{2^2} = 1$$

$$4\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^2} = 1 \quad 4\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{2^3} < 0 \quad \frac{4\cdot 3+2^2}{2^4} = \frac{2^4}{2^4} = 1$$

$$\frac{4\cdot 3^2}{2^2}\cdot\frac{1}{2^4} + \frac{3}{2}\cdot\frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^2} = 1 \quad \frac{4\cdot 3^2}{2^2}\cdot\frac{1}{2^4} < 0 \quad \frac{4\cdot 3^2+3\cdot 2^2+2^4}{2^6} = \frac{2^6}{2^6} = 1$$

3.4 Généralisation par substitution

On peut, si l'on le souhaite, généraliser le calcul de la suite en changeant les facteurs : ici, 3 devient 5

$$U_0 \in \mathbb{R}^* \quad U_{n+1} = \begin{cases} \frac{U_n}{2} & \text{si } U_n \text{ est un entier pair} \\ 5U_n + 1 & \text{si } U_n \text{ est un entier impair} \end{cases}$$

Pour appliquer le même raisonnement, il faut prendre en compte la quantité de divisions que je vais qualifier de surnuméraire. Cette quantité va permettre à la partie entière dans le calcul de nx d'être égale à zéro. Donc pour 3x+1, j'ai :

$$\frac{3^n}{2^{(n+\frac{2n}{3})}} < 1$$

Tandis que, pour le cas $5x + 1$, j'ai :

$$\frac{5^n}{2^{(2n+\frac{n}{3})}} < 1$$

Ce qui implique qu'il faut seulement 2/3 de division par 2 en plus de celles liées à la forme canonique, tandis que pour la suite 5x+1, il en faut plus de 2 fois plus. Ce qui fait que la suite diverge en dehors de quelques cas rares ou très spécifiques, s'ils existent.

4 Conclusion

Références

[1] ....

[2]