BK 09/11/17 (1)

Trouver l'expression de $f(\alpha)$ sachant que $g(\alpha) = 0$

Un exercice classique en TS consiste à faire étudier deux fonctions, $f(x)$ et $g(x)$ liées par le fait que $f'(x)$ fait intervenir $g(x)$.

Par exemple $f'(x) = \dfrac{g(x)}{[u(x)]^2}$. Le signe de $f'(x)$ est alors, dans cet exemple, celui de $g(x)$, le dénominateur $[u(x)]^2$ étant toujours strictement positif.

Lors de l'étude de $g(x)$, on demande de démontrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une solution unique α dans un intervalle $[a;b]$. (La démonstration de cette unicité se fait à l'aide du Corollaire du théorème des valeurs intermédiaires.)

On demande d'en déduire le signe de $g(x)$ (par exemple, si g est continue et strictement croissante sur $[a;b]$, $g(x) < 0$ pour $x < \alpha$ et $g(x) > 0$ pour $x > \alpha$) puis la variation de f.

A la fin, on demande de démontrer que $f(\alpha)$ est égal à une certaine expression qui paraît bien compliquée.

En général, les élèves paniquent allègrement sur cette question et se lancent dans des calculs parfois hallucinants. :-)

La solution est pourtant très simple : il faut explicitement développer $g(\alpha)=0$ et en extraire ce qu'il faut pour calculer $f(\alpha)$.

Exemple :

$$f(x) = \frac{x^3-1}{(x+1)^2} \qquad g(x) = x^3+3x^2+2$$

$$f'(x) = \frac{x^3+3x^2+2}{(x+1)^3} = \frac{g(x)}{(x+1)^3}$$

$$g'(x) = 3x^2+6x = 3x(x+2)$$

$g'(x) = 0$ pour $x=0$ et pour $x=-2$

On a donc pour g le tableau suivant :

x	$-\infty$		-2		0		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$g(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	6	$\searrow$	2	$\nearrow$	$+\infty$

Le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires permet de déterminer qu'il existe une unique valeur $\alpha < -2$ telle $g(\alpha) = 0$

Donc $g(x) < 0$ pour $x < \alpha$ et $g(x) > 0$ pour $x > \alpha$.

On en déduit le tableau de variation de f :

x	$-\infty$		α		-1		$+\infty$
$g(x)$		$-$	0	$+$	$\Vert$	$+$	
$(x+1)^3$		$-$		$-$	$\Vert$	$+$	
$f'(x)$		$+$	0	$-$	$\Vert$	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$f(\alpha)$	$\searrow$	$-\infty \Vert -\infty$	$\nearrow$	$+\infty$

En dernière question on demande de démontrer que $f(\alpha) = -\dfrac{3(\alpha^2+1)}{(\alpha+1)^2}$

Il faut procéder comme suit :

$$g(\alpha) = 0 \implies \alpha^3 + 3\alpha^2 + 2 = 0$$

$$\text{d'où } \alpha^3 = -3\alpha^2 - 2$$

$$f(\alpha) = \frac{\alpha^3 - 1}{(\alpha+1)^2} = \frac{-3\alpha^2 - 2 - 1}{(\alpha+1)^2} = \frac{-3\alpha^2 - 3}{(\alpha+1)^2}$$

$$= \frac{-3(\alpha^2+1)}{(\alpha+1)^2}$$

Ce n'est pas plus compliqué que cela ! :-)