

FIG. 7.9.

Pour effectuer cette rotation, la Terre mettra une durée égale à :

$$T = \frac{\varphi}{\Omega_T} = \frac{2\pi}{\Omega_T} + \frac{2\pi}{\Omega_T} \frac{T_j}{T_L} = T_j \left(1 + \frac{T_j}{T_L} \right) = 24 \text{ h} + 53 \text{ min}$$

Le décalage horaire des marées est donc de l'ordre 50 min par jour.

Au cours d'une année, l'action du Soleil varie puisque, par rapport à la Terre, cet astre évolue dans le plan de l'écliptique qui fait avec le plan équatorial un angle de $23^\circ 26'$. Deux fois dans l'année, au moment des équinoxes de printemps et d'automne, lorsque le Soleil traverse le plan équatorial, sa contribution aux marées est maximale (*marées d'équinoxes*).

En France, on introduit, depuis le XIX^e siècle, des *coefficients de marées* qui varient linéairement avec le marnage, c'est-à-dire la dénivellation verticale entre la pleine mer et la basse mer. Arbitrairement, on a affecté la valeur 20 à une marée de morte-eau exceptionnelle et la valeur 120 à une marée de vive-eau exceptionnelle. Par exemple, lors de la marée exceptionnelle du 10 mars 1997, le coefficient valait 119.

L'amplitude des marées peut varier beaucoup d'un point à un autre du globe. On explique cette grande variation en faisant intervenir la *résonance* entre le terme significatif de la gravitation qui présente une période de l'ordre de 12 heures et les oscillations propres des masses fluides dans les fonds marins. Dans certains sites, l'influence des dimensions, de la forme et de la profondeur des fonds marins est telle que les marées sont négligeables (c'est le cas en Méditerranée) ou que leur période diffère sensiblement de 12 heures.

Remarque : L'effet de marée qu'exerce la Lune entre la tête et les pieds d'une personne mesurant $h = 1,80 \text{ m}$ étendue selon la direction de l'astre est négligeable ; en effet, on a, par kg :

$$\frac{GM_L}{D_L^3} 3h = 4,7 \times 10^{-13} \text{ N.kg}^{-1}$$

IV. — LA FORCE DE CORIOLIS TERRESTRE

La mise en évidence de la force de Coriolis terrestre repose sur l'expression vectorielle de la loi fondamentale de la mécanique appliquée à un point matériel A dans un référentiel terrestre. Notant \mathbf{F}_{oc} la somme des forces supplémentaires occasionnelles, il vient :

$$m\mathbf{a}_{A/\mathcal{R}} = m\mathbf{g} + \mathbf{F}_{oc} - 2m\boldsymbol{\Omega}_T \times \mathbf{v}_{A/\mathcal{R}}$$

La force de Coriolis terrestre est le plus souvent négligeable devant le poids. En effet :

$$g \approx 9,8 \text{ m.s}^{-2} \quad \text{alors que} \quad 2\|\boldsymbol{\Omega}_T \times \mathbf{v}\| < 1,5 \times 10^{-4} \times v$$

Le rapport de ces deux forces est donc inférieur à 1 % si la vitesse est inférieure à $700 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$. Cependant, c'est ce terme généralement négligeable qui permet d'expliquer certains phénomènes observables et jouant parfois un rôle majeur (déviations des vents et des courants marins).

IV. 1. — Déviation de la trajectoire d'une particule

Considérons une particule A astreinte, par une force de réaction \mathbf{R} , à évoluer dans un plan horizontal et ayant, au point O , une vitesse \mathbf{v}_0 horizontale (Fig. 7.10a).

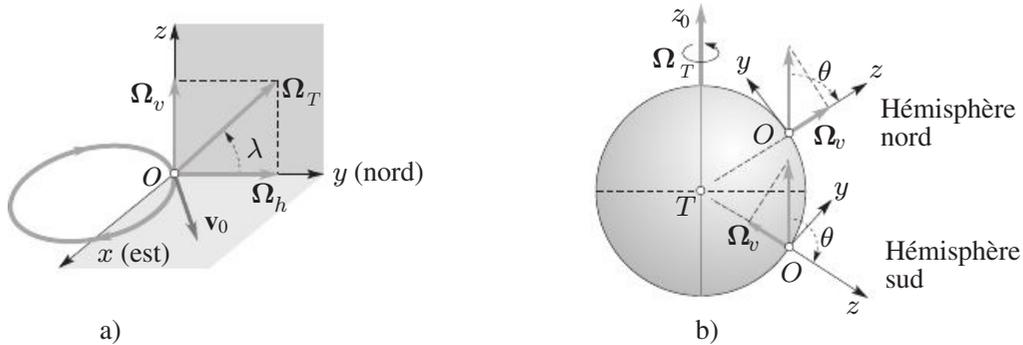


FIG. 7.10.

L'effet de la force de Coriolis, peut être étudié à partir de l'équation vectorielle donnée par la loi fondamentale de la dynamique dans le référentiel terrestre $\mathcal{R} = Oxyz$:

$$m \frac{d\mathbf{v}}{dt} = m\mathbf{g} + \mathbf{R} - 2m\boldsymbol{\Omega}_T \times \mathbf{v}$$

Comme la trajectoire est pratiquement contenue dans le plan horizontal Oxy , l'équation précédente se réduit dans ce plan à :

$$m \frac{d\mathbf{v}}{dt} = -2m\boldsymbol{\Omega}_v \times \mathbf{v} \quad \text{soit} \quad \frac{d\mathbf{v}}{dt} = 2\mathbf{v} \times \boldsymbol{\Omega}_v$$

où $\boldsymbol{\Omega}_v$ est la contribution verticale de $\boldsymbol{\Omega}_T$. On voit que le vecteur vitesse varie vectoriellement selon la direction et le sens de $\mathbf{v} \times \boldsymbol{\Omega}_v$. Dans l'hémisphère sud, la déviation change de sens, comme on peut le vérifier sur une particule se déplaçant vers le nord (axe Oy de la figure 7.10b).

L'équation réduite du mouvement est caractéristique d'un mouvement *circulaire et uniforme* : en effet, on peut la rapprocher de l'équation du mouvement d'une particule chargée dans un champ magnétique \mathbf{B} (cf. chapitre 8) :

$$m \frac{d\mathbf{v}}{dt} = q\mathbf{v} \times \mathbf{B} \quad \text{soit} \quad \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \mathbf{v} \times \boldsymbol{\omega}_c \quad \text{avec} \quad \boldsymbol{\omega}_c = \frac{q\mathbf{B}}{m}$$

L'équation précédente donne donc, dans le plan horizontal :

$$\frac{v_0^2}{R} = 2v_0 \Omega_v = 2v_0 \Omega_T |\sin \lambda| \quad \text{d'où} \quad R = \frac{v_0}{2\Omega_T |\sin \lambda|}$$

Remarque : La contribution horizontale $\boldsymbol{\Omega}_h$ de $\boldsymbol{\Omega}_T$ intervient dans l'équation qui exprime que la somme des forces verticales doit être nulle : $m\mathbf{g} + \mathbf{R} - 2m\boldsymbol{\Omega}_h \times \mathbf{v} = \mathbf{0}$.

Sur la figure 7.10a, on a représenté le cercle décrit dans l'hémisphère *nord* : la particule est déviée vers la *droite* d'un observateur placé selon la verticale ascendante locale ; elle repasse par le même

point au bout d'une durée égale à $12 \text{ h} / |\sin \lambda|$; sa valeur est maximale aux pôles. Cette déviation de la trajectoire des particules par la force de Coriolis, établie théoriquement par Poisson en 1837, joue un rôle important en géophysique, car elle permet d'expliquer l'origine des alizés dans l'hémisphère nord ; ces vents sont dus au déplacement des masses d'air venant du nord et se dirigeant vers l'équateur où elles remplacent les masses d'air chaudes en mouvement ascensionnel. En raison de la déviation vers la droite par la force de Coriolis, ces vents semblent provenir du nord-est (Fig. 7.11). On explique aussi, par la force de Coriolis, la déviation vers la droite du Gulf Stream ; comme son nom l'indique, c'est un courant marin, produit dans le golfe des Caraïbes par les vents du sud-ouest, qui se dirige vers le nord. Pendant longtemps, on a attribué à ce courant marin chaud la différence de température constatée entre la côte est des USA et la côte ouest européenne plus tempérée ; cette interprétation est actuellement contestée.

En météorologie, à une échelle synoptique, la force de Coriolis permet de la même façon d'interpréter la structure en spirale des masses nuageuses autour de zones de basse pression. Dans l'hémisphère nord, la spirale est décrite dans le sens inverse des aiguilles d'une montre ; dans l'hémisphère sud, c'est le contraire.

La figure 7.11b représente une photographie, prise par satellite en 2005, du cyclone Katrina sur la côte atlantique sud des USA. Le sens de description de la spirale nuageuse est donné par la variation du vecteur vitesse orientée selon $\mathbf{v} \times \boldsymbol{\Omega}_v$ et peut être obtenu en s'aidant de la figure 7.11c. En effet, la vitesse \mathbf{v} est globalement orientée des hautes pressions périphériques vers les basses pressions de la zone centrale. En raison du terme $2\mathbf{v} \times \boldsymbol{\Omega}_v$, les trajectoires des particules contournent la zone centrale de faible pression du fait de la déviation vers la droite par rapport à la direction de \mathbf{v} . Il en résulte une orientation de la spirale dans le sens inverse des aiguilles d'une montre. La justification complète de ce mouvement sera donnée en mécanique des fluides (cf. chapitre 30).

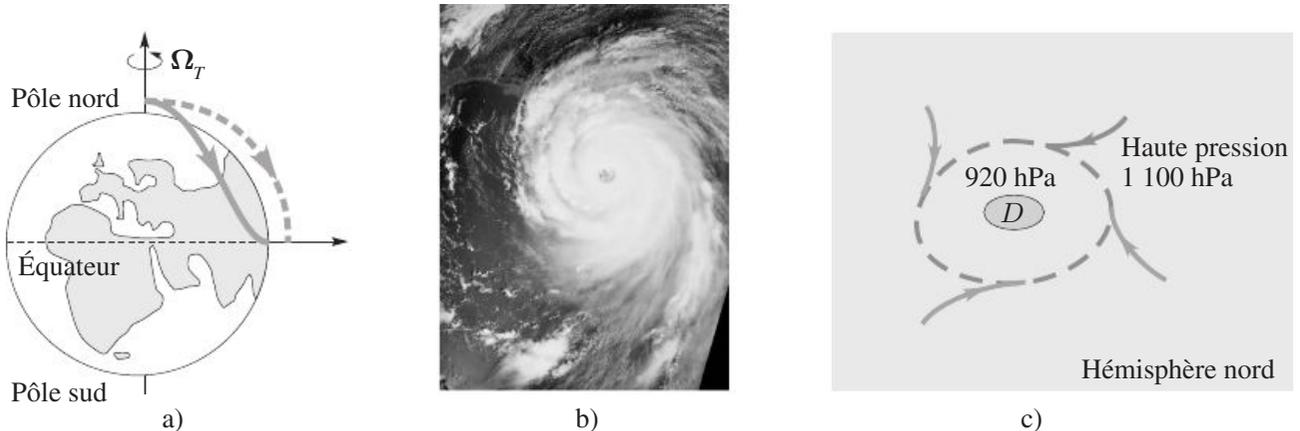


FIG. 7.11.

Remarques : (1) Autour de zones de surpression (cas d'un anticyclone), le sens de la spirale est inversé.
 (2) On donne souvent comme exemple de cette déviation celle prise par l'eau lorsqu'on vidange un lavabo. En réalité, l'analyse montre que la précision sur l'état mécanique du fluide devrait être très grande pour que l'expérience soit significative (cf. chapitre 30).

IV.2. — Pendule de Foucault

a) Expérience historique

Dans sa publication originale du 3 février 1851, à l'Académie des Sciences, Foucault fit remarquer qu'il était possible de mettre en évidence et de mesurer la vitesse de rotation $\boldsymbol{\Omega}_T$ de la Terre autour de l'axe des pôles, sans l'aide des étoiles, en étudiant seulement le mouvement d'un pendule simple par rapport au référentiel terrestre \mathcal{R} .

Le comportement d'un tel pendule s'interprète aisément au pôle nord, sans équation (!) comme le fit remarquer Foucault lui-même. En effet, par rapport au référentiel géocentrique \mathcal{R}_g , le pendule, écarté de sa position d'équilibre et abandonné à son poids et à la tension du fil, effectue un mouvement oscillatoire dans un plan fixe, déterminé par les conditions initiales. Aussi, dans \mathcal{R} , qui tourne par rapport à \mathcal{R}_g , dans le sens ouest-est, avec la vitesse angulaire Ω_T , ce plan semble effectuer une rotation autour de l'axe polaire, dans le sens opposé, avec une période de révolution T de 24 heures.

L'expérience a été faite par Foucault à Paris, dans sa cave, puis refaite sous la coupole du Panthéon avec les caractéristiques suivantes : masse $m = 28$ kg et longueur $l = 67$ m (Fig. 7.12a). Dans ce cas, seule la composante selon la verticale ascendante Oz du vecteur rotation Ω_T joue un rôle effectif, précisément $\Omega_v = \Omega_T \cos \theta \mathbf{e}_z = \Omega_T \sin \lambda \mathbf{e}_z$, θ étant la colatitute et $\lambda = \pi/2 - \theta$ la latitude. Comme $\lambda = 48^\circ 51'$, la période de révolution du plan du pendule de Foucault vaut :

$$T = \frac{2\pi}{\Omega_v} = \frac{2\pi}{\Omega_T \cos \theta} = \frac{2\pi}{\Omega_T \sin \lambda} = 31 \text{ h } 52 \text{ min}$$

Remarques : (1) Notons qu'à l'équateur ($\lambda = 0^\circ$) le plan d'oscillation du pendule dans \mathcal{R} est immobile ($T = \infty$) ; il tourne donc par rapport à \mathcal{R}_g .

(2) On peut simuler le comportement d'un tel pendule à l'aide d'une expérience simple dans laquelle un pendule simple oscille, alors que son support repose sur le plan d'un tabouret en rotation autour d'un axe vertical (Fig. 7.12b) : le référentiel terrestre simule le référentiel géocentrique et le référentiel du tabouret celui lié à la Terre. On constate que le plan d'oscillation du pendule n'est pas influencé par la rotation du tabouret ; dans le référentiel lié au tabouret, ce plan semble tourner en sens inverse.

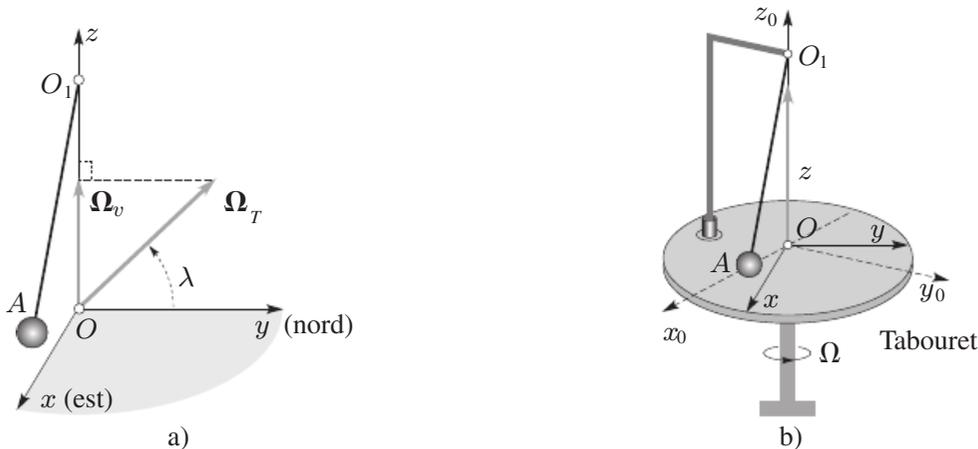


FIG. 7.12.

b) Développement quantitatif

Il n'est pas inutile de préciser que l'analyse quantitative, développée à partir des projections de l'équation vectorielle du mouvement, celle qui a la faveur dans l'enseignement français de la mécanique, ne fut pas effectuée par Foucault, probablement peu intéressé par ce développement technique, mais par le mathématicien astronome italien Giovanni Plana, plusieurs mois après l'expérience.

L'application de la loi fondamentale de la dynamique, par rapport au référentiel terrestre \mathcal{R} , aux petits mouvements du pendule autour de l'origine O de \mathcal{R} , donne, en remplaçant la force de tension \mathbf{F}_T qu'exerce le fil par $-(F_T/l)\mathbf{SA}$:

$$m\mathbf{a}_{A/\mathcal{R}} = m\mathbf{g} - \frac{F_T}{l}\mathbf{SA} - 2m\Omega_T \times \mathbf{v}_{A/\mathcal{R}}$$

Le dernier terme du second membre est la force d'inertie de Coriolis terrestre qui apparaît dans \mathcal{R} , la force d'inertie d'entraînement étant contenue dans le poids. Il vient, en supprimant toutes les contribu-

tions verticales des trois forces, mg , $\mathbf{F}_T = -(F_T/l)\mathbf{SO}$ et $-2m\boldsymbol{\Omega}_h \times \mathbf{v}_{A/\mathcal{R}}$, $\boldsymbol{\Omega}_h$ étant la composante horizontale de $\boldsymbol{\Omega}_T$:

$$m\mathbf{a}_{A/\mathcal{R}} = -\frac{F_T}{l}\mathbf{OA} - 2m\boldsymbol{\Omega}_v \times \mathbf{v}_{A/\mathcal{R}}$$

Comme $F_T \approx mg$, on obtient, en introduisant la pulsation d'oscillation du pendule $\omega_0 = (g/l)^{1/2}$, laquelle, rappelons-le, ne dépend pas de la masse en raison de l'égalité de la masse grave et de la masse inerte :

$$\mathbf{a}_{A/\mathcal{R}} + \omega_0^2 \mathbf{OA} = -2\boldsymbol{\Omega}_v \times \mathbf{v}_{A/\mathcal{R}}$$

Le premier membre est caractéristique d'un oscillateur horizontal bidimensionnel ; le second, dû à la force de Coriolis, provoque une lente rotation du plan d'oscillation, à la vitesse angulaire $\boldsymbol{\Omega}_v$, dans le sens est-ouest. La projection de l'équation vectorielle dans la base cartésienne de \mathcal{R} donne des équations différentielles dont la résolution montre que, dans un référentiel \mathcal{R}' en rotation uniforme par rapport à \mathcal{R} , avec la vitesse angulaire $\boldsymbol{\Omega}_v = \boldsymbol{\Omega}_T \cos \theta$, la trajectoire est une ellipse très aplatie (cf. Exercice). La simple comparaison des termes proportionnels à \mathbf{OA} et à $2\boldsymbol{\Omega}_v \times \mathbf{v}_{A/\mathcal{R}}$, où la vitesse introduit un terme de la forme $\omega_0 \mathbf{OA}$ déphasé de $\pi/2$, en raison du caractère oscillant du pendule, permet d'en déduire le rapport des axes de l'ellipse (Fig. 7.13) :

$$\frac{b}{a} = \frac{\Omega_T \cos \theta \omega_0}{\omega_0^2} = \frac{\Omega_T \cos \theta}{\omega_0} = \frac{T_0 \cos \theta}{T_J} \approx 10^{-4}$$

puisque $T_J \approx 86\,400$ s et $T_0 = 2\pi(l/g)^{1/2} \approx 16,4$ s.

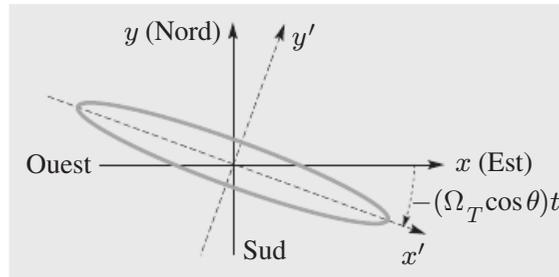


FIG. 7.13.

Remarque : De nos jours, on mesure la vitesse de rotation de la Terre Ω_T par des méthodes interférométriques (cf. *Optique*). On étudie l'évolution de la différence de phase ϕ entre les ondes centimétriques monochromatiques (de longueur d'onde λ_0) provenant d'une étoile et reçues par deux antennes radioélectriques distantes au sol de la base b . Si s est la position de l'étoile comptée à partir du plan médian des antennes et D la distance de l'étoile, on a (cf. *Optique*) :

$$\phi = \frac{2\pi bs}{\lambda_0 D} \quad \text{avec} \quad \frac{s}{D} = \int \Omega_T dt \quad \text{d'où} \quad \frac{d\phi}{dt} = \frac{2\pi b}{\lambda_0} \Omega_T$$

Connaissant λ_0 , b et $d\phi/dt$, on en déduit Ω_T .

c) Référentiel local

On peut aussi éviter d'introduire la force supplémentaire de Coriolis en cherchant un référentiel local adapté, précisément celui \mathcal{R}' en rotation par rapport à \mathcal{R} , tel que le vecteur vitesse de rotation de ce dernier par rapport à \mathcal{R}_g soit compensé par le vecteur vitesse de rotation de \mathcal{R}' par rapport à \mathcal{R} (Fig. 7.13). Il vient, d'après la composition des vecteurs vitesse de rotation :

$$\boldsymbol{\Omega}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}_g} = \boldsymbol{\Omega}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}} + \boldsymbol{\Omega}_{\mathcal{R}/\mathcal{R}_g} = \mathbf{0} \quad \text{d'où} \quad \boldsymbol{\Omega}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}} = -\boldsymbol{\Omega}_{\mathcal{R}/\mathcal{R}_g} = -\boldsymbol{\Omega}_T$$

Il en résulte que les vecteurs de base de \mathcal{R}' coïncident avec ceux de \mathcal{R}_g : ces deux référentiels sont en translation l'un par rapport à l'autre, mais \mathcal{R}' n'est pas galiléen, car son origine O est en mouvement accéléré par rapport à \mathcal{R}_g .

Localement, la compensation de la rotation de \mathcal{R} par rapport à \mathcal{R}_g ne concerne que la composante verticale de cette rotation :

$$\boldsymbol{\Omega}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}} \cdot \mathbf{e}_z = -\Omega_T \cos \theta \mathbf{e}_z = -\Omega_T \sin \lambda \mathbf{e}_z$$

Bien que non galiléen, \mathcal{R}' présente localement des propriétés de simplicité, analogues à celles de \mathcal{R}_g , puisque la loi fondamentale de la dynamique dans ce référentiel s'écrit simplement :

$$m \mathbf{a}_{A/\mathcal{R}'} = m \mathbf{g} + \mathbf{F}_T$$

La solution générale de l'évolution de l'angle α , que fait la direction du pendule \mathbf{SA} avec la verticale descendante, est alors : $\alpha(t) = C_1 \cos(\omega_0 t) + C_2 \sin(\omega_0 t)$, C_1 et C_2 étant deux constantes déterminées par les conditions initiales. Si x' et y' sont les coordonnées de A dans le plan horizontal, on a, en utilisant la notation complexe, la relation suivante, avec les coordonnées correspondantes x et y dans \mathcal{R} :

$$\underline{\zeta} = x + iy = \exp(-i\Omega_T \cos \theta t) \zeta' \quad \text{avec} \quad \underline{\zeta}' = (x' + iy')$$

d) Déphasage géométrique

L'analyse précédente montre que, dans le référentiel terrestre \mathcal{R} , apparaît un terme de phase, d'expression $\exp(-i\Omega_T \cos \theta t)$, qui ne s'annule pas après un tour complet de la Terre, mais vaut :

$$\exp\left(-i\Omega_T \cos \theta \times \frac{2\pi}{\Omega_T}\right) = \exp(-i2\pi \cos \theta)$$

Cette différence de phase est celle que l'on observerait entre deux pendules de Foucault synchronisés, excités au même endroit et dans les mêmes conditions, mais à 24 h d'intervalle de temps.

Retenons qu'après 24 h, le pendule présente une différence de phase de nature géométrique égale à $-2\pi \cos \theta$. En ajoutant 2π , ce qui est légitime puisque les angles sont définis à 2π près, on trouve $2\pi(1 - \cos \theta)$, c'est-à-dire l'angle solide défini par le mouvement de la verticale Oz au cours d'une rotation complète de la Terre (Fig. 7.14). Cet angle solide est le flux du champ \mathbf{r}/r^3 , avec $\mathbf{r} = \mathbf{CO}$, lequel est proportionnel au champ de gravitation, à travers la calotte terrestre supposée sphérique que découpe ce vecteur au cours du mouvement de rotation de la Terre.

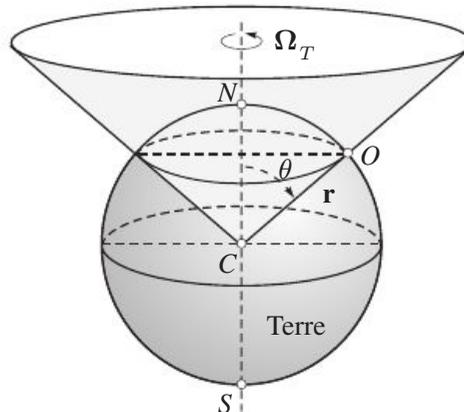


FIG. 7.14.

IV.3. — Déviation vers l'est lors d'une chute libre

Au cours d'une chute libre, la force occasionnelle \mathbf{F}_{oc} , qui apparaît dans l'expression de la loi fondamentale, est nulle. Il vient donc :

$$m\mathbf{a}_{A/\mathcal{R}} = m\mathbf{g} - 2m\boldsymbol{\Omega}_T \times \mathbf{v}_{A/\mathcal{R}}$$

À l'aide de la figure 7.15a représentant le vecteur $\boldsymbol{\Omega}_T$ dans \mathcal{R} , il est facile de voir, qualitativement, que la force de Coriolis est toujours dirigée vers l'est puisque $\boldsymbol{\Omega}_T$ est porté par l'axe Tz_0 et \mathbf{v} est dirigé initialement suivant la verticale descendante $-Oz$.

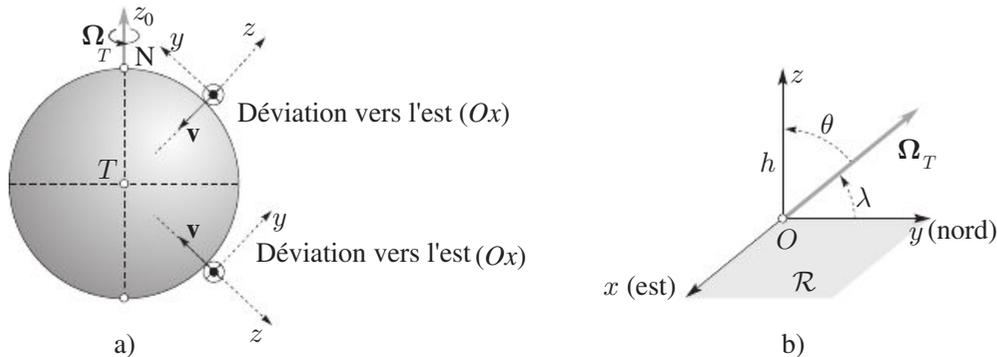


FIG. 7.15.

Comme $\mathbf{v}_{A/\mathcal{R}} \approx -gt\mathbf{e}_z$, il vient, en substituant et en simplifiant :

$$\mathbf{a}_{A/\mathcal{R}} \approx \mathbf{g} + 2g\Omega_T t \mathbf{e}_x$$

Pour obtenir le déplacement vers l'est, projetons cette relation vectorielle selon \mathbf{e}_x . On trouve (Fig. 7.15b).

$$a_x \approx 2gt\Omega_T \cos \lambda \quad \text{d'où} \quad v_x \approx gt^2\Omega_T \cos \lambda \quad \text{et} \quad x \approx \frac{gt^3\Omega_T \cos \lambda}{3}$$

On trouve le déplacement x_h en fin de chute, en remplaçant la durée de chute t_h par la valeur qu'en donne l'équation approchée $h \approx gt_h^2/2$:

$$x_h \approx \left(\frac{8h^3}{9g} \right)^{1/2} \Omega_T \cos \lambda$$

La première expérience sur la déviation vers l'est a été tentée sans succès par l'astronome français J. Cassini, dans un puits de l'Observatoire de Paris. Elle a été refaite de nombreuses fois, en 1831, par l'ingénieur allemand F. Reich, dans un puits de mine de Freiberg ($\lambda = 51^\circ$), de profondeur 158 m ; alors que la théorie prévoyait une valeur de 27,5 mm, les valeurs expérimentales étaient comprises entre 27,9 mm et 28,7 mm.

En 1903, Flammarion l'a refaite avec des billes d'acier abandonnées du haut de la coupole du Panthéon ($h = 68$ m, $\lambda = 48^\circ 51'$) ; la durée approximative de chute était de 3,72 s. Expérimentalement, il a trouvé 7,6 mm, alors que la valeur théorique attendue était $x \approx 8$ mm.

V. — RÉFÉRENTIELS ACCÉLÉRÉS PAR RAPPORT À LA TERRE

Nous avons vu que, pour tout corps situé au voisinage de la surface de la Terre, et ayant une vitesse inférieure à $700 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$, on pouvait considérer le référentiel terrestre comme un très bon référentiel galiléen, pourvu que l'on remplace le champ de gravitation \mathcal{G} par le champ de pesanteur \mathbf{g} .