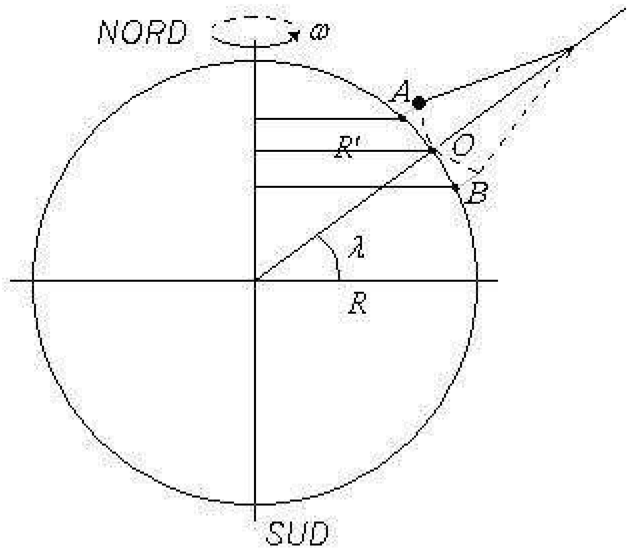
Le pendule de Foucault : Théorie rapide

Cette partie a pour but d'expliquer de manière simple, pour les moins courageux d'entre vous le phénomène de rotation de l'axe des oscillations du pendule de Foucault, et montre aussi pourquoi cette expérience est la preuve que la Terre tourne sur elle-même.

1 – Vitesse d'un point à la surface de la Terre

1 – a – Vitesse du point d'équilibre du pendule



Plaçons-nous à la surface de la Terre au point O sur le schéma : nous avons l'impression d'être immobiles mais en réalité nous tournons d'Ouest en Est autour de l'axe de rotation de la Terre, entraînés par celle-ci. Dans le référentiel géocentrique (lié au centre de la Terre), notre **vitesse angulaire** (en rad/s) est la même où que nous nous placions, mais notre **vitesse linéaire** (en m/s) dépend de la distance qui nous sépare de l'axe de rotation de la Terre, axe Nord-Sud.

Connaissant notre latitude λ nous pouvons déterminer R', notre distance à l'axe par la trigonométrie :

$$R' = R.\cos\lambda$$

(R étant le rayon de la Terre)

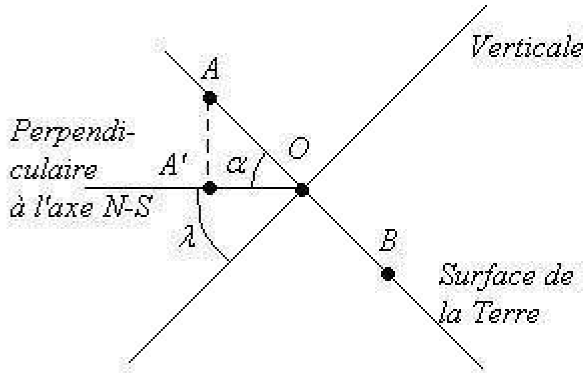
On peut donc calculer la vitesse linéaire Vo du point O :

$$Vo = \omega.R'$$

$$Vo = \omega.R.\cos\lambda$$

Ainsi, quand le pendule est en équilibre en O, il possède une vitesse Vo d'Ouest en Est.

1 – b – Vitesses des points A et B.



Calculons maintenant les vitesses des points A et B, projetés sur la surface de la Terre des points extrêmes correspondant à l'amplitude des oscillations du pendule. On considère cette amplitude constante, et on considère comme plan le mouvement du pendule : la distance OA ou OB vaut donc L. Par trigonométrie, on trouve que la distance OA', avec A' projeté orthogonal de A sur la perpendiculaire à l'axe N-S passant par O, vaut :

$$OA' = L.\cos\alpha \quad \textbf{avec} \quad \alpha = \frac{\pi}{2} - \lambda$$

Le point A se situe donc à la distance R'a de l'axe de rotation de la Terre telle que :

$$R'a = R' - OA'$$

$$R'a = R' - L.\cos\left(\frac{\pi}{2} - \lambda\right)$$

$$\text{soit } R'a = R' - L.\sin\lambda$$

Passons maintenant aux vitesses linéaires : A a pour vitesse Va telle que :

$$Va = R'a.\omega$$

$$Va = (R' - L.\sin\lambda).\omega$$

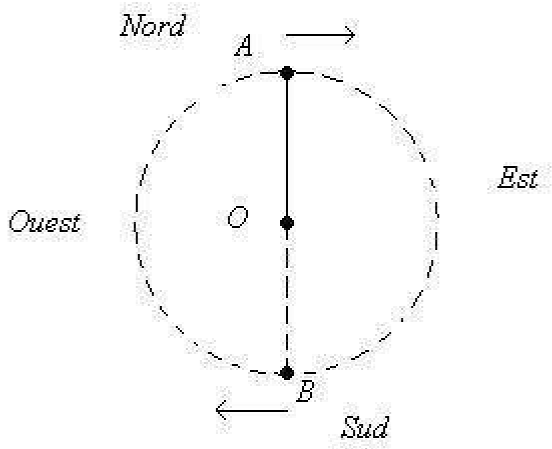
$$Va = R'.\omega - L.\sin\lambda.\omega$$

$$Va = Vo - L.\sin\lambda.\omega$$

De même, le point B, situé plus au Sud a une vitesse Vb telle que :

$$Vb = Vo + L.\sin\lambda.\omega$$

2 – Ce qui se passe quand on lance le pendule



Lâchons le pendule selon la direction Nord-Sud, il oscille au début selon cette direction mais son axe d'oscillations va se décaler progressivement et faire un tour complet. En effet, le pendule, lorsqu'il est lancé à partir du point O, possède une vitesse Vo dans le référentiel géocentrique. Arrivant à hauteur du point A, comme Vo est supérieure à Va, le pendule aura, par rapport à un observateur fixe au point A, une certaine vitesse V vers l'Est :

$$V = V_o - V_a$$
$$V = L.\sin\lambda.\omega$$

De même, quand le pendule arrive en B, la vitesse de B étant supérieure à celle de O dans le référentiel géocentrique, le pendule aura une vitesse vers l'Ouest par rapport à un observateur fixe en B, de même valeur que V.

Le plan des oscillations du pendule tourne, pour cette raison, dans le sens des aiguilles d'une montre (ici nous nous sommes placés dans l'hémisphère Nord. Si nous nous étions placés dans l'hémisphère Sud, ce serait dans le sens contraire).

3 – Détermination de la période de rotation du plan d'oscillations.

Pour simplifier les choses, on suppose la vitesse angulaire de rotation du plan d'oscillations du pendule constante (il faudrait le démontrer), par rapport à un observateur terrestre, de norme Ω.
Le pendule en arrivant en A, situé à une distance L de l'axe de rotation (on parle de la rotation du pendule, pour un observateur terrestre) possède donc une vitesse vers l'Ouest de norme :

$$V = L.\Omega$$

or V=L.sinλ.ω, donc la vitesse angulaire de rotation du plan d'oscillations du pendule est :

$$\Omega = \sin\lambda.\omega$$

On détermine ainsi la période de rotation T (en heures) du plan d'oscillations par la relation :

$$\Omega = \frac{2\pi}{T}$$

La période de rotation de la Terre étant 24h, on a :

$$\omega = \frac{2\pi}{24}$$

d'où :

$$\frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{24} \cdot \sin\lambda$$

$$\frac{1}{T} = \frac{\sin\lambda}{24}$$

$$\boxed{\text{soit enfin : } T = \frac{24}{\sin\lambda}}$$

4 – Applications numériques :

A Lille, par exemple, nous sommes à une latitude de 50.5° Nord,
le plan d'oscillations du pendule effectuera un tour sur lui-même en 31 h environ.

A l'équateur, la latitude étant nulle, la période de rotation du pendule serait théoriquement infinie, autrement dit, on n'observe pas le phénomène de rotation du pendule de Foucault.

Si nous nous plaçons au pôle Nord, la latitude étant de 90°, le pendule effetuerait un tour sur lui-même en 24 h : c'est la vitesse de rotation la plus importante que nous pourrions trouver sur Terre (avec le pôle Sud, évidemment).