

05/02/2024

ELEMENTS DE MECANIQUE RELATIVISTE ET QUANTIQUE

1/ à la recharge des intégrales premières pour le problème des 3 corps .

2/ Infos sur la mécanique de Lagrange .

Je pense qu'une piste est caché par la : $vitesse = \frac{p}{m} = \frac{dE}{dp}$

$$\rightarrow p dp = m(E) dE$$

$$\int p dp = \int m(E) dE$$

On choisit l'énergie et on calcul les primitives se qui donne une sorte de nouvelles équation pour la mécanique .

Exemple relativiste : $E = \gamma m_0 c^2 = Mc^2 \rightarrow M(E) = \frac{E}{c^2}$

$$\int p dp = \frac{1}{2} p^2 + \alpha_1 \quad \& \quad \int M(E) dE = \frac{1}{2c^2} E^2 + \alpha_2$$

$$\rightarrow \frac{1}{2} p^2 + \alpha_1 = \frac{1}{2c^2} E^2 + \alpha_2$$

$$\rightarrow 2(\alpha_1 - \alpha_2) c^2 = E^2 - (pc)^2$$

$$\rightarrow E^2 = 2(\alpha_1 - \alpha_2) c^2 + (pc)^2 .$$

On considère le centre de masse du référentiel R' qui se trouve au repos et on écrit l'énergie relativiste total c'est a dire celle qui prend en compte la vibration microscopique (1) et celle sans cette énergie quantique (1) et on

compare :

$$(1) \quad E^2 = (m_0 c^2)^2 + (pc)^2 - (p'c)^2$$

$$(2) \quad E^2 = (m_0 c^2)^2 + (pc)^2$$

Sans vibration quantique du centre de masse M' en mouvement de translation à vitesse constante

$$(m_0 c^2)^2 + (pc)^2 = 2(\alpha_1 - \alpha_2)c^2 + (pc)^2$$

$$\rightarrow (m_0 c^2)^2 = 2(\alpha_1 - \alpha_2)c^2 \rightarrow (m_0^2 c^2)c^2 = 2(\alpha_1 - \alpha_2)c^2$$

$$\rightarrow (m_0^2 c^2) = 2(\alpha_1 - \alpha_2) \rightarrow m_0 c = \sqrt{2(\alpha_1 - \alpha_2)}$$

Ici on arrive pas à identifier les constantes d'intégration mais on a une relation entre l'énergie de masse non relativiste avec ses constantes .

En utilisant (1) sa donne :

$$(m_0 c^2)^2 + (pc)^2 - (p'c)^2 = 2(\alpha_1 - \alpha_2)c^2 + (pc)^2$$

$$\rightarrow (m_0 c^2)^2 - (p'c)^2 = 2(\alpha_1 - \alpha_2)c^2$$

$$\rightarrow (m_0^2 c^2 - p'^2)c^2 = 2(\alpha_1 - \alpha_2)c^2$$

$$\rightarrow m_0^2 c^2 - p'^2 = 2(\alpha_1 - \alpha_2)$$

$$\rightarrow \frac{1}{2}m_0^2 c^2 - \frac{1}{2}p'^2 = \alpha_1 - \alpha_2 \text{ ici je pense qu'on peut les identifier}$$

$$\rightarrow \alpha_1 = -\frac{1}{2}p'^2 = -\frac{1}{2}(\hbar k')^2 \quad \& \quad \alpha_2 = -\frac{1}{2}m_0^2 c^2 = -\frac{1}{2}m_0 E_0$$

En passant on écrit l'énergie relativiste avec la vibration quantique de masse dans le référentiel R'

$$E^2 = (pc)^2 + 2(\alpha_1 - \alpha_2)c^2 = (m_0c^2)^2 + (pc)^2 - (\hbar k'c)^2 .$$

On vérifie

$$2(\alpha_1 - \alpha_2)c^2 = (m_0c^2)^2 - (\hbar k'c)^2 = -(\hbar k'c)^2 + E_0^2 \text{ ok.}$$

Pour l'énergie **total** non relativiste d'une particule dans un potentiel on a

$$E = m_0c^2 + \frac{p^2}{2m_0} + U \rightarrow c^2 m_0^2 + (U - E)m_0 + \frac{p^2}{2} = 0 \rightarrow$$

$$m_0(E) = \frac{E - U \pm \sqrt{(E - U)^2 - 2(pc)^2}}{2c^2} .$$

Pour une particule libre $m_0(E) = \frac{E \pm \sqrt{(E)^2 - 2(pc)^2}}{2c^2}$

$$m_0(E) = \frac{E \pm \sqrt{(m_0c^2)^2 - (pc)^2}}{2c^2}$$

Pour l'énergie de Shrodinger dans un potentiel ça donne (non relativiste et sans énergie de masse) :

$$E = \frac{p^2}{2m_0} + U \rightarrow m_0(E) = \frac{p^2}{2(E - U)} .$$

Dans le cas ou le systeme ou la particule est libre

$$E = \frac{p^2}{2m_0} \rightarrow m_0(E) = \frac{p^2}{2E} \text{ ici on intègre pour voir un peut}$$

au plus simple $\int p dp = \int m(E) dE \rightarrow$

$$\frac{1}{2} p^2 + \alpha_1 = \frac{p^2}{2} \ln(\kappa E) + \alpha_2 \rightarrow [1 - \ln(\kappa E)] p^2 = 2(\alpha_2 - \alpha_1)$$

kappa est une constante inverse d'une énergie . Si l'intégral est du type intégral première alors les constantes d'intégrations sont des constantes du mouvement et elle ne "dépendent pas du temps " donc si on dérive par rapport au temps on a zéro et une équation :

$$\frac{d}{dt} [1 - \ln(\kappa E)] p^2 + 2(1 - \ln(\kappa E)) p \frac{dp}{dt} = 0$$

$$\rightarrow \frac{dp}{dt} = F = - \frac{\frac{d}{dt} [1 - \ln(\kappa E)] p}{2(1 - \ln(\kappa E))}$$

2/ Concernant la mécanique de Lagrange on a le Lagrangien et l'Hamiltonien qui fonctionnent aussi dans les équations de Lagrange , c'est la même , c'est juste le signe qui change dans le deuxième membre des équations de Lagrange .

Bon pour ceux qui comprennent rien à cette mécanique de Lagrange c'est pas grand chose à comprendre en fait . On part de la définition de la force

par Newton $F = m a = \frac{d p}{dt}$ (2ième principe fondamental de la

mécanique)

On définit ensuite le travail de la force de Newton par

$$w = \int \vec{F} \cdot d\vec{x} = F d \quad . \quad \text{ça}$$

donne la force directe qui dérive d'un potentiel d'énergie

$$F = \frac{d w}{d x} \quad \text{l'énergie mécanique du système est}$$

conservé et le travail w correspond à l'énergie potentielle qu'on peut remplacer par le Lagrangien puisque l'énergie cinétique dépend seulement

de la vitesse $w = L = E_c - E_p$. On a alors $\frac{d p}{d t} = \frac{d w}{d x}$.

D'un autre côté on sait aussi que $p = \frac{d}{d v} \left[\frac{1}{2} m v^2 \right] = \frac{d E_c}{d v}$ et que cette

dérivation peut très bien être utilisée sur le Lagrangien puisque l'énergie potentielle dépend seulement de l'espace x et du temps c'est à dire qu'on a

$$p = \frac{d L}{d v}.$$

Se qui fait en tout $\frac{d p}{d t} = \frac{d w}{d x} \rightarrow \frac{d}{d t} \left[\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \right] = \frac{\partial L}{\partial x}$. Comme il y a plusieurs variables spatiales on peut généraliser

$$\frac{d}{d t} \left[\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} \right] = \frac{\partial L}{\partial x_i} \quad \text{ou} \quad \frac{d}{d t} \left[\frac{\partial H}{\partial \dot{x}_i} \right] = - \frac{\partial H}{\partial x_i}$$

(H étant l'Hamiltonien, c'est l'énergie mécanique)

C'est les équations d'Euler-Lagrange, elles sont pratiques dans le sens où il suffit d'avoir l'énergie L ou H pour avoir automatiquement des bonnes équations du mouvement en exécutant les opérations indiquées par l'équation. Avec ça il faut compléter l'énergie avec une astuce qui consiste à utiliser λ avec la dimension de l'énergie et le rajouter sur L ou H pour représenter les contraintes sous forme d'une équation de la trajectoire spatiale ou autre. Le problème c'est qu'on n'a pas toujours ses contraintes donc ses équations de Lagrange ne servent seulement lorsque les contraintes sont bien définies.

$$L = E_c - E_p + \lambda f(x_i)$$

ici c'est la courbe d'évolution du système est donnée par l'équation des

contraintes $\lambda f(x_i) = 0$.

Résumé : La mécanique de Lagrange se résume aux équations

$$\frac{d}{dt} \left[\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} \right] = \frac{\partial L}{\partial x_i}$$

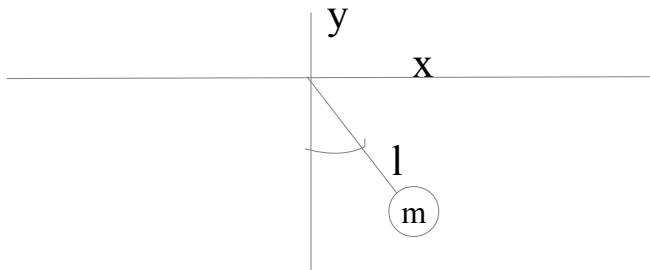
et au Lagrangien avec l'inconnue lambda lorsque vous avez l'équation des

contraintes en x_i : $L = E_c - E_p + \lambda f(x_i)$.

Si on fait le calculs général on trouve

$$\frac{d}{dt} \left[\frac{\partial E_c}{\partial \dot{x}_i} \right] = \frac{\partial [E_p + \lambda f(x_i)]}{\partial x_i}.$$

Pour l'exemple on va prendre le pendule il est exposé partout



$$E_c = \frac{1}{2} m (\dot{x}^2 + \dot{y}^2) \quad E_p = m g y \quad \lambda f(x_i) = \lambda (x^2 + y^2 - l^2) = 0$$

ça donne les équations

$$m \ddot{x} = 2 \lambda x, \quad m \ddot{y} = 2 \lambda y - m g \quad (x^2 + y^2 - l^2) = 0.$$

On identifie lambda $\lambda = \frac{m \ddot{x}}{2x}$ voir vers 1,15 mn ici dans la vidéo

pour les détails du calcul

<https://www.youtube.com/watch?v=BsYfbhpT1uo>

FB