24/04/2024

INFOS MECANIQUE DE LAGRANGE

Concernant la mécanique de Lagrange on a le Lagrangien et l'Hamiltonien qui focntione aussi dans les équations de Lagrange , c'est la même , c'est juste le signe qui change dans le deuxième membre des équation de Lagrange .

Bon pour ceux qui comprenent rien a cette mécanique de Lagrange c'est pas grand chose à comprendre en fait . On part de la définition de la force par Newton $F=m\,a=\frac{d\,p}{dt}$ (2ieme principe fondamental de la mécanique)

On défini ensuite le travail de la force de Newton par

$$w=\int \vec{F}\,.\vec{dx}=F\,d$$. ça

donne la force direct qui dérive d'un potentiel d'énergie

$$F=\frac{d\,w}{dx}$$ l'énergie mécanique du systeme est

consérvé et se travail w corespond à de l'énergie potentiel qu'on peut remplacer par le Lagrangien puisque l'énergie cinétique dépend seulement de la vitesse $w=L=E_c-E_p$. On a alors $\frac{d\,p}{dt}=\frac{d\,w}{dx}$.

D'un autre coté on sait aussi que $p=\frac{d}{d\,v}[\frac{1}{2}m\,v^2]=\frac{d\,E_c}{d\,v}$ et que cette dérivation peut très bien étre utilisé sur le Lagrangien puisque l'énergie potentiel dépend seulement de l'espace x et du temp c'est a dire qu'on a $p=\frac{d\,L}{d\,v}$.

Se qui fait en tout $\frac{d\,p}{dt}=\frac{d\,w}{dx} \rightarrow \frac{d}{dt}[\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}]=\frac{\partial L}{\partial x}$. Comme il y a plusieurs varoable spatial on peut généralisé

$$\frac{d}{dt}\left[\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i}\right]=\frac{\partial L}{\partial x_i} \quad \text{ou} \quad \frac{d}{dt}\left[\frac{\partial H}{\partial \dot{x}_i}\right]=-\frac{\partial H}{\partial x_i}$$

(H étant l'Hamiltonien , c'est l'énergie mécanique)

C'est les équations d'Euler-Lagrange, elle sont pratique dans le sens ou il suffit d'avoir l'énergie de L ou H pour avoir automatiquement des bonnes équations du mouvement en exécutant les opérations indiqué par l'équation . Avec ça il faut compléter l'énergie avec une astuce qui consiste à utilisé 0 avec la dimension de l'énergie et le rajouté sur L ou H pour représenter les contraintes sous forme d'une équation de la trajectoire spatial ou autre . Le problème c'est qu'on n'a pas toujour ses contraintes donc ses équations de Lagrange ne servent seulement lorsque les contraintes sont bien défini .

$$L=E_c-E_p+\lambda f(x_i)$$

ici c'est la courbe d'évolution du systeme est donén par l'équation des contraintes $\lambda f(x_i)=0$.

Résumé : La mécanique de Lagrange se résume aux équations

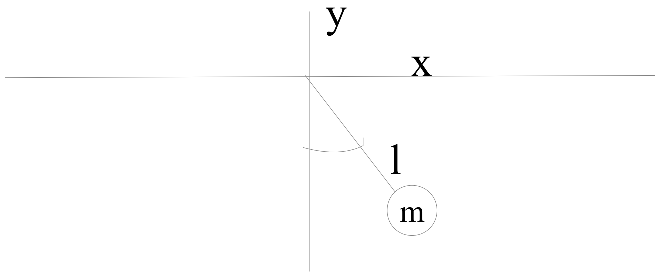
$$\frac{d}{dt}\left[\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i}\right]=\frac{\partial L}{\partial x_i}$$

et au Lagrangien avec l'inconue lamda lorsque vous avez l'équation des contraintes en x_i : $L=E_c-E_p+\lambda f(x_i)$.

Si on fait le calculs général on trouve

$$\frac{d}{dt}\left[\frac{\partial E_c}{\partial \dot{x}_i}\right]=\frac{\partial[E_p+\lambda f(x_i)]}{\partial x_i} \quad .$$

Pour l'exemple on va prendre le pendule il est exposé partout



$$E_c = \frac{1}{2} m \left(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 \right) \quad E_p = mg\, y \quad \lambda\, f(x_i) = \lambda \left(x^2 + y^2 - l^2 \right) = 0$$

ça donne les équations

$$m\, \ddot{x} = 2 \lambda\, x \ , \ \ m\, \ddot{y} = 2 \lambda\, y - m\, g \quad \left(x^2 + y^2 - l^2 \right) = 0 \ .$$

On identifie lambda $\lambda = \frac{m\, \ddot{x}}{2\, x}$ ….. voir vers 1,15 mn ici dans la vidéo pour les détails du calcul

https://www.youtube.com/watch?v=BsYfbhpT1uo
FB