

24/04/2024

## INFOS MECANIQUE DE LAGRANGE

Concernant la mécanique de Lagrange on a le Lagrangien et l'Hamiltonien qui fonctionnent aussi dans les équations de Lagrange, c'est la même, c'est juste le signe qui change dans le deuxième membre des équations de Lagrange.

Bon pour ceux qui comprennent rien à cette mécanique de Lagrange c'est pas grand chose à comprendre en fait. On part de la définition de la force

par Newton  $F = m a = \frac{d p}{d t}$  (2ième principe fondamental de la mécanique)

On définit ensuite le travail de la force de Newton par

$$w = \int \vec{F} \cdot d\vec{x} = F dx \quad \text{ça}$$

donne la force directe qui dérive d'un potentiel d'énergie

$$F = \frac{d w}{d x} \quad \text{l'énergie mécanique du système est}$$

conservé et le travail  $w$  correspond à la différence entre l'énergie cinétique et potentiel avec correspond à la différence de l'énergie cinétique et potentiel, c'est le Lagrangien  $w = L = E_c - E_p$ . On a donc

$$\frac{d p}{d t} = \frac{d w}{d x}$$

On sait aussi que  $p = \frac{d}{d v} \left[ \frac{1}{2} m v^2 \right] = \frac{d E_c}{d v}$  et que cette dérivation

peut très bien être utilisée sur le Lagrangien puisque l'énergie potentielle

dépend seulement de l'espace  $x$  et du temps c'est à dire qu'on a  $p = \frac{d L}{d v}$ .

Se qui fait en tout  $\frac{d p}{d t} = \frac{d w}{d x} \rightarrow \frac{d}{d t} \left[ \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \right] = \frac{\partial L}{\partial x}$ . Comme il y a

plusieurs variables spatiales on peut généraliser

$$\frac{d}{dt} \left[ \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} \right] = \frac{\partial L}{\partial x_i} \quad \text{ou} \quad \frac{d}{dt} \left[ \frac{\partial H}{\partial \dot{x}_i} \right] = - \frac{\partial H}{\partial x_i}$$

(H étant l'Hamiltonien, c'est l'énergie mécanique)

C'est les équations d'Euler-Lagrange, elles sont pratiques dans le sens où il suffit d'avoir l'énergie de L ou H pour avoir automatiquement des bonnes équations du mouvement en exécutant les opérations indiquées par l'équation. Avec ça il faut compléter l'énergie avec une astuce qui consiste à utiliser 0 avec la dimension de l'énergie et le rajouter sur L ou H pour représenter les contraintes sous forme d'une équation de la trajectoire spatiale ou autre. Le problème c'est qu'on n'a pas toujours ses contraintes donc ses équations de Lagrange ne servent seulement lorsque les contraintes sont bien définies.

$$L = E_c - E_p + \lambda f(x_i)$$

ici c'est la courbe d'évolution du système est donnée par l'équation des contraintes  $\lambda f(x_i) = 0$ .

Résumé : La mécanique de Lagrange se résume aux équations

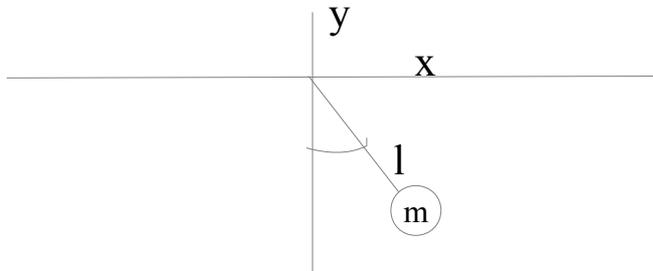
$$\frac{d}{dt} \left[ \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} \right] = \frac{\partial L}{\partial x_i}$$

et au Lagrangien avec l'inconnue lambda lorsque vous avez l'équation des contraintes en  $x_i$  :  $L = E_c - E_p + \lambda f(x_i)$ .

Si on fait les calculs généraux on trouve

$$\frac{d}{dt} \left[ \frac{\partial E_c}{\partial \dot{x}_i} \right] = \frac{\partial [E_p + \lambda f(x_i)]}{\partial x_i} .$$

Pour l'exemple on va prendre le pendule il est exposé partout



$$E_c = \frac{1}{2} m (\dot{x}^2 + \dot{y}^2) \quad E_p = m g y \quad \lambda f(x_i) = \lambda (x^2 + y^2 - l^2) = 0$$

ça donne les équations

$$m \ddot{x} = 2 \lambda x \quad , \quad m \ddot{y} = 2 \lambda y - m g \quad (x^2 + y^2 - l^2) = 0 .$$

On identifie lambda  $\lambda = \frac{m \ddot{x}}{2 x}$  ..... voir vers 1,15 mn ici dans la vidéo

pour les détails du calcul

<https://www.youtube.com/watch?v=BsYfbhpT1uo>

FB