05/02/2024

ELEMENTS DE MECANIQUE RELATIVISTE ET QUANTIQUE

1/ à la recharge des intégrales premières pour le problème des 3 corps .
2/ Infos sur la mécanique de Lagrange .

Je pense qu'une piste est caché par la : $vitesse=\frac{p}{m}=\frac{dE}{dp}$

$$\rightarrow \quad p\,dp=m(E)\,dE$$

$$\int p\,dp=\int m(E)\,dE$$

On choisit l'énergie et on calcul les primitives se qui donne une sorte de nouvelles équation pour la mécanique .

Exemple relativiste : $E=\gamma m_0 c^2=Mc^2 \rightarrow M(E)=\frac{E}{c^2}$

$$\int p\,dp=\frac{1}{2}p^2+\alpha_1 \ \& \ \int M(E)\,dE=\frac{1}{2c^2}E^2+\alpha_2$$

$$\rightarrow \quad \frac{1}{2}p^2+\alpha_1=\frac{1}{2c^2}E^2+\alpha_2$$

$$\rightarrow \quad 2(\alpha_1-\alpha_2)c^2=E^2-(pc)^2$$

$$\rightarrow \quad E^2=2(\alpha_1-\alpha_2)c^2+(pc)^2 \ .$$

On considère le centre de masse du référentiel R' qui se trouve au repos et on écrit l'énergie relativiste total c'est a dire celle qui prend en compte la vibration microscopique (1) et celle sans cette énergie quantique (1) et on compare :

(1) $E^2=(m_0c^2)^2+(pc)^2-(p'c)^2$

(2) $E^2=(m_0c^2)^2+(pc)^2$

Sans vibration quantique du centre de masse M' en mouvement de translation à vitesse constante

$$(m_0c^2)^2+(pc)^2=2(\alpha_1-\alpha_2)c^2+(pc)^2$$

$$\rightarrow \quad (m_0c^2)^2=2(\alpha_1-\alpha_2)c^2 \quad \rightarrow \quad (m_0^2c^2)c^2=2(\alpha_1-\alpha_2)c^2$$

$$\rightarrow \quad (m_0^2c^2)=2(\alpha_1-\alpha_2) \quad \rightarrow \quad m_0c=\sqrt{2(\alpha_1-\alpha_2)}$$

Ici on arrive pas à identifié les constantes d'intégration mais on a une relation entre l'énergie de masse non relativiste avec ses constantes .

En utilisant (1) sa donne :

$$(m_0c^2)^2+(pc)^2-(p'c)^2=2(\alpha_1-\alpha_2)c^2+(pc)^2$$

$$\rightarrow \quad (m_0c^2)^2-(p'c)^2=2(\alpha_1-\alpha_2)c^2$$

$$\rightarrow \quad (m_0^2c^2-p'^2)c^2=2(\alpha_1-\alpha_2)c^2$$

$$\rightarrow \quad m_0^2c^2-p'^2=2(\alpha_1-\alpha_2)$$

$\rightarrow \quad \frac{1}{2}m_0^2c^2-\frac{1}{2}p'^2=\alpha_1-\alpha_2$ ici je pense qu'on peut les identifié

$$\rightarrow \quad \alpha_1=-\frac{1}{2}p'^2=-\frac{1}{2}(\hbar k')^2 \quad \& \quad \alpha_2=-\frac{1}{2}m_0^2c^2=-\frac{1}{2}m_0E_0$$

En passant on écrit l'énergie relativiste avec la vibration quantique de masse dans le référentiel R'

$$E^2=(pc)^2+2(\alpha_1-\alpha_2)c^2=(m_0c^2)^2+(pc)^2-(\hbar k'c)^2 \ .$$

On vérifie

$$2(\alpha_1-\alpha_2)c^2=(m_0c^2)^2-(\hbar k'c)^2=-(\hbar k'c)^2+E_0^2 \text{ ok} .$$

Pour l'énergie **total** non relativiste d'une particule dans un potentiel on a

$$E=m_0c^2+\frac{p^2}{2\mathrm{m}_0}+U \ \rightarrow\ c^2m_0^2+(U-E)m_0+\frac{p^2}{2}=0 \ \rightarrow$$

$$m_0(E)=\frac{E-U\pm\sqrt{(E-U)^2-2(pc)^2}}{2\mathrm{c}^2} \ .$$

Pour une particule libre $m_0(E)=\dfrac{E\pm\sqrt{(E)^2-2(pc)^2}}{2\mathrm{c}^2}$

$$m_0(E)=\frac{E\pm\sqrt{(m_0c^2)^2-(pc)^2}}{2\mathrm{c}^2}$$

Pour l'énergie de Shrodinger dans un potentiel ça donne (non relativviste et sans énergie de masse) :

$$E=\frac{p^2}{2\mathrm{m}_0}+U \ \rightarrow\ m_0(E)=\frac{p^2}{2(E-U)} \ .$$

Dans le cas ou le systeme ou la particule est libre

$E=\dfrac{p^2}{2\mathrm{m}_0} \ \rightarrow\ m_0(E)=\dfrac{p^2}{2E}$ ici on intégre pour voir un peut au plus simple $\int p\,dp = \int m(E)\,dE \rightarrow$

$$\frac{1}{2}p^2 + \alpha_1 = \frac{p^2}{2}\ln(\kappa E) + \alpha_2 \rightarrow [1 - \ln(\kappa E)]\,p^2 = 2(\alpha_2 - \alpha_1)$$

kappa est une constante inverse d'une énergie . Si l'intégral est du type intégral première alors les constantes d'intégrations sont des constantes du mouvement et elle ne "dépendent pas du temp " donc si on dérive par rapport au temp on a zéro et une équation :

$$\frac{d}{dt}[1 - \ln(\kappa E)]\,p^2 + 2(1 - \ln(\kappa E))\,p\frac{dp}{dt} = 0$$

$$\rightarrow \frac{dp}{dt} = F = -\frac{\frac{d}{dt}[1 - \ln(\kappa E)]\,p}{2(1 - \ln(\kappa E))}$$

2/ Concernant la mécanique de Lagrange on a le Lagrangien et l'Hamiltonien qui focntione aussi dans les équations de Lagrange , c'est la même , c'est juste le signe qui change dans le deuxième membre des équation de Lagrange .

Bon pour ceux qui comprenent rien a cette mécanique de Lagrange c'est pas grand chose à comprendre en fait . On part de la définition de la force par Newton $F = m\,a = \frac{d\,p}{dt}$ (2ieme principe fondamental de la mécanique)

On défini ensuite le travail de la force de Newton par

$$w = \int \vec{F}\,.\,\vec{dx} = F\,d$$. ça

donne la force direct qui dérive d'un potentiel d'énergie

$F=\frac{dw}{dx}$ l'énergie mécanique du systeme est consérvé et se travail w corespond a la différence entre l'énergie cinétique et potentiel avec corespond a la différence de l'énergie cinétique et potentiel , c'est le Lagrangien $w=L=E_c-E_p$. On a donc $\frac{dp}{dt}=\frac{dw}{dx}$.

On sait aussi que $p=\frac{d}{dv}[\frac{1}{2}mv^2]=\frac{dE_c}{dv}$ et que cette dérivation peut très bien étre utilisé sur le Lagrangien puisque l'énergie potentiel dépend seulement de l'espace x et du temp c'est a dire qu'on a $p=\frac{dL}{dv}$.

Se qui fait en tout $\frac{dp}{dt}=\frac{dw}{dx} \rightarrow \frac{d}{dt}[\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}]=\frac{\partial L}{\partial x}$. Comme il y a plusieurs varoable spatial on peut généralisé

$$\frac{d}{dt}[\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i}]=\frac{\partial L}{\partial x_i} \quad \text{ou} \quad \frac{d}{dt}[\frac{\partial H}{\partial \dot{x}_i}]=-\frac{\partial H}{\partial x_i}$$

(H étant l'Hamiltonien , c'est l'énergie mécanique)

C'est les équations d'Euler-Lagrange, elle sont pratique dans le sens ou il suffit d'avoir l'énergie de L ou H pour avoir automatiquement des bonnes équations du mouvement en exécutant les opérations indiqué par l'équation . Avec ça il faut compléter l'énergie avec une astuce qui consiste à utilisé 0 avec la dimension de l'énergie et le rajouté sur L ou H pour représenter les contraintes sous forme d'une équation de la trajectoire spatial ou autre . Le problème c'est qu'on n'a pas toujour ses contraintes donc ses équations de Lagrange ne servent seulement lorsque les contraintes sont bien défini .

$$L=E_c-E_p+\lambda f(x_i)$$

ici c'est la courbe d'évolution du systeme est donén par l'équation des contraintes $\lambda f(x_i)=0$.

Résumé : La mécanique de Lagrange se résume aux équations

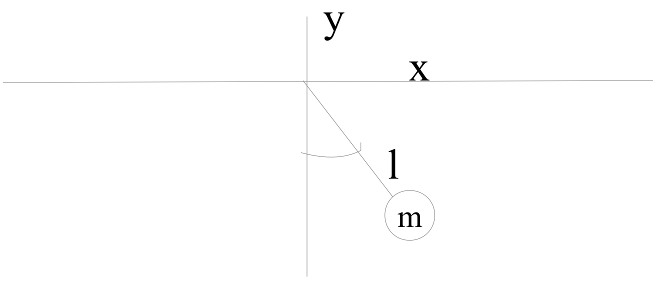
$$\frac{d}{dt}[\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i}]=\frac{\partial L}{\partial x_i}$$

et au Lagrangien avec l'inconue lamda lorsque vous avez l'équation des contraintes en x_i : $L=E_c-E_p+\lambda f(x_i)$.

Si on fait le calculs général on trouve

$$\frac{d}{dt}[\frac{\partial E_c}{\partial \dot{x}_i}]=\frac{\partial[E_p+\lambda f(x_i)]}{\partial x_i} \quad .$$

Pour l'exemple on va prendre le pendule il est exposé partout



$$E_c=\frac{1}{2}m(\dot{x}^2+\dot{y}^2) \quad E_p=mg\,y \quad \lambda f(x_i)=\lambda(x^2+y^2-l^2)=0$$

ça donne les équations

$$m\ddot{x}=2\lambda x \;,\; m\ddot{y}=2\lambda y-mg \quad (x^2+y^2-l^2)=0 \; .$$

On identifie lambda $\lambda=\frac{m\ddot{x}}{2x}$ ….. voir vers 1,15 mn ici dans la vidéo pour les détails du calcul

https://www.youtube.com/watch?v=BsYfbhpT1uo

FB