

## DYNAMIQUE DES SYSTÈMES

## IX.1. TORSEUR DES FORCES EXTÉRIEURES (CAS D'UN SYSTÈME DE PARTICULES).

a) *Forces intérieures. Forces extérieures.* Soit un ensemble  $\Sigma$  de  $n$  particules interagissant entre elles et avec les systèmes matériels  $\Sigma'$  extérieurs à l'ensemble (milieu extérieur). Les forces d'interaction des différentes particules entre elles constituent les *forces intérieures* au système  $\Sigma$ . Les forces décrivant l'action du milieu extérieur  $\Sigma'$  sur l'ensemble  $\Sigma$  sont dites *extérieures* à  $\Sigma$ . La distinction entre forces extérieures et forces intérieures a déjà été introduite aux § III.7 et III.8.)

b) *Torseur des forces extérieures.* Soit  $\vec{f}_i$  la force d'origine *extérieure* agissant sur la particule  $i$  de l'ensemble ( $i = 1, 2, \dots, n$ ). A l'instant  $t$ , les différentes particules appartenant à  $\Sigma$  sont situées aux points  $M_1, M_2, \dots, M_i, \dots, M_n$ .

A l'ensemble des forces extérieures  $\vec{f}_i$ , on associe le torseur des forces extérieures  $\mathcal{F}_{ext}$ , défini à chaque instant par sa somme (ou résultante) :

$$\vec{F} = \sum_i \vec{f}_i \quad (\text{IX.1})$$

et son moment résultant en un point  $O$  :

$$\vec{\mathcal{M}}_0 = \sum_i \vec{OM}_i \wedge \vec{f}_i \quad (\text{IX.2})$$

Les forces  $\vec{f}_i$ , donc le torseur  $\mathcal{F}_{ext}$ , sont indépendants du repère.

## IX.2. TORSEUR DES FORCES EXTÉRIEURES (CAS D'UN SYSTÈME QUELCONQUE).

Soit maintenant un système  $\Sigma$  quelconque : solide, milieu déformable solide ou fluide limité par une surface fermée  $\mathcal{S}$ . Nous postulerons que l'action mécanique exercée par le milieu extérieur  $\Sigma'$  sur le système  $\Sigma$ , peut être décrite à chaque instant par un torseur  $\mathcal{F}_{ext}$  indépendant du repère et dont nous allons préciser la forme.

a) *Somme ou résultante.* La somme  $\vec{F}$  du torseur  $\mathcal{F}_{ext}$  s'exprime par :

$$\vec{F} = \iint_{\tau} \vec{f}_v(M) d\tau + \iint_{\mathcal{S}} \vec{f}_s(M') dS \quad (\text{IX.3})$$

où  $d\tau$  est un élément de volume en un point  $M$  appartenant à  $\Sigma$  et  $dS$  un élément de surface en un point  $M'$  de  $\mathcal{S}$ . L'intégrale de volume est prise sur le volume limité par la surface fermée  $\mathcal{S}$ .

— la fonction  $\vec{f}_v(M)$  (exprimée en  $N m^{-3}$ ) est la *densité volumique* de force en  $M$ ;

— la fonction  $\vec{f}_s(M')$  (exprimée en  $N m^{-2}$ ) est la *densité superficielle* (ou surfacique) de force en  $M'$ .

Dans certains cas, on est amené à introduire également une densité linéaire de force  $\vec{f}_l(M)$  (exprimée en  $N m^{-1}$ ) de sorte que :

$$\vec{F} = \int \vec{f} dl \quad (dl : élément de longueur)$$

où l'intégrale est prise le long d'une courbe. C'est le cas, par exemple, en Électromagnétisme, lorsqu'on exprime les forces électromagnétiques s'exerçant sur un circuit filiforme (loi de Laplace).

Lorsque les densités sont très grandes au voisinage d'un point  $M$  et nulles ailleurs, on parle de forces *localisées* ponctuellement en  $M$ .

b) *Moment résultant.* Le moment résultant en  $O$  du torseur s'exprime par :

$$\vec{\mathcal{M}}_0 = \iint_{\tau} \vec{OM} \wedge \vec{f}_v(M) d\tau + \iint_{\mathcal{S}} \vec{OM}' \wedge \vec{f}_s(M') dS + \iint_{\tau} \vec{C}_v(M) d\tau. \quad (\text{IX.4})$$

La fonction  $\vec{C}_v(M)$  est appelée *densité volumique de couple* en  $M$ ; cette fonction n'intervient pas dans l'expression de la somme  $\vec{F}$ .

Les expressions (IX.3) et (IX.4) généralisent (IX.1) et (IX.2) relativement au cas d'un système de particules. La structure de torseur découle de (IX.3) et (IX.4) car on vérifie que :

$$\vec{\mathcal{M}}'_0 = \vec{\mathcal{M}}_0 + \vec{O}'O \wedge \vec{F}.$$

Les expressions (IX.3) et (IX.4) expriment de façon très générale le torseur  $\mathcal{F}_{ext}$  des forces exercées par le milieu extérieur sur le système. Dans le cas d'actions localisées en un point  $M'$  de la surface  $\mathcal{S}$ ,  $\vec{f}_s(M') dS$  garde un module fini lorsque l'élément de surface tend vers zéro. L'intégrale  $\iint_{\mathcal{S}} \vec{OM}' \wedge \vec{f}_s(M') dS$  est remplacée, dans ce cas, par :  $\vec{OM}' \wedge \vec{f} (\iint_{\mathcal{S}} \vec{f}_s dS \rightarrow \vec{f})$ .

*Couple.* Un torseur force est appelé *couple*, si sa somme  $\vec{F} = 0$ ; le moment  $\vec{\mathcal{M}}_0$  est alors indépendant de  $O$ . Souvent, on appelle également couple le moment  $\vec{\mathcal{M}} = \vec{C}$ .

*Exemple :* si  $\vec{f}_v = \vec{f}_s = 0$  en tout point, on a :  $\vec{F} = 0$  et :

$$\vec{\mathcal{M}}_0 = \vec{C} = \iint_{\tau} \vec{C}_v(M) d\tau$$

ce qui justifie pour  $\vec{C}_v(M)$  l'expression « *densité volumique de couple* ».

Les expressions (IX.3) et (IX.4) constituent un *modèle* de représentation de l'action mécanique exercée par le milieu extérieur sur le système. Dans le cadre de ce modèle, il faut chercher à expliciter les densités  $\vec{f}_v(M)$ ,  $\vec{f}_s(M)$ ,  $\vec{C}_v(M)$  par des *lois physiques* (voir § IX.4).

Il faut insister sur le fait que le torseur  $\mathcal{F}_{ext}$  n'est qu'une notion dérivée construite à partir des densités. C'est la connaissance des densités qui est fondamentale : elles décrivent l'action mécanique extérieure en *chaque point* du système, c'est-à-dire localement. La connaissance des densités caractérise « une *distribution de forces* ». Deux distributions de forces agissant sur un

système  $\Sigma$  sont dites équivalentes si leurs torseurs associés sont égaux. Cette équivalence ne présente véritablement d'intérêt que si le système  $\Sigma$  est un solide indéformable. Dans le cas de milieu déformable (solide ou fluide) cette équivalence est sans intérêt, car, en général, les actions locales des deux distributions de forces se traduiront par des effets différents.

### IX.3. ADDITIVITÉ DES FORCES.

Si plusieurs systèmes matériels  $\Sigma_1, \Sigma_2, \dots$  agissent simultanément sur le même système matériel  $\Sigma$ , il y a additivité en chaque point des densités  $\vec{f}_{iv}(M), \vec{f}_{is}(M), \vec{C}_{iv}(M)$  relatives à l'action de chacun des systèmes  $\Sigma_i$  sur  $\Sigma$ . De cette additivité locale des densités, il découle immédiatement l'additivité des torseurs, soit :

$$\mathcal{F}(\Sigma_1 + \Sigma_2 + \dots \rightarrow \Sigma) = \sum_i \mathcal{F}(\Sigma_i \rightarrow \Sigma) \quad (\text{IX.5})$$

ou encore :

$$\vec{F}(\Sigma_1 + \Sigma_2 + \dots \rightarrow \Sigma) = \sum_i \vec{F}(\Sigma_i \rightarrow \Sigma) \quad (\text{somme})$$

$$\vec{\mathcal{M}}_0(\Sigma_1 + \Sigma_2 + \dots \rightarrow \Sigma) = \sum_i \vec{\mathcal{M}}_0(\Sigma_i \rightarrow \Sigma) \quad (\text{moment résultant}).$$

### IX.4. EXEMPLES DE DISTRIBUTION DE FORCES.

Rappelons, sans détail, quelques lois physiques précisant des distributions de forces.

#### a) Densité volumique de forces.

• Forces de pesanteur :  $\vec{f}_v(M) = \mu(M)\vec{g}$  où  $\mu(M)$  est la masse volumique en  $M$  du système et  $\vec{g}$  l'intensité de la pesanteur supposée uniforme, d'où la somme (poids) :

$$\vec{F} = \iiint_{\tau} \mu(M) \vec{g} d\tau = \vec{g} \iiint_{\tau} \mu(M) d\tau = m \vec{g}$$

et le moment résultant en  $G$  (centre d'inertie) :

$$\vec{\mathcal{M}}_G = \iiint_{\tau} \vec{GM} \wedge \mu(M) \vec{g} d\tau = (\iiint_{\tau} \vec{GM} \mu(M) d\tau) \wedge \vec{g} = 0$$

car :

$$\iiint_{\tau} \mu(M) \vec{GM} d\tau = 0$$

Ceci montre que le torseur des forces de pesanteur est équivalent à une force unique  $\vec{F} = mg$  dont la ligne d'action passe par  $G$ .

• Forces électromagnétiques. Dans le cas d'un milieu conducteur (métal, plasma, ...) où la densité de courant en  $M$  est  $\vec{j}(M)$  et le champ magnétique  $\vec{B}(M)$ , la densité volumique de forces a pour expression :

$$\vec{f}_v(M) = \vec{j}(M) \wedge \vec{B}(M).$$

b) Densité volumique de couple. Pour une matière aimantée placée dans un champ magnétique, l'expérience conduit à admettre une densité volumique de couple :

$$\vec{C}_v(M) = \vec{J}(M) \wedge \vec{B}(M).$$

$\vec{J}(M)$  caractérise les propriétés de la matière aimantée en  $M$ . Cette grandeur est le moment magnétique par unité de volume en  $M$  ou intensité d'aimantation.

#### c) Densité superficielle de forces.

• Forces de pression électrostatique. Les forces électrostatiques s'exerçant sur un conducteur en équilibre électrostatique sont purement superficielles et la densité  $\vec{f}_s(M)$  a pour expression :

$$\vec{f}_s(M) = \frac{\sigma^2(M)}{2 \epsilon_0} \vec{u}$$

où  $\sigma(M)$  est la densité superficielle de charge en  $M$  et  $\vec{u}$  le vecteur unitaire en  $M$ , perpendiculaire à la surface et dirigé vers l'extérieur.

• Forces de pression exercée par un fluide. Un fluide exerce sur la surface d'un solide placé dans le fluide des forces de pression. La densité superficielle pour cette distribution de forces est donnée par :

$$\vec{f}_s(M) = -p(M) \vec{u}$$

$p(M)$  est la pression du fluide au point  $M$ . Le vecteur unitaire  $\vec{u}$  est perpendiculaire à la surface du solide en  $M$  et dirigé de l'intérieur du solide vers l'extérieur. Le signe — indique que contrairement au cas des forces de « pression » électrostatique, la force :

$$d\vec{f} = -p(M) \vec{u} dS$$

s'exerçant sur la surface  $dS$  du solide est dirigée du fluide vers le solide (force pressante).

#### d) Densité linéaire de forces.

Un cas typique est donné par la loi de Laplace qui exprime la force  $d\vec{f}$  exercée par un champ magnétique  $\vec{B}(M)$  sur un élément linéaire de conducteur  $dl$  placé en  $M$  et parcouru par le courant  $i$ . On a :

$$d\vec{f} = i dl \wedge \vec{B}(M)$$

d'où la somme  $\vec{F}$  pour la totalité du circuit :

$$\vec{F} = i \oint dl \wedge \vec{B}(M).$$

Si le champ  $\vec{B}(M)$  est uniforme :

$$\vec{F} = (i \oint dl) \wedge \vec{B} = 0 \quad \text{car} \quad \oint dl = 0.$$

Dans ce cas, la distribution des forces électromagnétiques est un couple dont le moment vaut :

$$\vec{C} = i \oint \vec{OM} \wedge [dl \wedge \vec{B}] = \vec{\mu} \wedge \vec{B}.$$

Le vecteur  $\vec{\mu}$  caractéristique du circuit est appelé moment magnétique du circuit (voir *Electricité I*, par J. P. SARMANT, p. 165-166).

### IX.5. LOI FONDAMENTALE DE LA DYNAMIQUE.

Nous considérons le mouvement d'un système matériel quelconque  $\Sigma_0$  relativement à un repère galiléen (S).  $\Sigma$  désigne une partie quelconque de  $\Sigma_0$ . Nous supposons que  $\Sigma$  n'échange pas de matière avec l'extérieur, c'est-à-dire que les différents éléments matériels qui définissent  $\Sigma$  restent les mêmes au cours du temps. Dans ces conditions,  $\Sigma$  est dit un *système fermé*. Nous examinerons au chapitre XI le cas où  $\Sigma$  échange de la matière avec l'extérieur (*système ouvert*).

Désignons par  $\mathcal{D}_{(S)}$  le torseur dynamique associé à  $\Sigma$  à chaque instant  $t$  dans le repère (S) et par  $\mathcal{F}_{ext}$  le torseur décrivant les *actions extérieures* qui s'exercent sur  $\Sigma$ . La loi fondamentale de la Dynamique s'énonce ainsi :

Pour toute partie fermée  $\Sigma$  d'un système matériel quelconque dont le mouvement est rapporté à un repère galiléen (S), le torseur dynamique  $\mathcal{D}_{(S)}$  associé à chaque instant  $t$  à  $\Sigma$  est égal au torseur des forces extérieures agissant sur  $\Sigma$ , soit :

$$\boxed{\mathcal{D}_{(S)} = \mathcal{F}_{ext}} \quad (\text{IX.6})$$

La relation (IX.6) se scinde en deux relations vectorielles exprimant l'égalité des sommes et l'égalité des moments résultants des deux torseurs :

- Égalité des sommes :

$$\boxed{m \vec{\gamma}(G)_{(S)} = \vec{F}} \quad (\text{IX.7})$$

$m$  désignant la masse de  $\Sigma$ . La relation (IX.7) exprime le *théorème du centre d'inertie*. Cette relation permet de déterminer le mouvement du centre d'inertie  $G$  du système  $\Sigma$ , comme s'il s'agissait d'une particule de masse  $m$  sur laquelle s'exercerait la force  $\vec{F}$ , somme des forces extérieures s'exerçant sur  $\Sigma$ .

- Égalité des moments résultants :

$$\boxed{\mathcal{D}_{0(S)} = \vec{M}_0} \quad (\text{IX.8})$$

Sous réserve que O soit fixe dans (S) ou que  $\vec{v}(O)_{(S)} / \vec{v}(G)_{(S)}$  donc en particulier si on choisit  $G$  pour point O, on a vu que (§ VII.4.b.) :

$$\boxed{\mathcal{D}_{0(S)} = \left( \frac{d\vec{\sigma}_{0(S)}}{dt} \right)_{(S)}}$$

où  $\vec{\sigma}_{0(S)}$  est le moment cinétique par rapport à O du système  $\Sigma$  dans le repère (S). La relation (IX.8) s'écrit ainsi :

$$\boxed{\left( \frac{d\vec{\sigma}_{0(S)}}{dt} \right)_{(S)} = \vec{M}_0} \quad (\text{IX.9})$$

où  $\vec{M}_0$  est le moment résultant en O des forces extérieures s'exerçant sur  $\Sigma$ .

La relation (IX.9) exprime le théorème du moment cinétique en O dans le repère galiléen (S).

Les relations (IX.7) et (IX.9) fournissent 6 équations différentielles du mouvement pour le système  $\Sigma$ , auquel il faut adjoindre les conditions initiales.

*Remarque.* Il convient d'insister sur le fait que les relations (IX.7) et (IX.9) sont indépendantes : le théorème du moment cinétique exprimé par (IX.9) n'est pas une conséquence du théorème du centre d'inertie exprimé par (IX.7). La Dynamique de la particule (étudiée au chapitre III) apparaît comme un cas particulier régi par la relation (IX.7) qui est, dans ce cas, suffisante (le théorème du moment cinétique n'étant alors, comme nous l'avons vu (§ III.5.b), qu'une conséquence de cette relation).

### IX.6. CAS DE LA STATIQUE.

La statique étudie les systèmes *au repos* relativement à un repère. La relation fondamentale (IX.6) s'écrit, dans ce cas, dans un repère galiléen (S) :

$$\boxed{\mathcal{D}_{(S)} = 0}$$

soit :

$$\boxed{\mathcal{F}_{ext} = 0 \rightarrow \begin{cases} \vec{F} = 0 \\ \vec{M}_0 = 0 \end{cases}} \quad (\text{IX.10})$$

Remarquons que la recherche des positions d'équilibre n'est pas un problème de statique, mais de Dynamique. En Statique, le système est supposé, à priori, au repos.

### IX.7. LE THÉORÈME DU MOMENT CINÉTIQUE DANS LE REPÈRE BARYCENTRIQUE.

Soit (B) le repère barycentrique du système  $\Sigma$ , relativement au repère galiléen (S). D'après le théorème de König appliqué en G :

$$\vec{\sigma}_{G(S)} = \vec{\sigma}_{(B)}$$

D'autre part, les dérivations vectorielles dans (B) et dans (S) se confondent puisque (B) est en mouvement de translation par rapport à (S). On a ainsi :

$$\boxed{\left( \frac{d\vec{\sigma}_{G(S)}}{dt} \right)_{(S)} = \left( \frac{d\vec{\sigma}_{G(S)}}{dt} \right)_{(B)} = \left( \frac{d\vec{\sigma}_{(B)}}{dt} \right)_{(B)}} \quad (\text{IX.11})$$

La relation (IX.9) écrite en G (théorème du moment cinétique en G dans le repère (S)) donne :

$$\boxed{\left( \frac{d\vec{\sigma}_{G(S)}}{dt} \right)_{(S)} = \vec{M}_G}$$

soit, d'après (IX.11) :

$$\left( \frac{d\vec{\sigma}_{(B)}}{dt} \right)_{(B)} = \vec{\mathcal{M}}_G \quad (\text{IX.12})$$

qui exprime le théorème du moment cinétique en G dans le repère barycentrique.  $\vec{\mathcal{M}}_G$  est le moment résultant en G des forces extérieures appliquées à  $\Sigma$ . Ce moment est indépendant du repère (invariance du torseur des forces dans un changement de repère quelconque).

Il est souvent plus commode d'exprimer le théorème du moment cinétique sous la forme barycentrique (IX.12) plutôt que sous la forme initiale (IX.9).

### IX.8. CHANGEMENTS DE REPÈRES.

Étudions comment se transforme la relation fondamentale (IX.6) dans un changement de repère.

a) *Changements de repères galiléens.* Le torseur dynamique reste invariant dans un changement de repère galiléen puisque les accélérations des différents points sont inchangées. Compte tenu de l'invariance des forces, la loi fondamentale s'exprime toujours par :

$$\mathcal{D}_{(s)} = \mathcal{F}_{ext}$$

qui garde ainsi la même forme dans tout repère galiléen : il y a *invariance* de la relation fondamentale dans un changement de repère galiléen.

b) *Changements de repères non galiléens.* Soit (R) un repère non galiléen et  $\mathcal{D}_{(R)}$  le torseur dynamique d'un système  $\Sigma$  dans ce repère. M étant un point appartenant à  $\Sigma$ , on a, en vertu du théorème de Coriolis :

$$\vec{\gamma}(M)_{(s)} = \vec{\gamma}(M)_{(R)} + \vec{\gamma}_e + \vec{\gamma}_c$$

$\vec{\gamma}_e$  et  $\vec{\gamma}_c$  étant respectivement l'accélération d'entraînement et l'accélération de Coriolis pour le point M. On en déduit, d'après la définition du torseur dynamique, la relation :

$$\mathcal{D}_{(s)} = \mathcal{D}_{(R)} + \mathcal{D}_e + \mathcal{D}_c$$

où  $\mathcal{D}_e$  et  $\mathcal{D}_c$  désignent respectivement les torseurs des quantités d'accélération construits avec  $\vec{\gamma}_e$  et  $\vec{\gamma}_c$ . Le calcul explicite de ces torseurs est, en général, compliqué.

La relation fondamentale :

s'écrit :

$$\mathcal{D}_{(s)} = \mathcal{F}_{ext}$$

soit :

$$\mathcal{D}_{(R)} + \mathcal{D}_e + \mathcal{D}_c = \mathcal{F}_{ext}$$

$$\mathcal{D}_{(R)} = \mathcal{F}_{ext} - \mathcal{D}_e - \mathcal{D}_c. \quad (\text{IX.13})$$

$\mathcal{F}_{ext}$  représente le torseur des forces extérieures appliquées à  $\Sigma$  (aussi bien dans le repère (R) que dans le repère (S)). Les termes  $-\mathcal{D}_e$  et  $-\mathcal{D}_c$  représentent respectivement les torseurs des forces d'inertie d'entraînement et des forces d'inertie de Coriolis.

La relation fondamentale n'est donc pas invariante dans un changement de repère non galiléen, à moins d'inclure les torseurs des forces d'inertie dans le torseur des forces extérieures. Mais comme nous l'a montré la discussion faite au paragraphe IV.10 sur la nature des forces d'inertie, celles-ci ont une signification particulière et il n'est pas satisfaisant dans le modèle de la mécanique classique, de les assimiler complètement aux autres forces.

### IX.9. THÉORÈME DE L'ACTION ET DE LA RÉACTION.

Considérons deux systèmes matériels  $\Sigma_1$  et  $\Sigma_2$ . Dans un repère (R) quelconque, la loi fondamentale appliquée à  $\Sigma_1$  s'écrit :

$$\mathcal{F}_{1ext} + \mathcal{F}(\Sigma_2 \rightarrow \Sigma_1) = \mathcal{D}_{1(R)} + \mathcal{D}_{1i} \quad (\text{IX.14})$$

$\mathcal{F}(\Sigma_2 \rightarrow \Sigma_1)$  désigne le torseur représentant l'action de  $\Sigma_2$  sur  $\Sigma_1$  et  $\mathcal{F}_{1ext}$  le torseur des autres forces extérieures agissant sur  $\Sigma_1$ .  $\mathcal{D}_{1i} = -\mathcal{D}_{1c} - \mathcal{D}_{1e}$  est le torseur des forces d'inertie relatives à  $\Sigma_1$ .

De même, pour  $\Sigma_2$ , la loi fondamentale dans (R) s'écrit :

$$\mathcal{F}_{2ext} + \mathcal{F}(\Sigma_1 \rightarrow \Sigma_2) = \mathcal{D}_{2(R)} + \mathcal{D}_{2i} \quad (\text{IX.15})$$

Pour le système  $\Sigma_1 + \Sigma_2$ , la loi fondamentale s'écrit :

$$\mathcal{F}_{1ext} + \mathcal{F}_{2ext} = \mathcal{D}_{(R)} + \mathcal{D}_i = \mathcal{D}_{1(R)} + \mathcal{D}_{2(R)} + \mathcal{D}_{1i} + \mathcal{D}_{2i} \quad (\text{IX.16})$$

L'interaction entre  $\Sigma_1$  et  $\Sigma_2$  n'intervient plus dans cette équation puisqu'il s'agit de forces *intérieures* au système  $\Sigma_1 + \Sigma_2$ . En comparant (IX.14), (IX.15) et (IX.16), on obtient :

$$\mathcal{F}(\Sigma_1 \rightarrow \Sigma_2) = -\mathcal{F}(\Sigma_2 \rightarrow \Sigma_1) \quad (\text{IX.17})$$

Cette égalité, *conséquence de la loi fondamentale*, exprime le théorème de l'action et de la réaction sous sa forme la plus générale.

La relation (IX.17) est équivalente aux deux relations vectorielles :

$$\begin{aligned} \vec{F}(\Sigma_1 \rightarrow \Sigma_2) &= -\vec{F}(\Sigma_2 \rightarrow \Sigma_1) \\ \vec{\mathcal{M}}_0(\Sigma_1 \rightarrow \Sigma_2) &= -\vec{\mathcal{M}}_0(\Sigma_2 \rightarrow \Sigma_1). \end{aligned}$$

*Conséquence : Le torseur des forces intérieures à un système est nul.*

Cette propriété découle directement de (IX.17) et de la définition des forces intérieures (qui décrivent les interactions des différentes parties du système considéré).

### IX.10. THÉORÈME DE L'ÉNERGIE CINÉTIQUE.

Nous généralisons au cas d'un solide, d'un système de solides, d'un système matériel quelconque, le théorème de la puissance cinétique (ou de l'énergie cinétique) établi au paragraphe III.6. pour une particule.

a) *Cas d'un solide.* Calculons la puissance cinétique  $\frac{dK(s)}{dt}$  d'un solide

(masse m) dans le repère galiléen (S). La formule (VIII.14) donne :

$$\frac{dK(s)}{dt} = m \vec{v}(G)_{(s)} \cdot \left( \frac{d\vec{v}(G)_{(s)}}{dt} \right)_{(s)} + \vec{\Omega}(t) \cdot \left( \frac{d\vec{\sigma}(B)}{dt} \right)_{(B)}$$

Compte tenu des relations (IX.7) et (IX.12), on obtient :

$$\frac{dK_{(s)}}{dt} = \vec{v}(G)_{(s)} \cdot \vec{F} + \vec{\Omega}(t) \cdot \vec{\mathcal{M}}_0. \quad (\text{IX.18})$$

Soit O un point quelconque lié au solide, on a :

$$\vec{v}(G)_{(s)} = \vec{v}(O)_{(s)} + \vec{\Omega}(t) \wedge \vec{OG}$$

et

$$\vec{\mathcal{M}}_0 = \vec{\mathcal{M}}_0 + \vec{R} \wedge \vec{OG}$$

où  $\vec{\Omega}(t)$  désigne le vecteur instantané de rotation du solide dans son mouvement par rapport au repère (S).

La formule (IX.18) peut donc encore s'écrire :

$$\boxed{\frac{dK_{(s)}}{dt} = \vec{v}(O)_{(s)} \cdot \vec{F} + \vec{\Omega}(t) \cdot \vec{\mathcal{M}}_0 = \mathcal{P}} \quad (\text{IX.19})$$

(IX.18) ou (IX.19) exprime le théorème de la *puissance cinétique* pour un solide. On notera que, dans ce cas, les forces intérieures n'interviennent pas. Le second membre de (IX.18) ou de (IX.19) définit la *puissance  $\mathcal{P}$*  des forces extérieures\*. L'expression de la puissance, dans le cas d'un solide, *ne fait intervenir que le torseur des forces extérieures*.

Si le solide est soumis à plusieurs distributions de forces extérieures décrites par les torseurs  $\mathcal{F}_i$ , la relation (IX.9) compte tenu de l'additivité des forces donne :

$$\frac{dK_{(s)}}{dt} = \sum_i \mathcal{P}_i$$

où  $\mathcal{P}_i$  est la puissance des forces  $\mathcal{F}_i$ .

La relation (X.19) donne, entre les instants  $t$  et  $t + dt$ ,

$$dK_{(s)} = \vec{F} \cdot \vec{v}(O)_{(s)} dt + \vec{\mathcal{M}}_0 \cdot \vec{\Omega}(t) dt = \mathcal{P} dt = \delta W \quad (\text{IX.20})$$

d'où, en intégrant entre deux instants  $t_1$  et  $t_2$  :

$$K_{(s)}(t_2) - K_{(s)}(t_1) = \int_{t_1}^{t_2} \vec{F} \cdot \vec{v}(O)_{(s)} dt + \int_{t_1}^{t_2} \vec{\mathcal{M}}_0 \cdot \vec{\Omega}(t) dt \quad (\text{IX.21})$$

(IX.20) et (IX.21) expriment le théorème de l'énergie cinétique pour le solide. L'intégrale du 2<sup>e</sup> membre de (IX.21) définit le travail  $W$  des forces extérieures agissant sur le solide entre les instants  $t_1$  et  $t_2$ , soit :

$$W = \int_{t_1}^{t_2} \delta W = \int_{t_1}^{t_2} \mathcal{P} dt = \int_{t_1}^{t_2} \vec{F} \cdot \vec{v}(O)_{(s)} dt + \int_{t_1}^{t_2} \vec{\mathcal{M}}_0 \cdot \vec{\Omega}(t) dt. \quad (\text{IX.22})$$

Examinons quelques cas particuliers.

1<sup>o</sup> *Solide en translation* ( $\vec{\Omega} = 0$ ). Dans ce cas :

$$\frac{dK_{(s)}}{dt} = \vec{V} \cdot \vec{F}$$

où  $\vec{V}$  est la vitesse de translation du solide. La formule est identique à celle

(\*). On vérifiera que la valeur de  $\mathcal{P}$  est indépendante du choix du point O.

de la particule. Le théorème de l'énergie cinétique entre l'instant  $t$  et l'instant  $t + dt$  s'écrit :

$$dK_{(s)} = \vec{F} \cdot \vec{V} dt = \vec{F} \cdot \vec{dr} = \delta W$$

où  $\vec{dr} = \vec{V} dt$  est le déplacement du solide pendant le temps  $dt$ . Par intégration, on obtient :

$$K_{(s)}(t_2) - K_{(s)}(t_1) = \int_{t_1}^{t_2} \vec{F} \cdot \vec{dr} = W \quad (\text{IX.23})$$

2<sup>o</sup> *Solide en rotation autour d'un axe fixe  $\Delta$* . On a, dans ce cas :

$$\vec{\Omega} = \omega \vec{k} \quad (\vec{k} : \text{vecteur unitaire de l'axe } \Delta)$$

et, en prenant O sur l'axe  $\Delta$ , (IX.19) s'écrit :

$$\frac{dK_{(s)}}{dt} = \vec{\Omega}(t) \cdot \vec{\mathcal{M}}_0 = \omega \vec{k} \cdot \vec{\mathcal{M}}_0 = \omega \mathcal{M}_\Delta \quad (\text{IX.24})$$

$\mathcal{M}_\Delta = \vec{k} \cdot \vec{\mathcal{M}}_0$  est le moment des forces extérieures par rapport à l'axe  $\Delta$ . La relation (IX.24) est importante en pratique. Cette relation donne :

$$dK_{(s)} = \mathcal{M}_\Delta \omega dt = \mathcal{M}_\Delta d\theta = \delta W \quad (\text{IX.25})$$

où  $d\theta = \omega dt$  est l'angle de rotation du solide entre l'instant  $t$  et l'instant  $t + dt$ . Par intégration entre les instants  $t_1$  et  $t_2$ , on obtient :

$$K_{(s)}(t_2) - K_{(s)}(t_1) = \int_{t_1}^{t_2} \mathcal{M}_\Delta d\theta = W \quad (\text{IX.26})$$

b) *Système de solides*. Soit maintenant un ensemble de  $n$  solides  $\Sigma_1, \Sigma_2, \dots, \Sigma_i, \dots, \Sigma_n$ . La relation (IX.19) pour le solide  $\Sigma_i$  s'écrit :

$$\frac{dK_{(s)i}}{dt} = \mathcal{P}_i$$

d'où, en sommant sur l'ensemble des solides :

$$\sum_i \frac{dK_{(s)i}}{dt} = \sum_i \mathcal{P}_i$$

ou encore :

$$\frac{dK_{(s)}}{dt} = \sum_i \mathcal{P}_i \quad (\text{IX.27})$$

où  $K_{(s)} = \sum_i K_{(s)i}$  est l'énergie cinétique totale du système à l'instant  $t$  (dans le repère (S) considéré). La relation (IX.27) exprime le théorème de la puissance cinétique pour l'ensemble de solides. Il est essentiel de remarquer que la somme  $\sum_i \mathcal{P}_i$  contient les puissances des forces d'interaction entre les solides

qui sont des forces *intérieures* pour le système. La puissance totale des forces intérieures n'est pas nulle, en général, et intervient donc dans l'énoncé du théorème de la puissance cinétique. Cela vient de ce que le système de solides est, en général, un *système déformable*.

c) *Système matériel quelconque*. Le théorème de la puissance cinétique revient, en définitive, à exprimer la puissance cinétique en fonction de la distribution des forces intérieures et extérieures s'exerçant sur le système.

C'est cette expression de la puissance cinétique que l'on baptise *puissance de la distribution des forces*. Pour un solide déformable ou un fluide (milieux continus) la **puissance des forces intérieures n'est pas nulle** et intervient dans l'énoncé.

De manière générale, le théorème de la puissance cinétique dans un repère galiléen (S) se traduit pour un système quelconque par la relation :

$$\frac{dK_{(s)}}{dt} = \mathcal{P}_{int} + \mathcal{P}_{ext} \quad (\text{IX.28})$$

soit encore :

$$K_{(s)}(t_2) - K_{(s)}(t_1) = \int_{t_1}^{t_2} \mathcal{P}_{int} dt + \int_{t_1}^{t_2} \mathcal{P}_{ext} dt = W_{int} + W_{ext} \quad (\text{IX.29})$$

*Remarque.* Si on raisonne dans un repère non galiléen (R), les résultats précédents demeurent, à condition de tenir compte de la puissance des forces d'inertie. En fait, seul intervient la puissance des forces d'inertie d'entraînement, la puissance des forces d'inertie de Coriolis étant nulle. On le vérifie facilement dans le cas d'une particule de masse  $m$  :

$$\vec{f}_c = -m\vec{\gamma}_e = -2m\vec{\Omega}(t)\wedge\vec{v}_{(R)}$$

où  $\vec{\Omega}(t)$  est le vecteur instantané de rotation du repère (R) dans son mouvement par rapport à un repère galiléen quelconque. On en déduit la puissance de la force de Coriolis, soit :

$$\vec{f}_c \cdot \vec{v}_{(R)} = -2m(\vec{\Omega}(t)\wedge\vec{v}_{(R)}) \cdot \vec{v}_{(R)} = 0.$$

Pour un milieu continu quelconque, il suffit de décomposer le système en éléments de masse  $dm$ .

#### IX.11. ÉNERGIE MÉCANIQUE.

L'étude faite au paragraphe III.8. se généralise à un système matériel quelconque. Entre l'instant  $t$  et l'instant  $t + dt$ , dans le repère galiléen (S), le théorème de l'énergie cinétique pour un système matériel quelconque s'écrit :

$$dK_{(s)} = \delta W_{int} + \delta W_{ext}.$$

S'il existe une fonction  $U$  des paramètres de position du système telles que :

$$\delta W_{int} = -dU$$

On a, dans ces conditions :

$$\text{soit : } d(K_{(s)} + U) = \delta W_{ext}$$

où  $E = K_{(s)} + U$  est l'*énergie mécanique* du système.

Par intégration entre les instants  $t_1$  et  $t_2$  :

$$E(t_2) - E(t_1) = \int_{t_1}^{t_2} \delta W_{ext} dt = W_{ext}$$

Si  $W_{ext} = 0$ , l'énergie mécanique  $E$  reste constante.

*Exemple de fonction U.* Soit un solide de masse  $m$  placé dans le champ de pesanteur  $\vec{g}$  uniforme. La relation (IX.19) appliquée au centre d'inertie G dans le repère terrestre (supposé galiléen) donne :

$$\frac{dK_{(s)}}{dt} = \vec{F} \cdot \vec{v}(G)_{(s)} \quad \text{avec } \vec{F} = m\vec{g}.$$

Le second terme dans l'expression de la puissance des forces étant nul puisque  $\vec{M}_G = 0$  (§ IX.4.a.). Le mouvement de rotation du solide n'intervient pas dans le calcul.

On en déduit :

$$dK_{(s)} = \vec{F} \cdot \vec{v}(G)_{(s)} dt = \vec{F} \cdot \vec{dr} = \delta W$$

où  $\vec{dr}$  est le déplacement du point G entre l'instant  $t$  et l'instant  $t + dt$ .

Utilisons le trièdre Oxyz (Oz vertical orienté vers le haut, Ox et Oy horizontaux)  $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$  (vertical) étant les vecteurs de base correspondants. On a :

$$\vec{F} = -mg\vec{k} \quad (g > 0)$$

$$\vec{dr} = dx\vec{i} + dy\vec{j} + dz\vec{k}$$

d'où :

$$\delta W = -mg dz = -d[mgz + \text{cte}] = -dU$$

avec :

$$U = mgz + \text{cte.} \quad (\text{IX.31})$$

U est l'énergie potentielle de pesanteur du solide (\*). Cette fonction ne dépend que de la côte  $z$  du centre d'inertie G du solide.

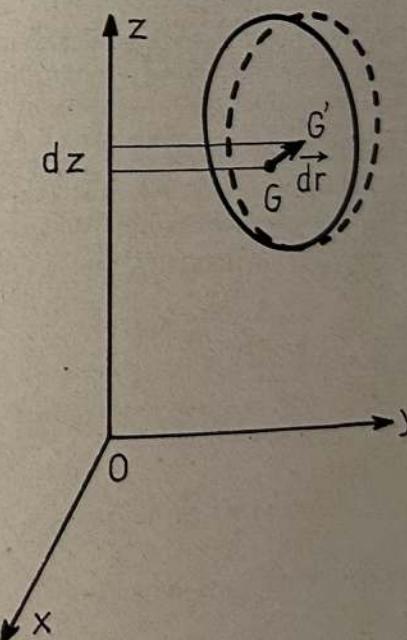


FIG. IX.1

(\*) C'est l'énergie potentielle d'interaction du système Terre-solide.  $\delta W$  est le travail des forces intérieures pour ce système.

## IX.12. MÉTHODE DE RÉSOLUTION D'UN PROBLÈME DE MÉCANIQUE\*.

La résolution d'un problème de mécanique est grandement facilitée si l'on procède par ordre. D'une manière générale, la résolution peut se ramener au schéma suivant :

- Découpage (éventuellement) du système  $\Sigma$  étudié en différents sous systèmes  $\Sigma_1, \Sigma_2, \dots, \Sigma_n$ .

• Analyse des forces extérieures agissant sur  $\Sigma_1, \Sigma_2, \dots, \Sigma_n$ . Si le repère n'est pas galiléen, il faut également introduire les forces d'inertie. Les forces de contact, ou plus généralement de liaison, sont à priori inconnues.

• Appliquer à chaque sous-système  $\Sigma_1, \Sigma_2, \Sigma_n$ , la loi fondamentale, c'est-à-dire le théorème du centre d'inertie et le théorème du moment cinétique. Il est souvent commode d'utiliser le théorème de l'énergie cinétique qui a l'avantage de fournir une intégrale première mais présente l'inconvénient de faire intervenir les forces intérieures. Tenir compte également du théorème de l'action et de la réaction et des relations cinématiques imposées par les liaisons. Il est commode aussi d'écrire le théorème du centre d'inertie pour le système global  $\Sigma$ .

• Projeter les équations vectorielles obtenues. La base de projection n'appartient pas nécessairement au repère utilisé. Elle doit être choisie pour sa simplicité. Cette opération de projection fait intervenir la formule fondamentale de dérivation vectorielle :

$$\left( \frac{d\vec{A}}{dt} \right)_{(R)} = \left( \frac{d\vec{A}}{dt} \right)_{(R')} + \overline{\Omega}_{(R')/(R)} \wedge \vec{A}.$$

- On obtient ainsi un système d'équations différentielles du 2<sup>e</sup> ordre par rapport au temps, dont la résolution nécessite la connaissance des conditions initiales.

La difficulté des problèmes de Mécanique vient de la grande facilité à trébucher sur l'une ou l'autre de ces différentes étapes. Le lecteur pourra, à titre d'exemple, se reporter au problème X.10. qui illustre ces différentes étapes.

(\*). Se reporter au livre « Exercices et Problèmes de Mécanique » par J.-P. Sarnant.

## ACTIONS DE CONTACT ENTRE SOLIDES

### X.1. CONTACT ENTRE SOLIDES.

Un solide astreint à rester en contact avec d'autres solides est *sousmis à des liaisons*. Ces liaisons ont pour effet de diminuer le nombre  $n$  des degrés de liberté du solide, soit  $n = 6 - p$ , les liaisons imposant  $p$  relations entre les 6 paramètres décrivant la position du solide.

*L'appui*, qui assure le contact, peut être obtenu par le propre poids des corps ou de tout autre manière (lames élastiques,...). Le contact est dit *ponctuel* si la zone de contact se réduit à un point. En fait, il ne peut exister à cause de la déformabilité des corps de contacts rigoureusement ponctuels. Le contact ponctuel s'effectue toujours suivant une petite aire. Il est donc préférable de parler de *contact quasi ponctuel*.

### X.2. GLISSEMENT. PIVOTEMENT. ROULEMENT.

Soit deux solides  $\Sigma$  et  $\Sigma'$  en contact ponctuel (ou quasi ponctuel) et  $I$  le point de contact des deux solides à l'instant  $t$ . Il faut distinguer le point  $I$  purement géométrique des points  $I_\Sigma$  et  $I_{\Sigma'}$ , coïncidant avec  $I$  à l'instant considéré et appartenant respectivement aux solides  $\Sigma$  et  $\Sigma'$ .

Relativement au repère  $(\Sigma')$  lié au solide  $\Sigma'$ , la vitesse d'un point  $M$  appartenant au solide  $\Sigma$  a pour expression :

$$\vec{v}(M)_{(\Sigma')} = \vec{v}(I_\Sigma)_{(\Sigma')} + \overline{\Omega}_{(\Sigma)/(\Sigma')} \wedge \vec{IM} \quad (X.1)$$

où  $\overline{\Omega}_{(\Sigma)/(\Sigma')}$  est le vecteur instantané de rotation du solide  $\Sigma$  dans le repère  $(\Sigma')$  à l'instant  $t$ .

La vitesse  $\vec{v}(I_\Sigma)_{(\Sigma')}$  est appelée *vitesse de glissement* en  $I$  du solide  $\Sigma$  sur le solide  $\Sigma'$ . L'absence de glissement est caractérisée par  $\vec{v}(I_\Sigma)_{(\Sigma')} = 0$ ; dans ce cas, l'axe instantané de rotation du solide  $\Sigma$  dans son mouvement par rapport à  $(\Sigma')$  passe par  $I$ .

Soit  $\Pi$  le plan tangent en  $I$  aux deux solides et  $IN$  la normale à ce plan en  $I$ . Décomposons  $\overline{\Omega}_{(\Sigma)/(\Sigma')}$  sur le plan et sur  $IN$ , soit :

$$\overline{\Omega}_{(\Sigma)/(\Sigma')} = \overline{\Omega}_T + \overline{\Omega}_N \quad (X.2)$$

La composante  $\overline{\Omega}_T$  caractérise le *roulement* sur le plan  $\Pi$  et la composante  $\overline{\Omega}_N$  le *pivotement* autour de la normale  $IN$ .

En l'absence de glissement :

— si  $\overline{\Omega}_N = 0$ , l'axe instantané de rotation est dans le plan de contact (roulement);

— si  $\overline{\Omega}_T = 0$ , l'axe instantané de rotation est confondu avec la normale  $IN$  (pivotement).

On notera que si l'on rapporte les mouvements des deux solides  $\Sigma$  et  $\Sigma'$  à un repère  $(R)$ , la condition de non glissement s'exprime par :

$$\vec{v}(I_\Sigma)_{(R)} = \vec{v}(I_{\Sigma'})_{(R)} \quad (X.3)$$

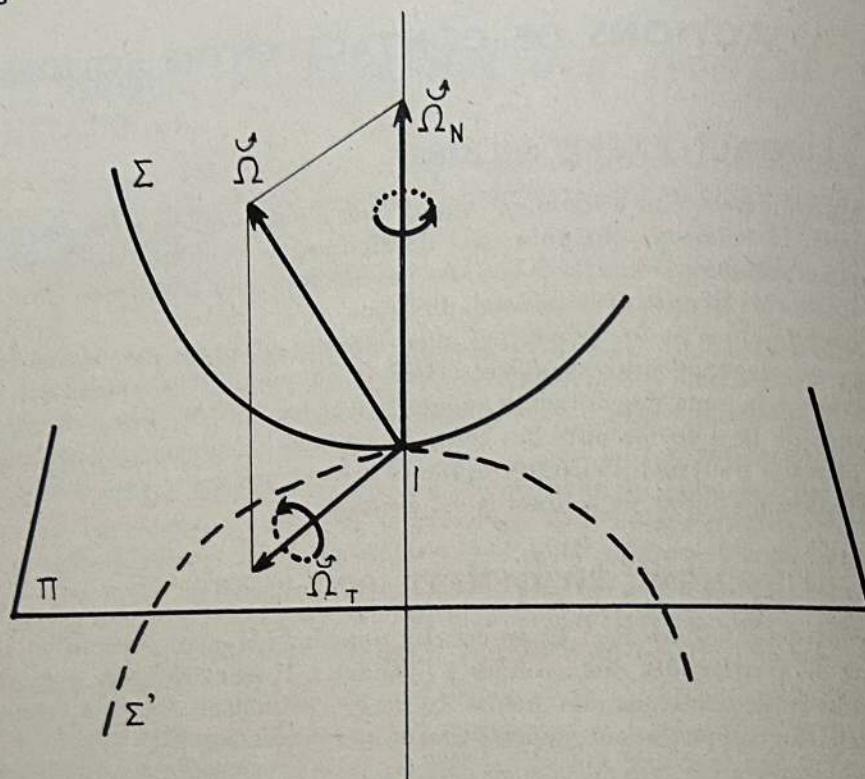


FIG. X.1

### X.3. LES ACTIONS DE CONTACT.

Les actions de contact exercées en I par  $\Sigma'$  sur  $\Sigma$  s'expriment par un torseur force  $\mathcal{F}(\Sigma' \rightarrow \Sigma)$  de somme  $\vec{R}(\Sigma' \rightarrow \Sigma)$  et de moment résultant en I,  $\tilde{\mathcal{M}}_I(\Sigma' \rightarrow \Sigma)$ . Le torseur  $\mathcal{F}(\Sigma \rightarrow \Sigma')$  des actions de contact exercées par  $\Sigma$  sur  $\Sigma'$  est égal à tout instant à  $-\mathcal{F}(\Sigma' \rightarrow \Sigma)$  en vertu du théorème de l'action et de la réaction.

Il faut remarquer que pour un contact rigoureusement ponctuel, on aurait nécessairement  $\tilde{\mathcal{M}}_I = 0$ . L'existence d'un moment  $\tilde{\mathcal{M}}_I \neq 0$  indique l'existence d'une aire de contact. Le torseur  $\mathcal{F}(\Sigma' \rightarrow \Sigma)$  est associé à une distribution superficielle de forces  $f_s(I)$  au voisinage de I.

La somme  $\vec{R}(\Sigma' \rightarrow \Sigma)$  du torseur  $\mathcal{F}(\Sigma' \rightarrow \Sigma)$  est appelée *réaction* de  $\Sigma'$  sur  $\Sigma$ . Décomposons  $\vec{R}(\Sigma' \rightarrow \Sigma)$  sur le plan  $\Pi$  et sur la normale IN soit :

$$\vec{R}(\Sigma' \rightarrow \Sigma) = \vec{R}_T + \vec{R}_N. \quad (\text{X.4})$$

La composante  $\vec{R}_N$  est appelée *réaction normale* (exercée par  $\Sigma'$  sur  $\Sigma$ ); elle est nécessairement dirigée de  $\Sigma'$  vers  $\Sigma$ , ce qui traduit l'appui des deux solides.

La composante  $\vec{R}_T$  sur le plan  $\Pi$  est la *force de frottement de glissement*. De même :

$$\tilde{\mathcal{M}}_I(\Sigma' \rightarrow \Sigma) = \tilde{\mathcal{M}}_{IT} + \tilde{\mathcal{M}}_{IN}. \quad (\text{X.5})$$

La composante  $\tilde{\mathcal{M}}_{IT}$  sur le plan  $\Pi$  est le *moment de frottement de roulement*.

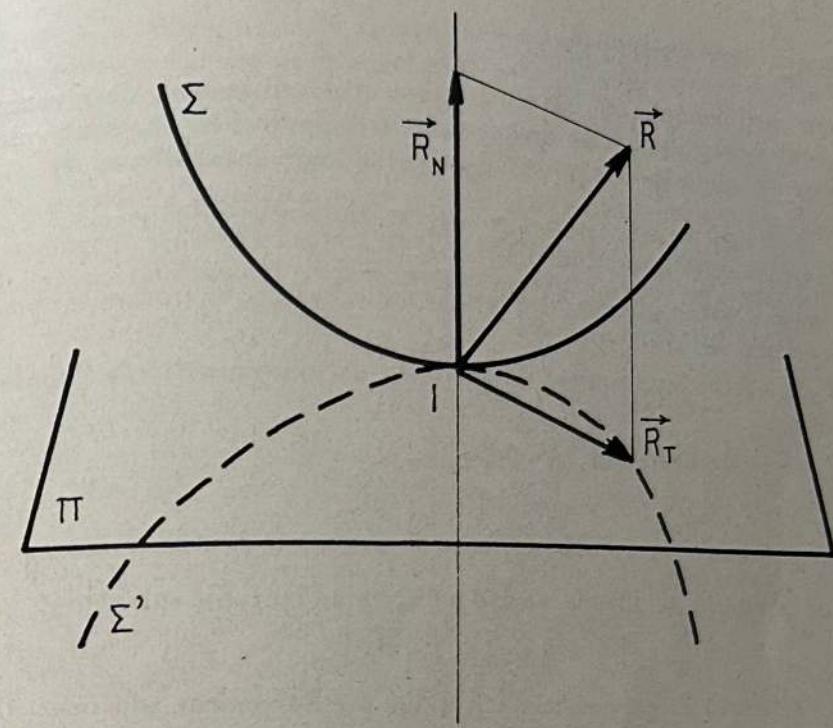


FIG. X.2

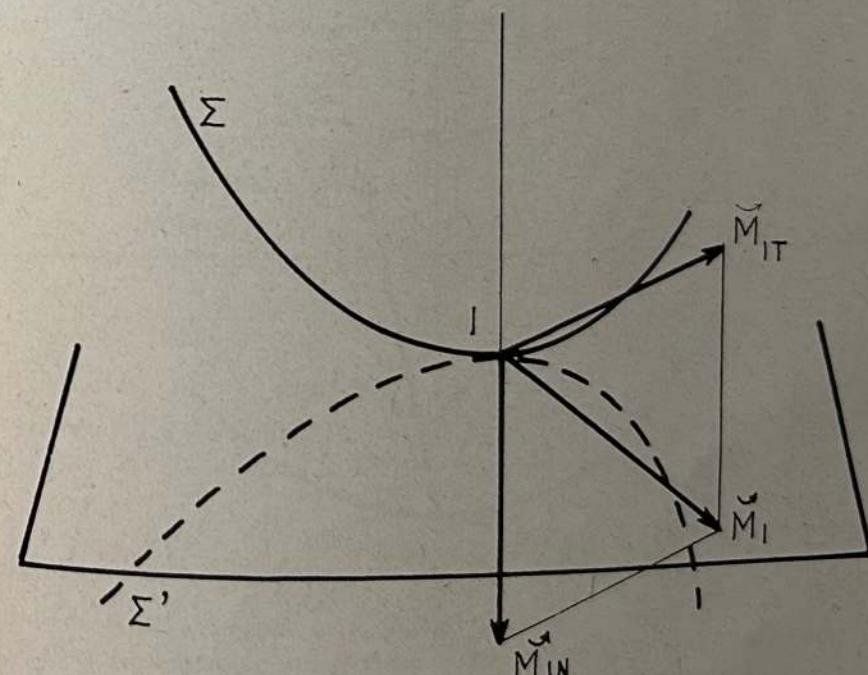


FIG. X.3

La composante  $\tilde{\mathcal{M}}_{IN}$  sur la normale IN est le *moment de frottement de pivotement*.

Le torseur des actions de contact est, à priori, inconnu. Il dépend, en particulier, outre la nature des surfaces en contact, des autres forces agissant sur les solides. Des lois expérimentales très approchées (lois du frottement) apportent des précisions sur le torseur des actions de contact.

#### X.4. LOIS DU FROTTEMENT.

Nous distinguerons les lois du frottement de glissement, de pivotement et de roulement. Soulignons que ces lois, très approchées, ne sont valables que pour des contacts à sec, c'est-à-dire en l'absence de lubrifiant.

a) *Frottement de glissement.* Les lois du frottement de glissement s'énoncent ainsi (contact quasi ponctuel) :

- Si la vitesse de glissement n'est pas nulle, la force de frottement possède les propriétés suivantes :

— elle est de sens opposé à la vitesse de glissement : elle s'oppose au glissement;

— son module satisfait à l'égalité :

$$|\vec{R}_N| = f |\vec{R}_T| \quad (\text{X.6})$$

Le coefficient  $f$  est appelé *coefficient de frottement de glissement*.

- Si la vitesse de glissement est nulle, on a l'inégalité suivante :

$$|\vec{R}_T| \leq f_0 |\vec{R}_N| \quad (\text{X.7})$$

Le coefficient  $f_0$  est voisin de  $f$  et lui est légèrement supérieur. Il est commode d'introduire l'angle de frottement  $\varphi_0$  tel que  $\operatorname{tg} \varphi_0 = f_0$ .

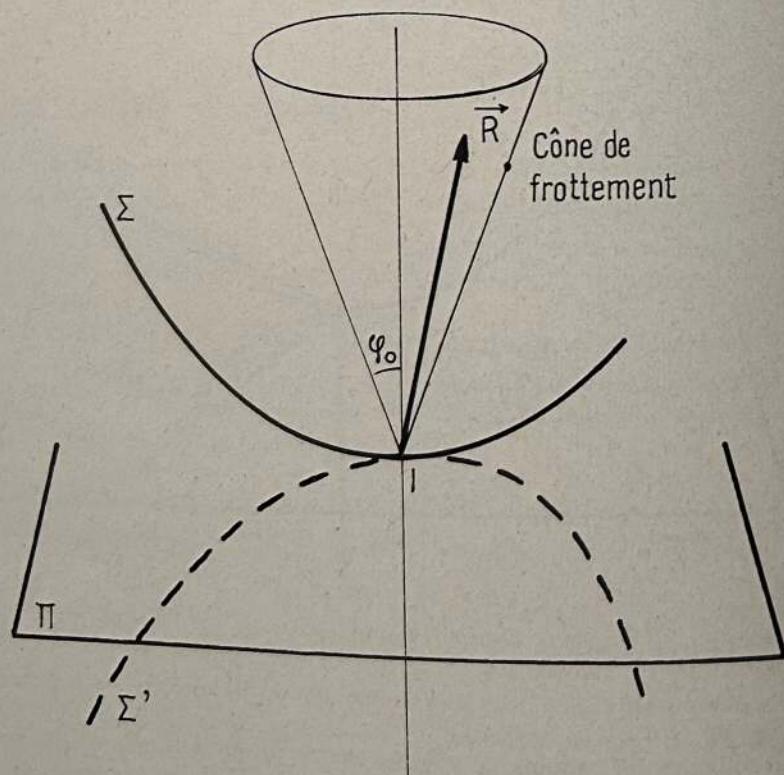


FIG. X. 4. — *Absence de glissement* : la réaction  $\vec{R}$  est à l'intérieur du cône de frottement.

Il revient alors au même de dire que la réaction  $\vec{R}(\Sigma' \rightarrow \Sigma)$  reste à l'intérieur du cône de sommet I, de révolution autour de IN et de demi-angle au sommet  $\varphi_0$  (cône de frottement).

Les valeurs des coefficients  $f$  et  $f_0$  dépendent de la nature des surfaces en contact. Ils sont d'autant plus grands que la rugosité des zones de contact est plus grande. A la limite, pour des surfaces parfaitement lisses (absence de frottement), les coefficients  $f$  et  $f_0$  seraient nuls. La réaction  $\vec{R}(\Sigma' \rightarrow \Sigma)$  serait alors nécessairement normale au plan  $\Pi$ . Mais il s'agit là d'un cas limite idéal.

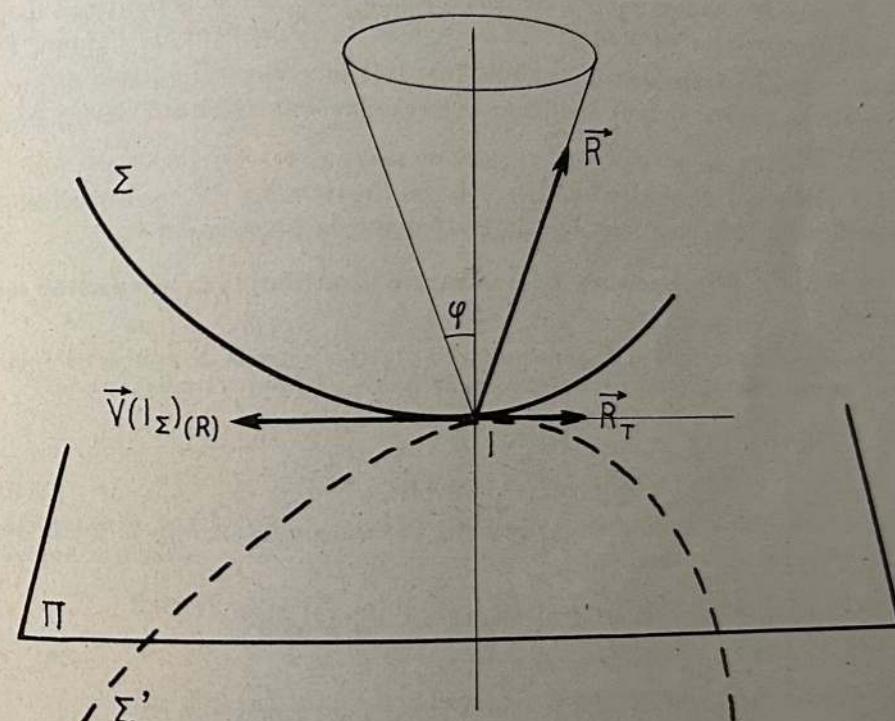


FIG. X. 5. — *Glissement* : la réaction  $\vec{R}$  est sur le cône de frottement et force de frottement  $\vec{R}_T$  est de sens opposé à la vitesse de glissement  $v(I\Sigma)(R)$ .

Insistons sur le caractère très approximatif des lois précédentes. Les coefficients  $f$  et  $f_0$  dépendent aussi de la pression d'appui, c'est-à-dire du module de  $\vec{R}$ . Le coefficient  $f$  dépend aussi de la vitesse de glissement. En particulier, on constate que lorsque cette vitesse tend vers zéro, la limite de  $f$  n'est pas égale à  $f_0$ , mais légèrement inférieure (discontinuité).

b) *Frottement de pivotement.* Les lois du frottement de pivotement s'énoncent ainsi :

- Si  $\vec{\Omega}_N \neq 0$  (pivotement), le moment  $\vec{M}_{IN}$  satisfait aux propriétés suivantes :

$\vec{M}_{IN}$  est de sens opposé à  $\vec{\Omega}_N$  : les actions de contact s'opposent au pivotement.

— On a :

$$|\vec{\mathcal{M}}_{IN}| = k |\vec{R}_N|. \quad (X.8)$$

Le coefficient  $k$ , homogène à une longueur, est appelé *coefficient de frottement de pivotement*.

• Si  $\vec{\Omega}_N = 0$  (absence de pivotement), on a l'inégalité :

$$|\vec{\mathcal{M}}_{IN}| \leq k_0 |\vec{R}_N| \quad (X.9)$$

le coefficient  $k_0$  est voisin de  $k$  et lui est légèrement supérieur.

En première approximation, le coefficient  $k$  et  $k_0$  ne dépendent que de la nature des surfaces en contact. En fait,  $k$  et  $k_0$  dépendent de l'appui. En outre,  $k$  dépend également du module  $|\vec{\Omega}_N|$  de la vitesse angulaire de pivotement. Là encore, il faut souligner le caractère approximatif des énoncés précédents.

c) *Frottement de roulement*. Les lois du frottement de roulement sont formellement identiques aux lois du frottement de pivotement.

• Si  $\vec{\Omega}_T \neq 0$  (roulement), le moment  $\vec{\mathcal{M}}_{IT}$  satisfait aux propriétés suivantes :

—  $\vec{\mathcal{M}}_{IT}$  est parallèle et de sens opposé à  $\vec{\Omega}_T$  : les actions de contact s'opposent au roulement.

— On a :

$$|\vec{\mathcal{M}}_{IT}| = h |\vec{R}_N|. \quad (X.10)$$

Le coefficient  $h$ , homogène également à une longueur, est appelé coefficient de frottement de roulement.

• Si  $\vec{\Omega}_N = 0$  (absence de roulement), on a l'inégalité :

$$|\vec{\mathcal{M}}_{IT}| \leq h_0 |\vec{R}_N| \quad (X.11)$$

le coefficient  $h_0$  est voisin de  $h$  et lui est légèrement supérieur.

Les coefficients  $h$  et  $h_0$  ne dépendent, en première approximation, que de la nature des surfaces en contact. En fait, ils dépendent aussi de l'appui.

Les lois précédentes du frottement de glissement et du frottement de pivotement supposent des contacts quasi ponctuels. Dans le cas de contacts superficiels, il est nécessaire de faire intervenir la distribution superficielle des forces de contact. Même si l'appui est uniformément réparti, le phénomène est généralement compliqué, en particulier parce que les propriétés des surfaces en regard peuvent varier notablement d'un point à l'autre.

## X.5. CAS DE LA STATIQUE.

Dans le cas où les solides  $\Sigma$  et  $\Sigma'$  sont au repos dans le repère (R), les lois du frottement se traduisent par les inégalités (X.7), (X.9), (X.11), soit :

$$|\vec{R}_T| \leq f_0 |\vec{R}_N|, \quad |\vec{\mathcal{M}}_{IN}| \leq k_0 |\vec{R}_N|, \quad |\vec{\mathcal{M}}_{IT}| \leq h_0 |\vec{R}_N|.$$

Si  $\mathcal{F}_a$  est le torseur des autres forces appliquées à  $\Sigma$ , on a :

$$\vec{\mathcal{F}}(\Sigma' \rightarrow \Sigma) + \vec{\mathcal{F}}_a = 0.$$

Soit encore :

$$\vec{R}_T + \vec{R}_{Ta} = 0 \quad \vec{R}_N + \vec{R}_{Na} = 0 \quad \vec{\mathcal{M}}_{IN} + \vec{\mathcal{M}}_{INA} = 0 \quad \vec{\mathcal{M}}_{IT} + \vec{\mathcal{M}}_{ITA} = 0$$

l'indice  $a$  se rapportant au torseur  $\mathcal{F}_a$ .

Les inégalités précédentes peuvent donc s'écrire également :

$$|\vec{R}_{Ta}| \leq f_0 |\vec{R}_{Na}|, \quad |\vec{\mathcal{M}}_{INA}| \leq k_0 |\vec{R}_{Na}|, \quad |\vec{\mathcal{M}}_{ITA}| \leq h_0 |\vec{R}_{Na}|$$

Dès que l'une de ces inégalités n'est plus satisfaite, il va y avoir glissement ou pivotement ou roulement selon le cas.

## X.6. PUISSANCE DES ACTIONS DE CONTACT.

Soit deux solides  $\Sigma$  et  $\Sigma'$  en contact ponctuel en I, à l'instant  $t$ . Leur mouvement est rapporté au repère (R).

La puissance des actions de contact s'exerçant sur le solide  $\Sigma$  a pour expression :

$$\mathcal{P}^{\Sigma}_{(R)} = (\vec{v}(I_{\Sigma})_{(R)}) \cdot \vec{R}(\Sigma' \rightarrow \Sigma) + \vec{\Omega}_{(\Sigma)/(R)} \cdot \vec{\mathcal{M}}_I(\Sigma' \rightarrow \Sigma).$$

De même, pour le solide  $\Sigma'$  :

$$\mathcal{P}^{\Sigma'}_{(R)} = (\vec{v}(I_{\Sigma'})_{(R)}) \cdot \vec{R}(\Sigma \rightarrow \Sigma') + \vec{\Omega}_{(\Sigma')/(R)} \cdot \vec{\mathcal{M}}_I(\Sigma \rightarrow \Sigma').$$

Compte tenu du théorème de l'action et de la réaction, soit :

$$\vec{R}(\Sigma' \rightarrow \Sigma) = -\vec{R}(\Sigma \rightarrow \Sigma')$$

$$\vec{\mathcal{M}}_I(\Sigma' \rightarrow \Sigma) = -\vec{\mathcal{M}}_I(\Sigma \rightarrow \Sigma')$$

la puissance totale des actions de contact s'exerçant sur  $\Sigma$  et  $\Sigma'$  vaut, à chaque instant :

$$\mathcal{P} = \mathcal{P}^{\Sigma}_{(R)} + \mathcal{P}^{\Sigma'}_{(R)} = \vec{R}(\Sigma' \rightarrow \Sigma) \cdot [\vec{v}(I_{\Sigma})_{(R)} - \vec{v}(I_{\Sigma'})_{(R)}] + \vec{\mathcal{M}}_I(\Sigma' \rightarrow \Sigma) \cdot [\vec{\Omega}_{(\Sigma)/(R)} - \vec{\Omega}_{(\Sigma')/(R)}] \quad (X.12)$$

$\vec{v}(I_{\Sigma})_{(R)} - \vec{v}(I_{\Sigma'})_{(R)}$  représente la vitesse de glissement  $\vec{v}(I_{\Sigma})_{(\Sigma')}$  du solide  $\Sigma$  sur le solide  $\Sigma'$  et  $\vec{\Omega}_{(\Sigma)/(R)} - \vec{\Omega}_{(\Sigma')/(R)}$  est égal à  $\vec{\Omega}_{(\Sigma')/(\Sigma)}$ . Seul intervient le mouvement relatif de  $\Sigma$  et de  $\Sigma'$  :  $\mathcal{P}$  est indépendante du repère (R). En outre, les lois du frottement de glissement, de pivotement et de roulement, assurent que  $\mathcal{P} \leq 0$ . D'où, en définitive :

$$\mathcal{P} = \vec{R}(\Sigma' \rightarrow \Sigma) \cdot \vec{v}(I_{\Sigma})_{(\Sigma')} + \vec{\mathcal{M}}_I(\Sigma' \rightarrow \Sigma) \cdot \vec{\Omega}_{(\Sigma')/(\Sigma)} \leq 0. \quad (X.13)$$

En l'absence de frottement de roulement et de pivotement :

$$\mathcal{P} = \vec{R}(\Sigma' \rightarrow \Sigma) \cdot \vec{v}(I_{\Sigma})_{(\Sigma')} = \vec{R}_T \cdot \vec{v}(I_{\Sigma})_{(\Sigma')}$$

$\vec{R}_T$  désignant la force de frottement de glissement exercée par  $\Sigma'$  sur  $\Sigma$ .

Si en outre le solide  $\Sigma$  roule sans glisser sur  $\Sigma'$  :

$$\mathcal{P} = 0 \quad (v(I_{\Sigma})_{(\Sigma')} = 0, \quad R_T \neq 0)$$

### X.7. OSCILLATIONS AVEC FROTTEMENT DE GLISSEMENT (FROTTEMENT SOLIDE).

Le solide  $\Sigma$ , de masse  $m$ , repose sur un plan horizontal  $\Sigma'$  et est soumis de la part d'un ressort à une force de rappel (fig. X.6).

L'appui est uniformément réparti et on suppose une même valeur du coefficient du frottement de glissement  $f$  (que nous confondrons avec  $f_0$ ) en tout point de la surface de contact.

On étudie les oscillations du solide parallèlement à l'axe horizontal  $Ox$  (mouvement de translation).

Soit  $dS$  un élément de surface de  $\Sigma$  en contact avec le plan  $\Sigma'$ , la réaction exercée par  $\Sigma'$  sur la surface  $dS$  s'écrit :

$$d\vec{R} = d\vec{R}_T + d\vec{R}_N$$

avec :

$$|d\vec{R}_T| = f |d\vec{R}_N|.$$

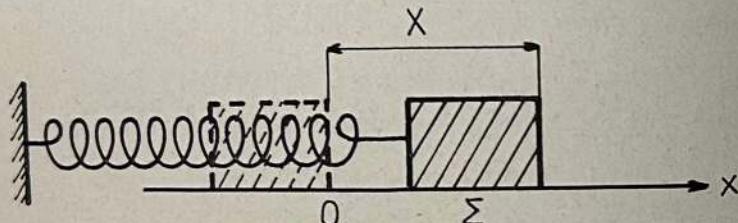


FIG. X.6

Les différents vecteurs  $d\vec{R}_T$  distribués sur la surface de contact ont une direction opposée à la vitesse de glissement  $\vec{v}$  du solide  $\Sigma$  (à chaque instant). Ils ont ainsi même direction et sens.

Dans le repère  $(\Sigma')$  lié au plan, la relation de la Dynamique s'écrit :

$$m\vec{\gamma} = \vec{R} + \vec{F} + m\vec{g} \quad (\text{X.14})$$

$\vec{F}$  est la force exercée par le ressort,  $m\vec{g}$  le poids et  $\vec{\gamma} = \frac{d\vec{v}}{dt}$  l'accélération du solide dans le repère  $(\Sigma')$  supposé galiléen.  $\vec{R}$  est la réaction de  $\Sigma'$  sur  $\Sigma$ .

La projection de (X.14) sur la verticale  $Oy$  donne :

$$\text{soit : } 0 = \vec{R}_N + m\vec{g}$$

$$|\vec{R}_N| = mg \quad g > 0$$

En projetant sur  $Ox$  :

$$\text{soit : } m\vec{\gamma} = \vec{R}_T + \vec{F} \quad (\text{X.15})$$

$$\begin{aligned} |\vec{R}_T| &= \int \int |d\vec{R}_T| = f \int \int |d\vec{R}_N| = f |\vec{R}_N| = fmg \\ \text{puisque } f &\text{ a même valeur en tous les points de la surface de contact.} \end{aligned}$$

a) *Conditions d'équilibre.* Soit  $x$  l'allongement du ressort. L'abscisse d'un point quelconque du solide a pour valeur  $x + \text{cte}$ . L'équation (X.15) s'écrit :

$$m\ddot{x} = R_T - kx$$

où  $k$  désigne la rigidité du ressort, soit encore :

$$m\ddot{x} + kx = \varepsilon fmg \quad (\text{X.16})$$

avec :

$$\begin{array}{ll} \varepsilon = +1 & \text{si } \dot{x} > 0 \\ \varepsilon = -1 & \text{si } \dot{x} < 0 \end{array}$$

puisque la force de frottement  $\vec{R}_T$  est toujours opposée à la vitesse de glissement.

On peut encore écrire (X.16) sous la forme :

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = \varepsilon f g \quad (\text{X.17})$$

avec :

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

Pour que le solide s'immobilise à un instant  $t$ , il faut que, d'une part, sa vitesse  $\dot{x}$  s'annule à cet instant, et d'autre part, qu'à ce même instant le module  $kx$  de la force de rappel soit inférieur au module  $fmg$  de la force de frottement de glissement, soit :

$$|x| < \frac{fmg}{k} = \frac{fg}{\omega_0^2} = \alpha \quad (\alpha > 0)$$

b) *Etude du mouvement.* Écartons le solide de sa position d'équilibre. L'allongement du ressort ayant une valeur  $x_0$  que nous supposerons positive. A l'instant  $t = 0$ , abandonnons le solide sans vitesse initiale, soit  $\dot{x}_0 = 0$ . Si  $x_0 < \alpha$ , le solide reste en équilibre. Si  $x_0 > \alpha$ , l'équilibre n'est pas possible et le solide va se mettre en mouvement dans le sens des  $x < 0$  ( $\varepsilon = 1$ ). L'équation (X.17) s'écrit :

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = \alpha \omega_0^2 \quad (\varepsilon = +1)$$

dont la solution générale est de la forme :

$$x = A \cos(\omega_0 t + \varphi) + \alpha$$

avec les conditions initiales :  $x = x_0$ ,  $\dot{x} = 0$  pour  $t = 0$ .

On en déduit :

$$x = (x_0 - \alpha) \cos \omega_0 t + \alpha$$

$$\dot{x} = -(x_0 - \alpha) \omega_0 \sin \omega_0 t.$$

Déterminons l'instant  $t_1$  où la vitesse s'annule à nouveau. On a alors :

$$\omega_0 t_1 = \pi$$

soit :

$$t_1 = \frac{T}{2} \quad \text{avec } T = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}}$$

L'elongation  $x$  a pour valeur à l'instant  $t_1$ :

$$x_1 = -(x_0 - \alpha) + \alpha = 2\alpha - x_0.$$

Si  $x_1 > 0$ , on a nécessairement  $x_1 < \alpha$  puisque  $x_0 > \alpha$ . Le solide reste donc, dans ce cas, en équilibre : il s'immobilise pour l'allongement  $x_1$  avant même d'être passé par sa position d'équilibre en l'absence de frottement ( $x = 0$ ). Si  $x_1 < 0$ , soit  $x_0 > 2\alpha$ , deux cas sont à considérer. Si  $2\alpha < x_0 < 3\alpha$ , on a :  $0 > x_1 > -\alpha$  ou encore  $|x_1| < \alpha$ ; il y a alors équilibre, le solide s'immobilisant après être repassé par la position d'équilibre en l'absence de frottement.

Si  $x_0 > 3\alpha$ , on a  $|x_1| > \alpha$ , et le solide repart en sens inverse, c'est-à-dire dans le sens des  $x > 0$ ; la vitesse  $\dot{x}$  est alors positive et l'équation du mouvement s'écrit :

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = -\alpha \omega_0^2 \quad (\varepsilon = -1)$$

d'où :

$$x = (x_1 + \alpha) \cos \omega_0 t' - \alpha$$

en prenant pour nouvelle origine des temps, l'instant  $t_1$ . La vitesse s'annule à nouveau à l'instant  $t' = \frac{T}{2}$  et l'élongation vaut alors :

$$x_2 = -(x_1 + \alpha) - \alpha = -x_1 - 2\alpha = x_0 - 4\alpha.$$

Si  $3\alpha < x_0 < 4\alpha$ , on a  $x_2 < 0$  et le solide s'immobilise, sans être repassé par la position d'équilibre en l'absence de frottement ( $x_2 < 0$ ). Si  $4\alpha < x_0 < 5\alpha$ , on a  $x_2 > 0$  et  $x_2 < \alpha$ , le solide s'immobilise après être repassé par la position  $x = 0$ . Si  $x_0 > 5\alpha$ , le solide repart vers la gauche et la discussion se poursuit comme précédemment.

On trouve ainsi pour les élongations maximales (positives) :  $x_0$ ,  $x_0 - 4\alpha$ , ...  $x_0 - 4n\alpha$  ( $n$  entier) ..., et pour les élongations minimales (négatives) :  $2\alpha - x_0$ ,  $6\alpha - x_0$ , ... Le solide s'immobilise dès que l'une de ces élongations est en valeur absolue inférieure à  $\alpha$ .

La période de chaque oscillation est  $T$ . Les amplitudes varient en progression arithmétique décroissante en valeur absolue, de raison  $4\%$ .

Le graphe représentatif de  $x(t)$  est formé d'arcs de sinusoïdes raccordés aux sommets (fig. X.7). Les sommets sont alignés suivant deux droites

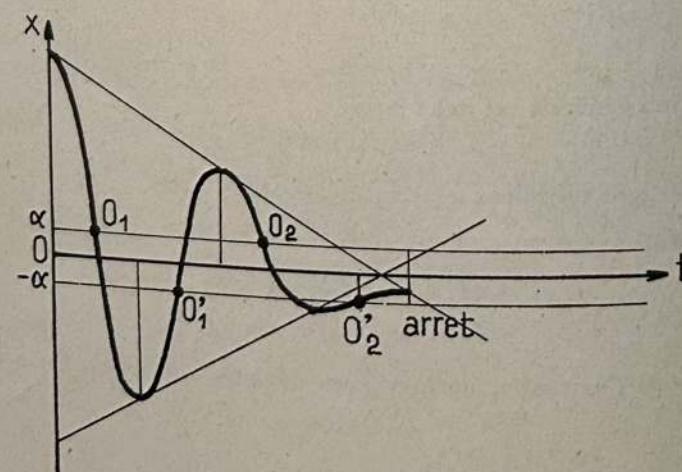


FIG. X. 7. — Oscillations avec frottement solide.

127

symétriques de pentes  $\pm \frac{T}{4\alpha}$ . Le milieu du premier arc de sinusoïde est le point  $O_1$  d'ordonnée  $\alpha$ ; le deuxième arc qui se raccorde au premier a pour milieu le point  $O'_1$  d'ordonnée  $-\alpha$ , etc. Le solide s'immobilise dès qu'un extrémum tombe dans la bande délimitée par les ordonnées  $\pm \alpha$ .

## X.8. EXEMPLE DE MESURE DU COEFFICIENT DE FROTTEMENT $f$ .

On entraîne le solide  $\Sigma$ , de masse  $m_1$ , par la chute du poids  $m_2 g$  sur la hauteur  $h$  (fig. X.8). Ainsi lancé sur la longueur  $h$ , le solide frottant parcourt la distance  $d$  avant de s'immobiliser.

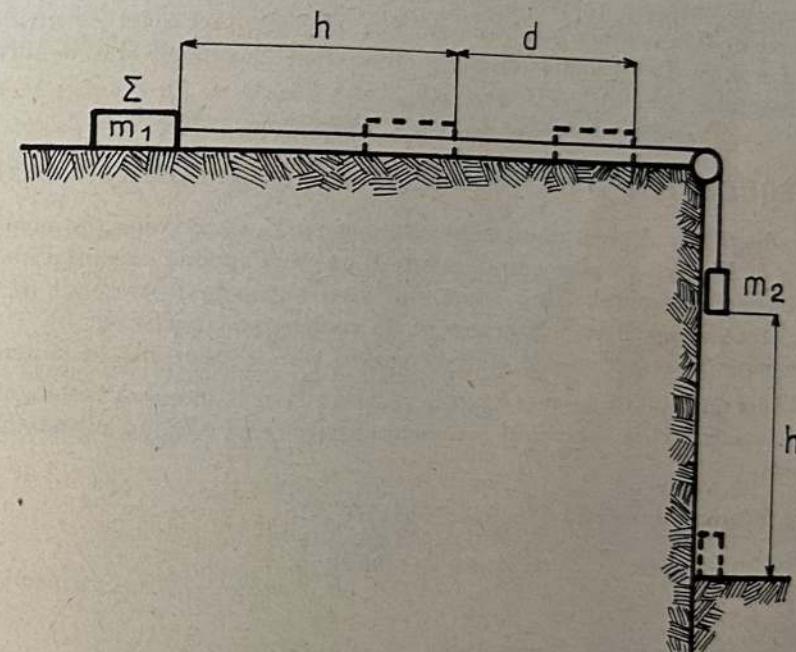


FIG. X.8

Le théorème de l'énergie cinétique appliqué à l'ensemble donne :

$$\frac{1}{2} (m_1 + m_2)v^2 = m_2gh - fm_1gh$$

où  $v$  est la vitesse des masses  $m_1$  et  $m_2$  après la chute  $h$ . La quantité  $-fm_{1g}h$  représente l'énergie absorbée par frottement de glissement. Ceci découle directement de la formule générale (X.13), la force de frottement ayant un module constant  $fm_{1g}$ . L'énergie cinétique  $K$  acquise par le solide  $\Sigma$  vaut ainsi :

$$K = \frac{1}{2} m_1 v^2 = \frac{m_1}{m_1 + m_2} (m_2 - fm_1) gh.$$

Cette énergie est ensuite absorbée complètement par frottement de glissement, sur la distance  $d$  soit :

$$\frac{m_1}{m_1 + m_2} (m_2 - fm_1)gh = fm_1gd$$

d'où :

$$f = \frac{m_2 h}{m_1 h + (m_1 + m_2)d}$$

ou encore :

$$y = \left(1 + \frac{m_1}{m_2}\right) \left(1 + \frac{d}{h}\right) = 1 + \frac{1}{f}.$$

On doit ainsi vérifier qu'approximativement  $y\left(\frac{d}{h}\right)$  reste constant, d'où la valeur de  $f$ .

Donnons quelques valeurs numériques de  $f$  : contact métal-métal,  $f$  est de l'ordre de 0,2; contact bois sur bois,  $f \approx 0,40$ ; contact acier garniture de frein,  $f \approx 0,35$ . Les valeurs obtenues dépendent beaucoup des conditions expérimentales.

### X.9. ROULEMENT D'UNE SPHÈRE SUR UN PLAN INCLINÉ.

Étudions le roulement d'une sphère homogène  $\Sigma$ , de rayon  $a$ , de masse  $m$ , le long de la ligne de plus grande pente d'un plan incliné faisant l'angle  $\alpha$  avec le plan horizontal. Nous supposons l'existence de frottement de glissement (coefficients  $f$ ) et de frottement de roulement (coefficients  $h$ ).

Le torseur des actions de contact exercé par le plan sur la sphère est caractérisé au point de contact I par la réaction  $\vec{R}$  et le moment résultant  $\vec{\mathcal{M}}_I$ . Le mouvement de la sphère est rapporté au repère  $(\Sigma')$  lié au plan, supposé galiléen.

Le théorème du centre d'inertie s'écrit :

$$\vec{R} + mg = m\vec{v}(G)_{(\Sigma')} \quad (X.18)$$

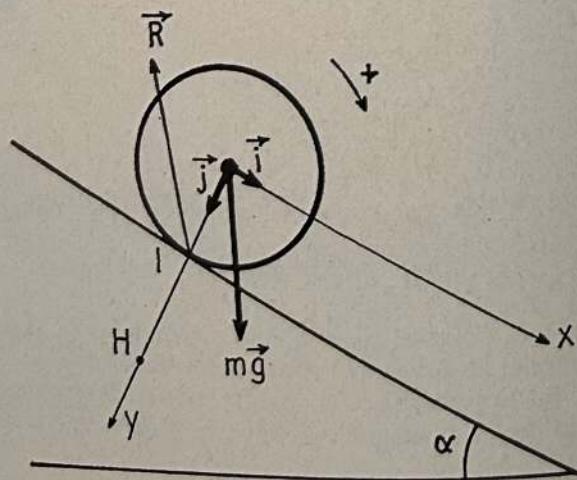


FIG. X.9

Le théorème du mouvement cinétique, par rapport à G, centre de la sphère, dans le repère barycentrique (B), s'écrit :

$$\left(\frac{d\vec{\sigma}_{(B)}}{dt}\right)_{(B)} = \vec{\mathcal{M}}_G = \vec{\mathcal{M}}_I + \vec{GI} \wedge \vec{R} \quad (X.19)$$

avec :

$$\vec{\sigma}_{(B)} = (\mathcal{J}_G)\vec{\Omega} = \frac{2}{5} ma^2 \vec{\Omega} \quad (X.20)$$

où  $\vec{\Omega}$  est le vecteur instantané de rotation de la sphère dans le repère (B) (et dans le repère  $(\Sigma')$ ).

L'équation (X.19) s'écrit ainsi :

$$\frac{2}{5} ma^2 \frac{d\vec{\Omega}}{dt} = \vec{\mathcal{M}}_I + \vec{GI} \wedge \vec{R} \quad (X.21)$$

(X.18) et (X.21) sont les équations dynamiques. Il faut leur adjoindre une équation cinématique.

a) *Hypothèse du roulement sans glissement*. En l'absence de glissement, l'axe instantané de rotation passant par I, on a l'équation cinématique :

$$\vec{v}(I_\Sigma)_{(\Sigma')} = \vec{v}(G)_{(\Sigma')} + \vec{\Omega} \wedge \vec{GI} = 0 \quad (X.22)$$

Utilisons la base de projection  $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$  (fig. X.9):

$$\begin{aligned} \vec{v}(G)_{(\Sigma')} &= v \vec{i} & \vec{\Omega} &= \omega \vec{k} \\ \vec{R} &= R_x \vec{i} + R_y \vec{j} & \vec{\mathcal{M}}_I &= h R_y \vec{k} \quad (R_y < 0) \end{aligned}$$

$R_x$  est la mesure algébrique de la force de frottement.

L'équation (X.18) donne ainsi :

$$\begin{aligned} R_x + mg \sin \alpha &= m \frac{dv}{dt} \\ R_y + mg \cos \alpha &= 0 \end{aligned} \quad (X.23)$$

L'équation (X.21) donne :

$$\frac{2}{5} ma^2 \dot{\omega} = -a R_x + h R_y \quad (X.24)$$

et l'équation cinématique (X.22) s'écrit :

$$v - a\omega = 0. \quad (X.25)$$

On obtient ainsi :

$$\frac{2}{5} ma^2 \dot{\omega} = -a(-mg \sin \alpha + m a \dot{\omega}) - hmg \cos \alpha$$

d'où :

$$\frac{7}{5} ma^2 \dot{\omega} = mg(a \sin \alpha - h \cos \alpha).$$

L'accélération angulaire  $\dot{\omega}$  est constante.

Les composantes  $R_x$  et  $R_y$  ont pour expressions :

$$R_x = ma\dot{\omega} - mg \sin \alpha = -\frac{mg}{7} \left( 2 \sin \alpha + 5 \frac{h}{a} \cos \alpha \right)$$

$$R_y = -mg \cos \alpha$$

En vertu de la loi du frottement de glissement, le roulement sans glissement n'est possible que si :

$$\left| \frac{R_x}{R_y} \right| \leq f \quad (\text{nous confondons } f \text{ et } f_0)$$

soit :

$$\operatorname{tg} \alpha \leq \frac{7}{2} f - \frac{5}{2} \frac{h}{a} = \operatorname{tg} \alpha_l. \quad (\text{X.26})$$

Il faut donc que l'angle  $\alpha$  soit inférieur à  $\alpha_l$ . En l'absence de frottement de roulement, il suffit de faire  $h = 0$ .

On peut également retrouver les résultats précédents en écrivant le théorème de l'énergie cinétique, ou mieux, le théorème de la puissance cinétique. On notera que dans ce cas, seul le frottement de roulement absorbe de la puissance ou de l'énergie, puisque la vitesse de glissement est nulle.

b) Hypothèse du roulement avec glissement. Si  $\alpha > \alpha_l$ , il faut supposer le roulement avec glissement. L'équation cinématique (X.25) est alors inexacte. Mais la loi du frottement de glissement donne :

$$R_x = f R_y = -fmg \cos \alpha.$$

L'équation (X.24) s'écrit ainsi :

$$\frac{2}{5} ma^2 \omega = fmg a \cos \alpha - mgh \cos \alpha.$$

De même (X.23) donne :

$$mv = mg(\sin \alpha - f \cos \alpha).$$

La relation cinématique s'écrit :

$$\vec{v}(I_\Sigma)_{(\Sigma')} = \vec{v}(G)_{(\Sigma')} + \vec{\Omega} \wedge \vec{GI} = v_{gl} \vec{i}$$

soit :

$$v_{gl} = v - a\omega \quad (\text{vitesse de glissement})$$

d'où :

$$\dot{v}_{gl} = \dot{v} - a\dot{\omega} = g \left( \sin \alpha - \frac{7}{2} f \cos \alpha + \frac{5}{2} \frac{h}{a} \cos \alpha \right)$$

L'inégalité (X.26) montre que  $\dot{v}_{gl} > 0$ . L'axe instantané de rotation est perpendiculaire au plan de la figure et passe par le point H, tel que  $HI\omega = \dot{v}_{gl}$ .

On retrouve ces résultats par un raisonnement énergétique, mais ici le frottement de glissement, de même que le frottement de roulement absorbe de l'énergie.

Les exercices X.8 et X.9 complètent l'étude de ce paragraphe.

### EXERCICES

X.1. Soit deux solides  $\Sigma_1$  et  $\Sigma_2$ , de poids respectifs  $P_1$  et  $P_2$  reliés par un fil passant sur une poulie sans frottement comme il est indiqué sur la figure (X.10). Le coefficient de frottement de glissement (pour les solides au repos) de  $\Sigma_1$  et  $\Sigma_2$  avec le support, a pour valeur  $f_0$ . On exerce sur  $\Sigma_2$  une force  $\vec{F}$  faisant l'angle  $\theta$  avec le plan horizontal. Pour quelle valeur du module de  $\vec{F}$  le système se mettra-t-il en mouvement ? On exprimera ce module en fonction de  $\alpha$ ,  $\theta$ ,  $f_0$ ,  $P_1$  et  $P_2$ . Pour quelle valeur de  $\theta$  ce module est-il minimal ?

Application numérique. — Calculer cette valeur minimale pour  $P_1 = P_2 = 10 \text{ N}$ ;  $f_0 = 0,20$ ;  $\alpha = 45^\circ$ .

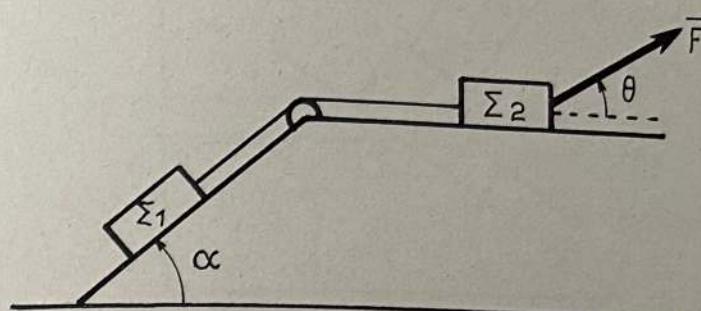


FIG. X.10

X.2. On considère le système représenté sur la figure X.11.  $\vec{F}'$  est une force verticale de valeur donnée. On néglige les poids de  $S_1$  et  $S_2$ . Quelle doit être la valeur du module de la force horizontale  $F$  pour mettre le système en mouvement ? On supposera que pour tous les contacts, le coefficient de frottement de glissement (pour les solides au repos) a une même valeur  $f_0$ . On exprimera le module de  $\vec{F}$  en fonction de  $F'$ , de  $f_0$  et de l'angle  $\theta$ .

Application numérique.  $F' = 2.10^4 \text{ N}$ ;  $\theta = 20^\circ$ ;  $f_0 = 0,15$ .

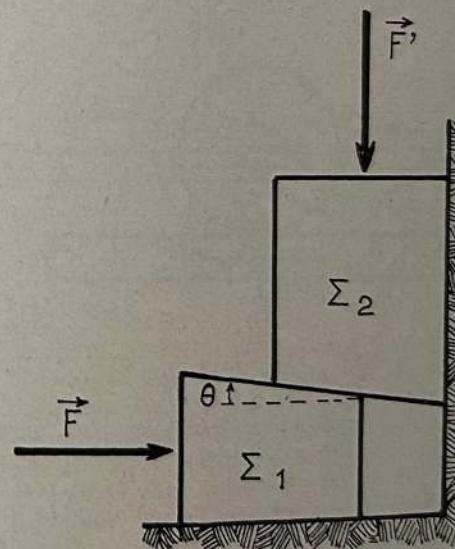


FIG. X.11

X.3. Sur la figure (X.12), AB est une corde horizontale liant  $\Sigma_1$  au support.  $\Sigma_1$  et  $\Sigma_2$  ont respectivement pour poids  $P_1$  et  $P_2$ . Le coefficient de frottement de glissement (pour les solides au repos) valent  $f_{01}$  pour le contact  $\Sigma_1$ ,  $\Sigma_2$  et  $f_{02}$  pour le contact de  $\Sigma_2$  sur le plan. Quelle est la valeur minimale de  $F$  provoquant le mouvement de  $\Sigma_2$  ?

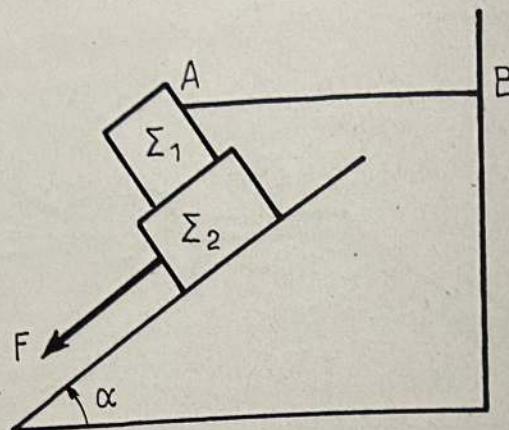


FIG. X.12

X.4. Un cylindre homogène de rayon  $a$  et de masse  $m$ , est placé sur une plate-forme horizontale animée d'un mouvement rectiligne uniformément accéléré, d'accélération  $\gamma_0$  par rapport au repère galiléen ( $S$ ). La direction de  $\gamma_0$  est perpendiculaire aux génératrices du cylindre (fig. X.13).

1<sup>o</sup> On suppose tout d'abord qu'il n'y a pas glissement du cylindre. Calculer, dans cette hypothèse, l'accélération du centre d'inertie du cylindre dans le repère lié au plateau.

2<sup>o</sup> Le coefficient de frottement statique du cylindre sur la plate-forme a pour valeur  $f_0 = 0,30$ . Quelle est la valeur maximale de  $\gamma_0$  compatible avec l'hypothèse du roulement sans glissement ? On prendra  $g = 9,8 \text{ m s}^{-2}$ .

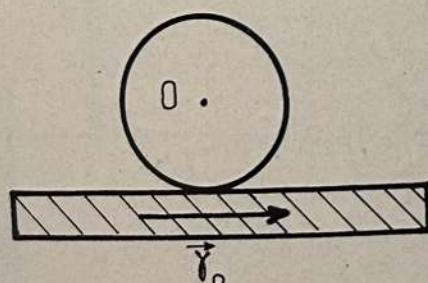


FIG. X.13

X.5. Un disque cylindrique homogène de poids  $P = mg$ , animé d'un mouvement de rotation uniforme autour de son axe horizontal, de vitesse angulaire  $\omega_0$ , relativement au repère galiléen ( $S$ ), est mis en contact avec un plateau horizontal fixe dans ( $S$ ). Le coefficient de frottement de glissement du cylindre sur le plan est  $f$ . Au bout de combien de temps le cylindre se met-il à rouler sans glissement ?

A.N. —  $g = 9,8 \text{ m s}^{-2}$ ;  $f = 0,20$ ; rayon du disque  $R = 4 \text{ cm}$ ;  $\omega_0 = 2 \text{ rad s}^{-1}$ .

X.6. Deux cylindres identiques de rayon  $a$  tournent avec une vitesse angulaire constante  $\omega_0$  autour de leurs axes, les sens de rotation étant opposés, relativement au repère galiléen ( $S$ ). Les axes des deux cylindres sont fixes dans ( $S$ ), parallèles et dans un même plan horizontal et leur distance est  $L$ . Une planche  $P$  d'épaisseur négligeable et de masse  $m$ , est placée sur les cylindres (fig. X.14). On désigne par  $f$  le coefficient de frottement de glissement pour le contact entre la planche et chacun des cylindres. Étudier le mouvement de la planche supposée immobile à l'instant initial. Discuter (considérer

le signe des réactions normales et également les vitesses de glissement). Calculer la puissance des forces de frottement pour le système global constitué par la planche et les deux cylindres. Étudier le signe de cette puissance compte tenu de la discussion précédente.

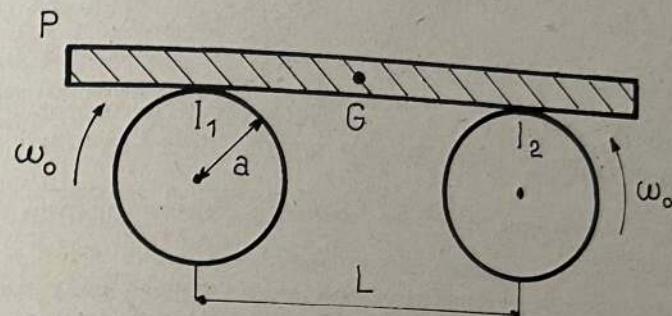


FIG. X.14

X.7. Un plateau  $P$  horizontal, est animé d'un mouvement de translation, d'accélération  $\gamma_0$  constante relativement au repère galiléen ( $S$ ). Deux solides  $\Sigma_1$  et  $\Sigma_2$ , de même masse  $m$ , posés sur le plateau sont reliés par un ressort de rigidité  $k$  (fig. X.15). La longueur au repos du ressort est  $l_0$ . A l'instant  $t = 0$ , l'allongement du ressort est  $l_0$ , les solides  $\Sigma_1$  et  $\Sigma_2$  étant immobiles par rapport au plateau. On suppose un frottement de glissement caractérisé pour les deux solides par le même coefficient  $f$ . On exerce sur  $\Sigma_2$  une force horizontale constante, de module  $F = 2fmg$ . Étudier l'allongement du ressort en fonction du temps. Discuter.

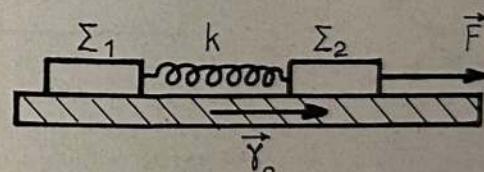


FIG. X.15

X.8. Une roue à la forme indiquée sur la figure (X.16). Sa masse peut être considérée comme répartie sur une circonference de rayon  $R$ . Le moyeu de la roue a un rayon  $r$  et roule sur des rails inclinés. On désigne par  $f$  le coefficient de frottement de glissement du moyeu sur les rails.

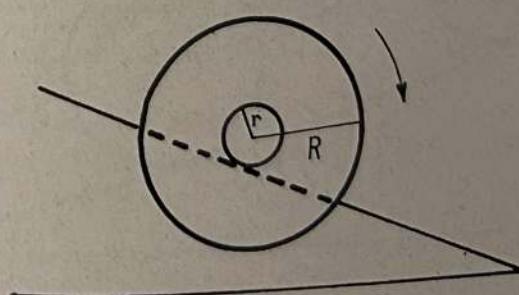


FIG. X.16

1<sup>o</sup> Étudier le mouvement de la roue en supposant qu'il y ait roulement sans glissement et que le frottement de roulement soit négligeable. Quelle est la valeur maximale  $\alpha_m$  que l'on peut donner à l'inclinaison des rails pour réaliser ce mouvement ? Quel est le temps mis par la roue pour parcourir une longueur  $x$ , l'inclinaison des rails ayant la valeur limite  $\alpha_m$  ?

*Application numérique.* —  $R = 20 \text{ cm}$ ;  $r = \frac{R}{8}$ ;  $f = 0,20$ ;  $g = 9,8 \text{ m.s}^{-2}$ ;  $x = 4 \text{ m}$ .

2<sup>o</sup> On suppose maintenant qu'il y a un coefficient de frottement de roulement  $h_0 = 0,5 \text{ mm}$ . Entre quelles limites doit être compris l'angle  $\alpha$  pour qu'il y ait roulement sans glissement ?

3<sup>o</sup> Étudier le mouvement de la roue lorsqu'il y a glissement (dans chacune des hypothèses précédentes).

X.9. On considère le système représenté sur la figure (X.17). ABCD est un châssis rigide constitué par des tiges cylindriques homogènes identiques AC et BD et parallèles et liées entre elles par la tige cylindrique homogène MN soudée en M et N (M et N sont les milieux respectifs de AC et BD). Le châssis ABCDMN a une masse  $m$ . S est une sphère rigide, pleine et homogène, de centre  $O_1$ , de même masse  $m$  que le châssis et de rayon  $r$ , dont l'axe AB solidaire de la sphère est pivoté en

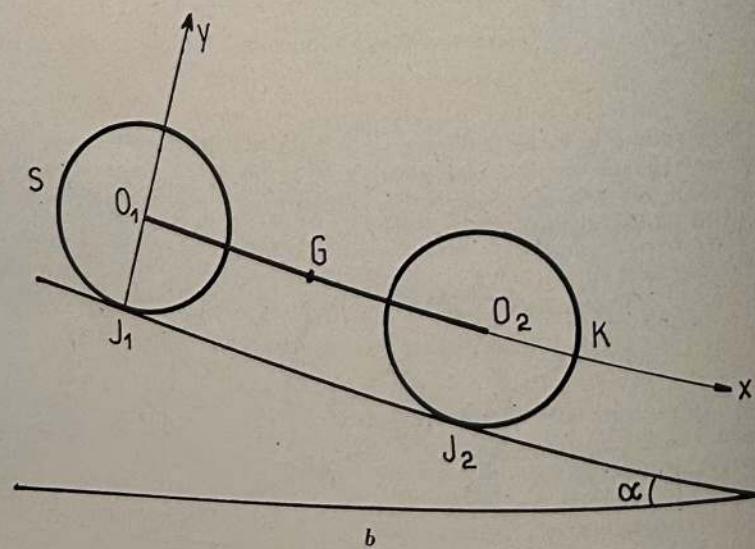
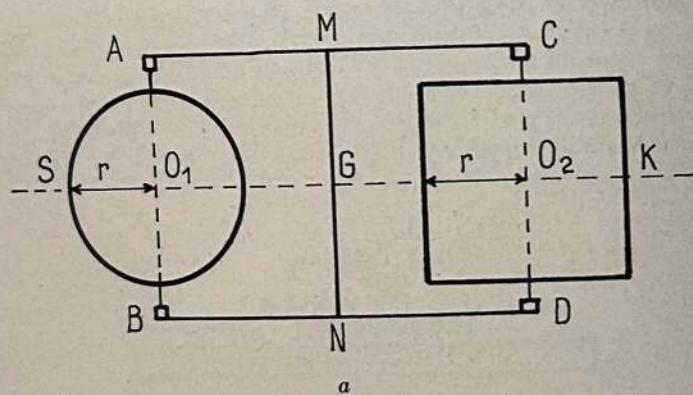


FIG. X.17

A et B sur le châssis. K est un cylindre rigide, plein et homogène, de centre  $O_2$ , de même masse  $m$  et de même rayon  $r$  que la sphère, dont l'axe CD (parallèle à AB) solidaire du cylindre est pivoté en C et D sur le châssis. L'axe  $O_1 O_2$  passe de la sorte par le centre d'inertie G du système. On suppose dans tout le problème que les contacts de roulement. On désigne par  $g$  l'accélération de la pesanteur.

On suppose également que le coefficient de frottement de glissement de la sphère et du cylindre sur le plan, lorsque le glissement se produit effectivement, garde une valeur constante égale à  $f$ . On considérera uniquement les mouvements de translation rectiligne du châssis parallèlement à une ligne de plus grande pente du plan.

1<sup>o</sup> Établir, selon les valeurs de  $\alpha$ , les expressions de l'accélération du centre d'inertie G du système.

a) Donner l'angle limite  $\alpha_l$  du régime de roulement sans aucun glissement. Calculer dans ce cas l'accélération  $\gamma$ .

b) Étudier ce qui se passe pour des valeurs  $\alpha > \alpha_l$ , discuter et donner les valeurs de l'accélération.

2<sup>o</sup> Établir, selon les valeurs de  $\alpha$ , les expressions des composantes  $X_1$  et  $X_2$  sur  $O_1 x$  des réactions de la sphère et du cylindre sur le châssis.

A.N. —  $m = 500 \text{ g}$ ,  $f_0 = 0,25$ ,  $g = 10 \text{ m s}^{-2}$  avec  $\alpha = 45^\circ$  puis  $\alpha = 60^\circ$ .

3<sup>o</sup> Le système étant abandonné à l'instant  $t = 0$  sans vitesse initiale, calculer selon les valeurs de  $\alpha$ , l'énergie transformée en chaleur entre les instants 0 et  $t$ . On effectuera ce calcul :

a) Directement à partir de la définition du travail d'une force.

b) Par application du théorème de l'énergie cinétique.

A.N. —  $m = 500 \text{ g}$ ,  $f_0 = 0,25$ ,  $g = 10 \text{ m s}^{-2}$ ,  $t = 1 \text{ s}$  avec  $\alpha = 30^\circ$  puis  $\alpha = 45^\circ$ .

(Mines 1965, extraits).

#### X.10. Principe d'un gyrocompas.

La figure (X.18) schématisse un gyrocompas. Un cadre rectangulaire C est pivoté en A' et B' sur un support S. D est un disque homogène d'épaisseur négligeable (rayon  $a$ , masse  $m$ ) tournant à grande vitesse autour de l'axe  $Ox'$  et pivoté en A et B sur le cadre C. Le point O est le centre d'inertie de D et de C. Les repères et bases utilisés sont :

(B) axes OXYZ parallèles aux axes de Copernic.

(T) axes  $Ox'y'z'$  liés à la Terre.  $Ox'$  vers le nord,  $Oy'$  vers l'ouest,  $Oz$  vertical.

(C) axes  $Ox''y''z''$  liés au cadre C, le cadre C tourne autour de  $Oz$  (angle  $\theta$ , vitesse angulaire  $\dot{\theta}$  par rapport au support S). Ces axes sont axes principaux d'inertie du cadre.

$\Omega$  désigne la vitesse angulaire de rotation de la Terre par rapport aux axes de Copernic et  $\omega$  la vitesse angulaire de rotation du disque D dans le repère (R). On supposera  $\omega$  sensiblement constant. On posera :  $J = \frac{ma^2}{2}$ .

Le support S est fixe dans (T) en un lieu de latitude  $\lambda$ .

a) Donner les composantes du moment cinétique  $\sigma_0^{D(B)}$  en O du disque dans (B) sur la base (C) puis sur la base (T).

b) Donner les composantes de  $\frac{d}{dt} \left[ \sigma_0^{D(B)} \right]_{(B)}$  sur la base (T). En déduire les composantes sur cette base du moment par rapport à O des forces exercées par le cadre sur le disque. Simplifier ces expressions sachant que  $\omega \gg \Omega$ .

c) Écrire les composantes sur la base (T) de  $\vec{\sigma}_0^C(B)$ , moment cinétique en O du cadre dans (B) ainsi que les composantes sur cette base de  $\frac{d}{dt} \left[ \vec{\sigma}_0^C(B) \right]_{(B)}$ . On supposera dans cette question que  $\omega \gg \Omega$ .

En déduire l'existence d'un moment de rappel par rapport à Oz agissant sur C et proportionnel à  $\sin \theta$ . Montrer qu'en l'absence de frottement sur les pivots A' et B', l'appareil peut servir d'indicateur de nord (gyrocompas). Exprimer en fonction du moment d'inertie K du cadre C par rapport à Oz, la période T des petites oscillations du cadre autour de la position d'équilibre stable. On supposera  $K \gg J$ .

$$\text{A.N.} - J\omega = 10^9 \text{ g cm}^2 \text{ s}^{-1}, \lambda = 45^\circ \text{N}; K = 60 \text{ kg m}^2.$$

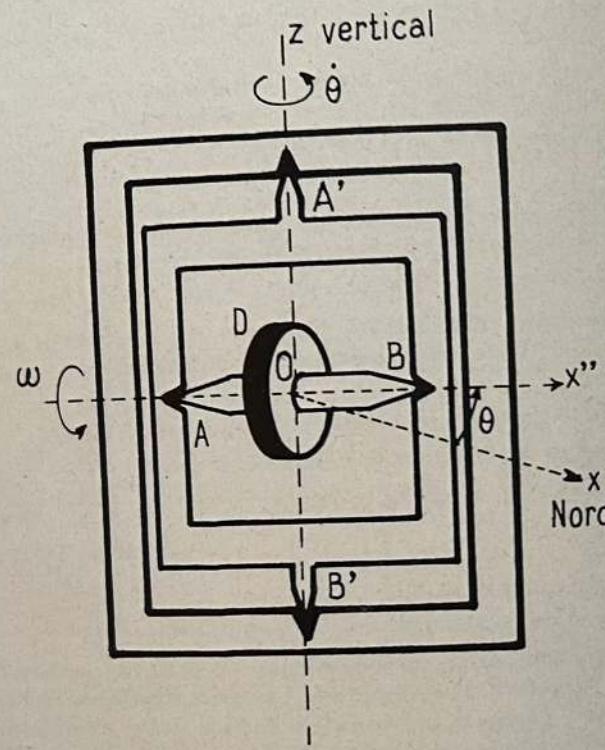


FIG. X. 18. — Principe d'un gyrocompas.

X.11. Le repère fixe est le trièdre orthonormé  $(Ox_1y_1z_1)$  lié à la Terre en un lieu O où la verticale descendante est l'axe  $Ox_1$  et l'intensité de la pesanteur est égale à  $g$ . Ce repère est considéré comme galiléen, en ce que la force d'inertie d'entrainement due à la rotation terrestre est incluse dans  $\vec{g}$  et la force d'inertie complémentaire de même origine est négligée.

Le système à étudier est réduit à deux solides indéformables :

- une barre rectiligne (OG) d'axe  $Ou$ , de longueur  $a$ , de masse  $m$ , de centre d'inertie B situé sur  $Ou$  ( $OB = b < a$ ), mobile dans le plan vertical fixe  $Ox_1y_1$  autour de l'axe  $Oz_1$  par rapport auquel le moment d'inertie de cette barre est  $I$ ;
- un corps de révolution (R) de centre d'inertie G, de masse M, d'axe de révolution  $Gz$ , de plan équatorial (E) (plan normal à  $Gz$  en G), de moment d'inertie diamétral A (par rapport à un diamètre de (R) situé dans (E)), de moment d'inertie axial C (par rapport à  $Gz$ ), mobile autour du point G de telle sorte que le plan (E) demeure constamment au contact de l'axe  $Ou$ .

Les liaisons sont parfaites (sans frottement). La masse et l'inertie des appareils qui les assurent sont, dans la mesure où elles interviennent dans le mouvement, ou bien négligeables, ou bien prises en compte dans celles de (OG) et de (R).

On désigne par :

$\psi = (\mathbf{Ox}_1, \mathbf{Ou})$  l'angle de la barre avec la verticale descendante,

$\varphi = (Gu, GP)$  l'angle d'une droite matérielle GP de (R) du plan (E) avec l'axe de la barre,

$\theta = (Oz_1, Gz)$  l'angle de l'axe de révolution de (R) avec l'horizontale fixe  $Oz_1$ .

1° Exprimer à l'aide des angles  $(\psi, \varphi, \theta)$  et de leurs dérivées par rapport au temps  $t$   $(\dot{\psi}, \dot{\varphi}, \dot{\theta})$ :

a) Les composantes suivant les axes orthonormés  $(Gu, Gv, Gz)$  de la vitesse de rotation du trièdre qu'ils forment, puis celles de la vitesse de rotation de (R) par rapport au trièdre fixe  $(Ox_1, y_1, z_1)$ ;

b) L'énergie cinétique du système (OG, R).

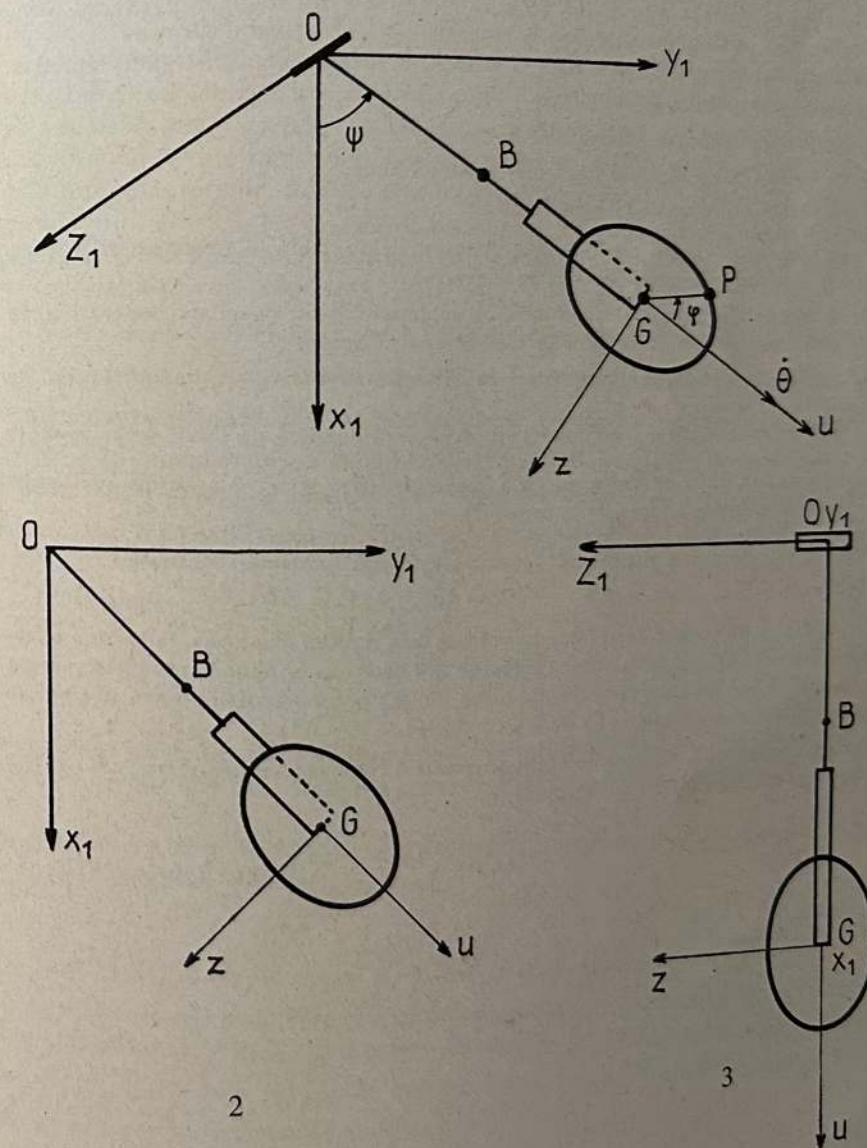


FIG. X.19

2<sup>e</sup> En plus des poids de ses éléments, le système est sollicité par un couple extérieur d'axe  $Oz_1$ , d'intensité  $\Gamma(t)$ , agissant sur la barre (OG). En outre, dans le mouvement de (R), par le jeu d'un ressort ( $r$ ) de masse négligeable disposé à cet effet et de rigidité  $k$  ( $k$ , constante positive donnée), l'axe  $Gz$  de (R) est rappelé vers la direction de l'horizontale fixe  $Oz_1$  par un couple d'axe  $Gu$  et d'intensité  $-k\theta$ .

Former les équations différentielles du mouvement du système et les linéariser (on supposera à cet effet que l'angle  $\theta$  et toutes ses dérivées utiles demeurent assez petits pour permettre de négliger tout terme d'ordre supérieur au premier).

Déterminer alors l'intensité  $\Gamma(t)$  du couple extérieur propre à assurer l'uniformité de la rotation de la barre OG à la vitesse angulaire  $\dot{\psi} = \Omega$ .

Après avoir reconnu que la rotation propre de (R) est alors uniforme à la vitesse de rotation  $\dot{\varphi} = \omega$ , former l'équation différentielle du second ordre qui régit pour  $\Omega$  et  $\omega$  donnés les variations de l'angle  $\theta$ .

A quelle condition le régime  $\dot{\psi} = \Omega$ ,  $\dot{\varphi} = \omega$ ,  $\theta = 0$ , est-il stable et quelle est alors la pulsation des oscillations en  $\theta$  que le système est susceptible d'effectuer ?

En distinguant les deux cas  $A > C$  et  $A < C$ , déterminer les régions du plan  $(\Omega, \omega)$  pour lesquelles il y a stabilité.

Examiner les deux cas particuliers suivants :

- a) La barre OG est bloquée dans une position fixe;
- b) La rotation propre de (R) est arrêtée.

3<sup>e</sup> Le dispositif étudié est la schématisation d'un train d'atterrissement d'avion s'éclipsant longitudinalement dans le fuselage.

On demande d'étudier les vibrations de cet appareil au cours de l'opération de rentrée succédant au décollage dans les conditions suivantes :

La vitesse de décollage dirigée vers la direction négative de l'axe  $Oy_1$  est de  $300 \text{ km/h}^{-1}$ .

La rentrée du train dans son logement situé vers l'arrière de l'avion par rapport à l'axe de rotation du train s'effectue en 5 secondes.  $(0 < \dot{\psi} < \frac{\pi}{2})$  avec ou sans arrêt préalable de la rotation propre de la roue (R).

La roue (R) de rayon  $R$  présente en outre les caractéristiques suivantes :

Unités M.K.S.       $R = 0,5$        $A = 15$        $C = 25$ .

La rigidité  $k$  du ressort fictif ( $r$ ), équivalente à la rigidité élastique de torsion effective de la barre (OG), est telle qu'une force de 100 newtons appliquée progressivement normalement à (E) à l'extrémité du diamètre de (R) perpendiculaire à OA détermine une rotation statique du plan (E) de  $\theta = 5$  degrés.

Qu'arriverait-il si la rentrée du train se faisait à la même vitesse mais vers l'avant avec ou sans arrêt préalable de la roue ?

(Polytechnique, 1974.)

## SYSTÈMES A MASSE VARIABLE (\*)

### XI.1. SYSTÈMES OUVERTS.

a) *Systèmes ouverts.* Soit un système matériel  $\Sigma$  limité par une surface fermée  $\mathcal{S}$ . Le système  $\Sigma$  est dit *ouvert* s'il y a transfert de matière à travers  $\mathcal{S}$ , le système  $\Sigma$  échangeant de la matière avec l'extérieur. En général, la masse totale de  $\Sigma$  sera variable, donc fonction du temps soit  $m(t)$ .

Un système qui n'échange de matière avec l'extérieur en aucun point de  $\Sigma$  est dit *fermé*. La masse d'un système fermé est constante mais on notera que la masse d'un système ouvert peut également rester constante (c'est le cas en régime stationnaire, le bilan total d'échange de masse étant, dans ce cas, nul à chaque instant).

b) *Echange d'une grandeur extensive.* Assimilons le système matériel  $\Sigma$  à un ensemble de particules. Désignons par  $G$  une grandeur physique scalaire associée aux particules (masse, charge électrique). Le transfert de matière à travers la surface limite  $\mathcal{S}$  consiste en un échange de particules entre  $\Sigma$  et le milieu extérieur. Lorsqu'une particule traverse  $\mathcal{S}$ , il y a échange de la grandeur  $G$  entre  $\Sigma$  et le milieu extérieur. Un tel échange de la grandeur  $G$  est donc lié à un transfert de matière. A noter que la grandeur  $G$  est nécessairement *extensive*.

Un exemple très classique est l'échange de charge électrique. Cet échange est caractérisé par le vecteur densité de courant  $\vec{j}$ . Si  $dS$  est un élément de surface en un point  $M$  de cette surface et  $\vec{u}$  le vecteur unitaire perpendiculaire en  $M$  à la surface dirigé de l'intérieur vers l'extérieur, la quantité  $\vec{j} \cdot \vec{u} dS$  représente la charge transférée par unité de temps à travers  $dS$  dans le sens du vecteur  $\vec{u}$  (c'est-à-dire de l'intérieur vers l'extérieur de la surface).

L'intégrale :

$$\iint_{\mathcal{S}} \vec{j} \cdot \vec{u} dS \quad (\text{XI.1})$$

représente ainsi la charge transférée par unité de temps à travers  $\mathcal{S}$  vers l'extérieur, du fait du passage à travers  $\mathcal{S}$  de particules chargées.

Rappelons que si  $\vec{v}$  désigne la vitesse moyenne des charges en  $M$  par rapport au repère considéré, on a :

$$\vec{j} = \rho \vec{v}$$

où  $\rho$  est la densité volumique en  $M$  des charges mobiles.

Ce qui précède peut être généralisé au cas d'une grandeur physique extensive quelconque. Ainsi le transfert de masse peut être caractérisé par une densité  $\vec{j}_m$  telle que  $\vec{j}_m \cdot \vec{u} dS$  représente la masse transférée par unité de temps à travers  $dS$  dans le sens de  $\vec{u}$ .

(\*) Ce chapitre doit beaucoup à d'intéressantes discussions avec M. P. Provost, professeur au Lycée Louis-le-Grand.