15. Trouver sur un cône donné à base circulaire horizontale une parabole tangente aux deux plans de projection.

16. On donne dans le plan horizontal de projection une strophoïde droite (Γ) ayant pour point double Ω, et dont l'asymptote réelle Δ est perpendiculaire à la ligne de terre; elle est la base d'un cône dont le sommet S est sur la verticale du point Ω. Construire les projections horizontales des sections de ce cône par trois plans de bout tels que les sections aient un seul, deux ou trois points à l'infini réels.

CONSTRUCTION D'UNE SURFACE CONIQUE OU CYLINDRIQUE SATISFAISANT A DES CONDITIONS DONNÉES.

17. Construire un cylindre parabolique connaissant le paramètre des paraboles sections droites, deux points de ce cylindre, et sachant que les axes des sections droites sont dans le plan horizontal de projection.

18. Construire un cône contenant une conique C donnée dans le plan horizontal de projection, et un point A donné, de façon que le plan frontal coupe ce cône suivant un cercle.

19. Un cône a pour base dans le plan de bout Π' une ellipse (E) dont la projection horizontale est un cercle (*e*). Le sommet S se projette horizontalement en un point donné *s* de (*e*); choisir S de façon que la section du cône par le second plan bissecteur soit une parabole.

20. Un cône a pour base dans le plan de bout Π' une ellipse (E) dont la projection horizontale est un cercle (*e*). Déterminer le sommet S du cône de façon que la section par un plan donné P soit une conique (Γ) dont on donne : 1° deux points M et N et la tangente en l'un d'eux; 2° deux tangentes U et V et le point de contact de l'une d'elles; 3° une asymptote A et un point.

21. Déterminer un cylindre parabolique sachant que son plan asymptotique est frontal, et connaissant trois génératrices, ou deux génératrices et le plan tangent le long de l'une d'elles. (On s'appuiera sur la propriété suivante de la parabole : si A et B sont deux points d'une parabole, I le milieu de AB, K la projection de I sur l'axe, N le point de rencontre de l'axe avec la médiatrice de AB, le segment KN (sous-médiatrice) est égal au paramètre).

22. On donne une droite quelconque Δ et un point A non situé sur cette droite. Construire les contours apparents du cylindre hyperbolique passant par A et dont les plans asymptotes sont les plans projetant Δ. Construire une section droite de ce cylindre.

23. On donne une droite Δ qui perce le plan horizontal de projection P en S. Démontrer que le lieu des points équidistants de P et de Δ est un cône dont les sections par des plans perpendiculaires à Δ se projettent horizontalement suivant des cercles de centre S.

Δ étant de front, inclinée à 45° sur P, construire la section du cône par le premier bissecteur.

CÔNES SUPPLÉMENTAIRES (*Spéc.* II, 36; *Sup.* II, 418).

24. Un cône donné ayant une base circulaire horizontale :

1° Trouver les contours apparents du cône supplémentaire;

2° Trouver la projection frontale d'un point du cône supplémentaire connaissant sa projection horizontale;

3° Mener par un point donné les plans tangents au cône supplémentaire.

25. On donne un cône à base circulaire horizontale; trouver les asymptotes de la section du cône supplémentaire par un plan quelconque.

26. Par une droite Δ donnée, mener un plan Π coupant suivant une parabole; le cône supplémentaire d'un cône donné à base circulaire horizontale.

CHAPITRE XI

CÔNES ET CYLINDRES DE RÉVOLUTION PROBLÈMES SUR LES PLANS TANGENTS A LA SPHÈRE

CÔNES ET CYLINDRES CIRCONSCRITS A UNE SPHÈRE

105. ***Plans tangents à une sphère menés par un point.*** — Il existe une infinité de plans tangents à la sphère (O) menés par le point donné S (69); ils enveloppent le cône circonscrit de sommet S. Leurs points de contact décrivent le cercle L commun à la sphère et au plan polaire Π de S par rapport à cette sphère.

Détermination d'un point de contact sur un petit cercle horizontal (ou frontal). — On peut construire des points de contact de plans tangents à la sphère (O) menés par S en assujettissant ces points à se trouver sur un cercle horizontal (ou frontal) de la sphère.

Soit par exemple Γ le petit cercle situé dans le plan horizontal $u'v'$ (fig. 226). Tous les plans tangents à la sphère (O) qui ont leurs points de contact sur Γ enveloppent le cône circonscrit qui a pour sommet le pôle (i, i') du plan $u'v'$; le point i' se construit aisément en menant en u' la tangente au grand cercle frontal de la sphère et en cherchant son intersection avec la verticale du centre.

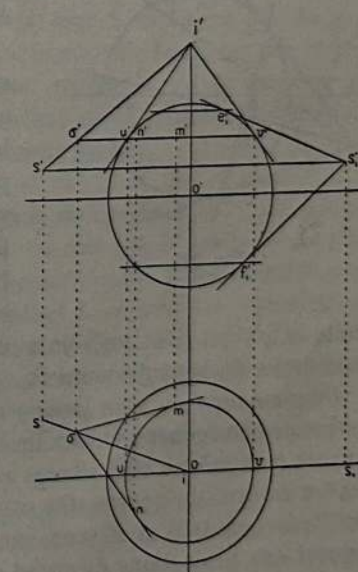

Fig. 226.

On est ramené à construire les plans tangents menés par S au cône de sommet I dont on connaît une base circulaire horizontale Γ. La droite IS coupe le plan $u'v'$ au point (σ, σ') d'où l'on mène les tangentes à Γ, ce qui donne ainsi les points cherchés (m, m') et (n, n'); ce sont deux points courants du cercle L.

Les plans horizontaux utiles, pour lesquels M et N sont réels, sont séparés des plans horizontaux inutiles, pour lesquels les points S et σ sont intérieurs au cône circonscrit de sommet I, par des plans horizontaux limites pour lesquels le point S appartient au cône circonscrit de sommet I. Ces plans se déterminent en amenant, par rotation autour de la verticale de O, le point S en S_1, dans le plan frontal du centre $(os = os_1)$. Si e'_1 et f'_1 sont les points de contact des tangentes menées de s'_1 au grand cercle frontal, il n'existe pas de points réels de L en dehors de la zone sphérique limitée par les plans horizontaux des points e'_1 et f'_1. La rotation inverse donnerait les points e' et f' de L situés dans le plan vertical so, qui est un plan de symétrie vertical pour la figure.

Points de contact situés sur les contours apparents de la sphère. — Les plans tangents à la sphère en tous les points du grand cercle horizontal enveloppent le cylindre vertical circonscrit à cette sphère. Pour trouver les points du cercle L situés sur le grand cercle horizontal, on mène par S la verticale qui rencontre le plan horizontal du centre en un point (h, h'), et par le point h (confondu avec s sur l'épure), on mène les tangentes au grand cercle, ce qui donne les points cherchés (a, a') et (b, b') (fig. 227). Ces points sont réels et distincts si s est extérieur au contour apparent en projection horizontale de la sphère (O). La droite (p, p') qui joint les points obtenus est la droite conjuguée (ou réciproque) de la verticale de S (*Spéc.*, I, 199; *Sup.*, II, 426).

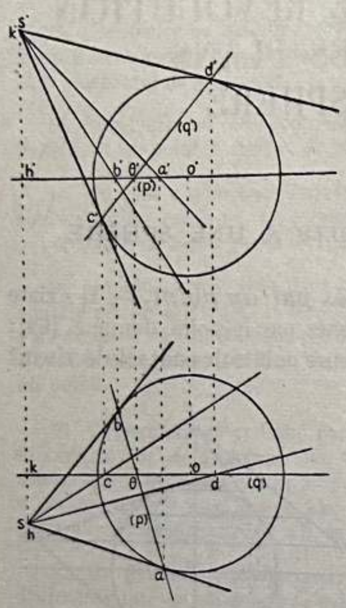

Fig. 227.

On aurait de même les points du cercle L situés sur le grand cercle frontal de la sphère en menant par S la droite de bout qui rencontre le plan frontal du centre en (k, k') et en menant par k' (confondu avec s' sur l'épure) les tangentes au grand cercle, ce qui donne les points (c, c') et (d, d'). Ces points sont réels et distincts si s' est extérieur au contour apparent en projection frontale de la sphère (O). La droite (q, q') qui joint les points obtenus est la droite conjuguée (ou réciproque) de la droite de bout du point S.

Détermination du plan polaire d'un point par rapport à une sphère. — Nous venons de déterminer les deux droites (p, p') et (q, q') du plan polaire Π de S par rapport à la sphère (O), situées respectivement dans le plan horizontal et dans le plan frontal du centre. On vérifie que ces droites se coupent en un point (θ, θ'); les points θ et θ' sont, sur l'épure, les pôles de la ligne de rappel ss' par rapport aux projections du grand cercle horizontal et du grand cercle frontal de la sphère.

Les droites (p) et (q') sont respectivement les polaires de s et s' par rapport aux projections du grand cercle horizontal et du grand cercle frontal, ce qui permet de les construire même quand l'un des points s ou s' est intérieur au grand cercle de contour apparent correspondant.

On peut encore observer que, toutes les droites conjuguées des droites passant par S étant situées dans le plan polaire de S, ce plan polaire peut être déterminé par les conjuguées de la droite verticale et de la droite de bout du point S.

En résumé, *les traces du plan polaire du point* S *sur le plan horizontal et sur le*

plan frontal du centre de la sphère se projettent suivant les polaires des projections de S *par rapport aux cercles de contour apparent en projection de cette sphère.*

Ce résultat généralise celui qui avait été obtenu au nº 58 pour les traces du plan tangent en un point.

106. *Contours apparents du cône circonscrit à la sphère.* — Soit Σ le cône circonscrit de sommet S à la sphère (O). Un plan tangent vertical au cône Σ est un plan tangent vertical à la sphère (O). Or tous les plans tangents verticaux à la sphère ont leurs points de contact sur le grand cercle horizontal; on est ramené à chercher les points de contact, situés sur ce grand cercle horizontal, de plans tangents passant par le point S. Ce problème a été résolu au paragraphe précédent; sur la figure 227, les points (a, a') et (b, b') répondent à la question, et les génératrices de contour apparent horizontal du cône Σ sont $(sa, s'a')$ et $(sb, s'b')$.

Le contour apparent en projection horizontale du cône Σ *est formé par les tangentes menées au contour apparent en projection horizontale de la sphère par la projection horizontale du sommet.* Ces tangentes sont réelles si s est extérieur au cercle (o). Si s est situé sur (o), le cône Σ admet une génératrice verticale, ce cas particulier a été étudié au nº 81. Si s est intérieur au cercle (o), le cône Σ n'a pas de contour apparent horizontal.

Une étude analogue où les plans tangents verticaux sont remplacés par les plans tangents de bout conduit au contour apparent frontal du cône Σ. Les génératrices de contour apparent frontal (fig. 227) sont $(sc, s'c')$ et $(sd, s'd')$.

Le contour apparent en projection frontale du cône Σ *est formé par les tangentes menées au contour apparent en projection frontale de la sphère par la projection frontale du sommet.* Ces tangentes sont réelles si s' est extérieur au cercle (o'). Si s' est situé sur (o'), Σ admet une génératrice de bout. Si s' est intérieur au cercle (o'), le cône Σ n'a pas de contour apparent frontal.

107. *Symétries des projections du cercle de contact.* — 1º *Le sommet est dans le plan horizontal ou dans le plan frontal du centre de la sphère.* — Le plan polaire du sommet est vertical ou de bout et l'on est ramené à une question déjà traitée (60). Sur la figure 229, le cercle de contact L se projette frontalement suivant le segment $c'd'$, horizontalement suivant l'ellipse dont c et d sont les sommets du petit axe, et dont on obtient les sommets du grand axe en portant $\omega\alpha = \omega\beta = \omega'c'$, le point (ω, ω') étant le centre de L.

2º *Cas général.* — On se ramène successivement, par des changements de plan, à chacun des cas particuliers précédents.

Pour obtenir les éléments de symétrie de la projection horizontale (l) on fait un changement de plan frontal de façon que le sommet soit dans le nouveau plan de front du centre de la sphère (fig. 228). On choisit pour nouveau plan frontal le plan vertical so, et l'on compte les cotes à partir du plan horizontal du centre. De la nouvelle projection frontale s'_1 du sommet on mène les tangentes au nouveau contour apparent en projection frontale (qui coïncide avec l'ancien contour apparent en projection horizontale puisque o'_1 coïncide avec o); les points de contact p'_1 et q'_1 se rappellent en p et q sur so; ce sont les sommets du petit axe de (l). Le centre est (ω, ω'_1) et les sommets du grand axe, α et β, sont tels que $\omega\alpha = \omega\beta = \omega'_1p'_1 = \omega'_1q'_1$.

Pour obtenir les éléments de symétrie de la projection frontale (l'), on fait un changement de plan horizontal de façon que le sommet soit dans le nouveau plan horizontal du centre de la sphère. On choisit pour nouveau plan horizontal le plan de bout $s'o'$ et l'on compte les éloignements à partir du plan de front du centre. De la nouvelle projection horizontale s_2 du sommet on mène les tangentes au cercle (o_2), qui coïncide avec le cercle (o'); les points de contact u_2 et v_2 se rappellent en u' et v' sur $s'o'$; ce sont les sommets du petit axe de (l'). Le centre est (ω_2, ω') et les sommets du grand axe, γ' et δ', sont tels que $\omega'\gamma' = \omega'\delta' = \omega_2 u_2 = \omega_2 v_2$.

On vérifiera que ω et ω' sont sur la même ligne de rappel et que $\omega\alpha = \omega'\gamma'$. Il y aurait lieu, pour compléter l'épure, de marquer sur (l) les projections horizontales des points c', d', u', v', γ', δ' de (l'), et de marquer sur (l') les projection frontales des points a, b, p, q, α, β de (l).

Si S est un foyer lumineux, le cercle L est la séparatrice d'ombre et de lumière sur la sphère.

Nous avons ponctué le cercle L sur la sphère.

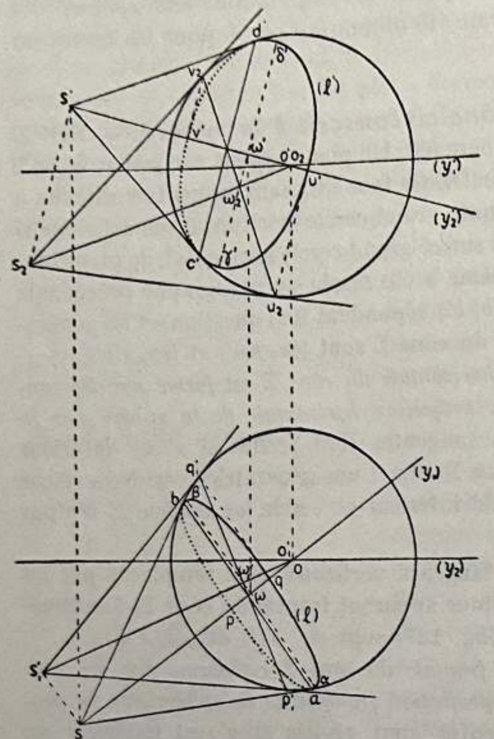

Fig. 228.

108. ***Ombre au flambeau portée par la sphère sur un plan.*** — Nous supposerons pour simplifier que ce plan est un plan de projection. Le point S étant un foyer lumineux, l'ombre portée par la sphère (O) sur le plan horizontal de projection fait partie de l'intersection de ce plan avec le cône circonscrit Σ, de sommet S.

Le plan vertical contenant S et O est un plan de symétrie pour la figure; on peut toujours supposer, en effectuant au préalable un changement de plan frontal, que ce plan est de front.

La trace horizontale L_1 du cône Σ est une conique, le cône de révolution étant du second ordre. D'ailleurs le théorème de Dandelin (*Sup.* II, 433) permet d'étudier géométriquement cette question.

La courbe L_1 est une ellipse si le plan horizontal de S ne contient pas de génératrice réelle du cône Σ, c'est-à-dire si S est au-dessus du plan horizontal tangent à la sphère (O) en son point le plus haut, ou au-dessous du plan tangent au point le plus bas. La courbe L_1 est une hyperbole si S est situé entre les deux plans horizontaux tangents à la sphère. La courbe L_1 est une parabole si S est situé sur l'un ou l'autre de ces deux plans.

Exemple I. — La figure 229 est faite dans l'hypothèse où la courbe L_1 est une ellipse. On a immédiatement les sommets c_1 et d_1 du grand axe de L_1 dans le plan de symétrie frontal.

La sphère étant tangente en f au plan horizontal, ce point est un foyer de L_1.

La section Σ par le plan tangent à la sphère en son point le plus haut (g, g') a un foyer en ce point; par homothétie de centre S, l'autre foyer de L_1 est la trace de $(sg, s'g')$, sur le plan horizontal, soit g_1.

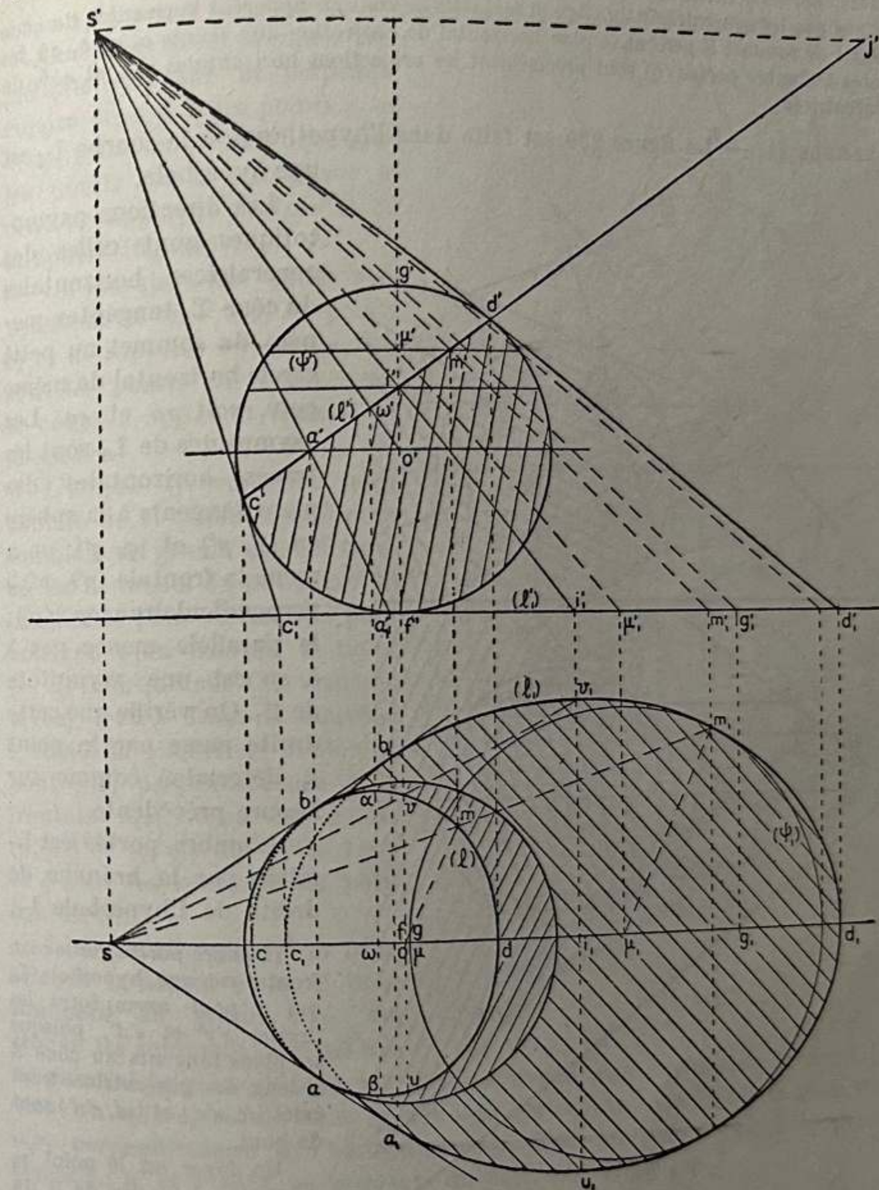

Fig. 229.

Le centre de L_1 est le milieu i_1 de c_1d_1 et l'on peut construire les sommets du petit axe, u_1 et v_1 $(fu_1 = i_1c_1)$. La projection de la division harmonique $(c_1d_1i_1\infty)$ sur le plan du cercle L, à partir du sommet, donne la division harmonique $(c'd'i'j')$, $s'j'$ étant horizontale. Il résulte de là que i' est le pôle de $s'j'$ par rapport au cercle (o'), en d'autres termes le point i' est dans le plan de profil du centre; les sommets u_1 et v_1 correspondent aux points u et v situés dans le plan de profil du centre.

Si m_1 correspond à un point courant m de (l), la tangente en m_1 à L_1 est la trace horizontale du plan tangent à la sphère en (m, m'), elle est donc perpendiculaire à om. Observons aussi que la projection conique (ψ_1) du petit cercle horizontal (ψ) qui passe par m est un cercle centré au point μ_1, projection conique du centre μ du petit cercle; μm est parallèle à $\mu_1 m_1$ et par suite (ψ_1) est tangent à (l_1) en m_1 et au point symétrique par rapport au grand axe. Ce résultat est conforme au théorème du n° 68 sur l'enveloppe des perspectives sur un plan d'une famille de courbes génératrices d'une surface.

Notons que les génératrices $(sa, s'a')$ et $(sb, s'b')$ de contour apparent horizontal du cône circonscrit de sommet S percent le plan horizontal de projection aux points a_1 et b_1 où les tangentes à l'ombre portée (l_1) sont précisément les projections horizontales saa_1 et sbb_1 de ces génératrices.

Exemple II. — La figure 230 est faite dans l'hypothèse où la courbe L_1 est une hyperbole.

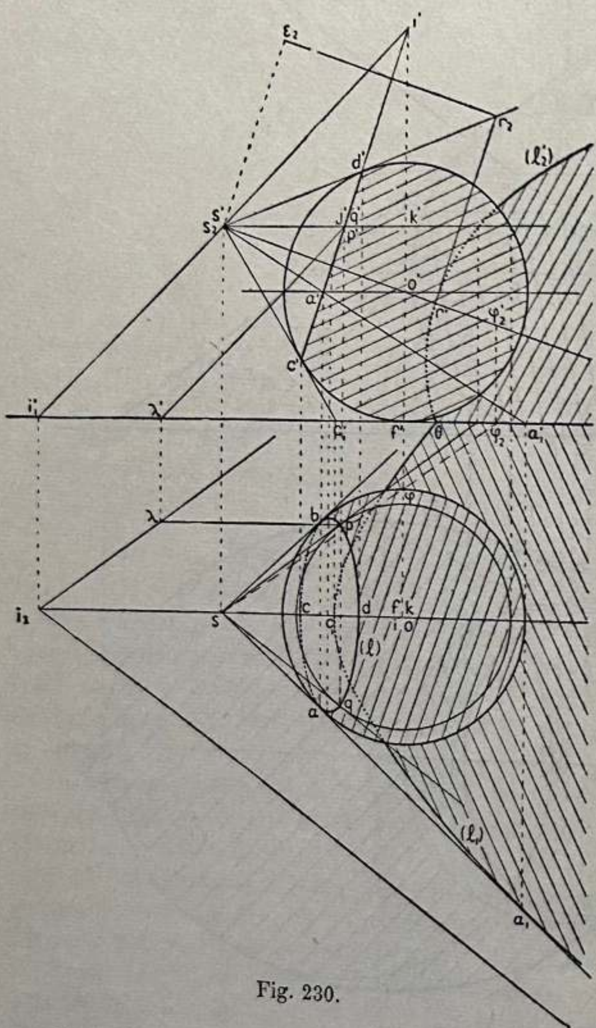

Fig. 230.

Les directions asymptotiques sont celles des génératrices horizontales du cône Σ, tangentes menées du sommet au petit cercle horizontal de même cote, soit sp et sq. Les asymptotes de L_1 sont les traces horizontales des plans tangents à la sphère en (p, p') et (q, q'); on a mené la frontale $(p\lambda, p'\lambda')$ perpendiculaire à $(op, o'p')$; la parallèle menée par λ à sp est une asymptote de L_1. On vérifie que cette droite passe par le point i_1 déterminé comme sur l'épure précédente.

L'ombre portée est limitée par la branche de droite de l'hyperbole L_1.

L'ombre portée sur le plan frontal est une hyperbole L_2 qui a pour asymptotes les droites $s'c'$ et $s'd'$, puisque les plans tangents au cône Σ le long des génératrices frontales $(sc, s'c')$ et $(sd, s'd')$ sont de bout.

Un foyer est le point φ_2' projection à partir de S du point φ le plus en arrière de la sphère. On en déduit le sommet r' en portant $s'r_2 = s'\varphi_2'$ sur l'asymptote et en menant de r_2 la perpendiculaire sur $s'o'$.

On peut aussi déterminer le sommet en prenant $s'o'$ pour nouveau plan horizontal de projection, les éloignements étant comptés à partir du plan de front du centre de la sphère. L'ancien plan frontal de projection a pour trace dans le nouveau système la droite $\varepsilon_2 r_2$ dont la distance à $s'o'$ égale l'ancien éloignement du centre. Cette droite coupe les génératrices situées dans le nouveau plan horizontal (et qui, sur l'épure, sont confondues avec $s'c'$ et $s'd'$) en des points qui donnent les sommets de (l_2'); (r_2, r') est l'un d'eux.

Les courbes L_1 et L_2 ont en commun les points situés sur la ligne de terre, points communs à cette droite et au cône Σ.

109. ***Cylindre circonscrit à la sphère.*** — 1° *Courbe de contact.* — Les plans tangents à la sphère (O) parallèles à la direction Δ enveloppent le cylindre circonscrit parallèlement à Δ. Leurs points de contact décrivent le grand cercle L de la sphère qui est situé dans le plan Π perpendiculaire à Δ mené par le centre.

On peut ainsi marquer immédiatement sur la perpendiculaire en o à δ les points a et b, rappelés en a' et b' qui sont les points de L situés sur le contour apparent horizontal de la sphère (fig. 231).

On marque aussi, sur la perpendiculaire en o' à δ' les points c' et d' rappelés en c et d, qui sont les points de L situés sur le contour apparent frontal de la sphère.

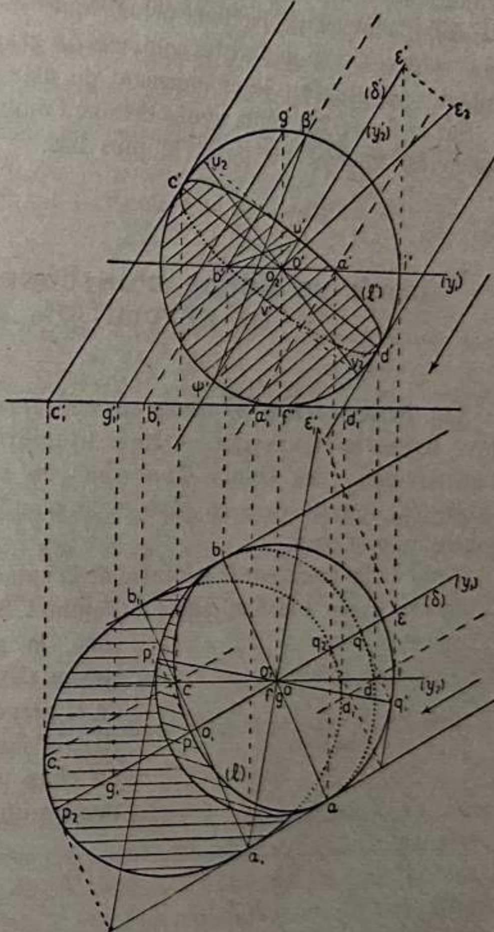

Fig. 231.

L'ellipse (l) projection horizontale de L admet a et b pour sommets du grand axe. On trouve les sommets du petit axe en prenant le plan vertical $o\delta$ pour nouveau plan frontal; le point $(\varepsilon, \varepsilon')$ marqué sur $O\Delta$ vient en $\varepsilon_1'(\varepsilon\varepsilon_1' = i'\varepsilon')$. Dans le nouveau système le plan Π est le plan de bout $p_1'q_1'$ perpendiculaire à la frontale $o_1'\varepsilon_1'$, d'où les points (p, p_1') et (q, q_1') du cercle L; p et q sont les sommets du petit axe de (l).

L'ellipse (l') projection frontale de L admet c' et d' pour sommets du grand axe. On trouve les sommets du petit axe en prenant le plan de bout $o'\delta'$ pour nouveau plan horizontal; le point $(\varepsilon, \varepsilon')$ vient en $\varepsilon_2(\varepsilon'\varepsilon_2 = i\varepsilon)$. Dans le nouveau système le plan Π est le plan vertical u_2v_2 perpendiculaire à l'horizontale $o_2\varepsilon_2$ d'où les points (u_2, u') et (v_2, v') du cercle L; u' et v' sont les sommets du petit axe de (l').

Remarque. — On peut aussi déterminer u' et v' en observant que le cercle (o') se déduit de l'ellipse (l') par une affinité d'axe $c'd'$ dans laquelle à b' correspond β' sur la perpendiculaire menée de b' à $c'd'$; les droites $b'u'$ et $\beta'\psi'$ se coupent sur l'axe d'affinité.

Une construction analogue peut être faite en projection horizontale.

2° *Contours apparents.* — Comme dans le cas du cône circonscrit on montrerait que les génératrices de contour apparent horizontal sont celles qui passent par les points (a, a') et (b, b'), et que les génératrices de contour apparent frontal sont celles qui passent par les points (c, c') et (d, d').

3° *Ombre au soleil portée par la sphère sur un plan.* — L'ombre portée sur le plan horizontal, par exemple, par la sphère (O) qu'éclairent des rayons lumineux parallèles à Δ est la trace horizontale du cylindre circonscrit parallèle à Δ.

Cette trace est une ellipse dont les sommets du petit axe sont les projections cylindriques des points (a, a') et (b, b') et dont les foyers, d'après le théorème de Dandelin, sont les projections cylindriques des points le plus haut et le plus bas de la sphère. On en déduit les sommets du grand axe; ces sommets peuvent aussi s'obtenir en utilisant le changement de plan frontal vu précédemment.

Sur la figure 231 nous avons dessiné l'ombre portée par la sphère sur le plan horizontal tangent au point le plus bas.

BASES DE MONGE D'UN CÔNE OU D'UN CYLINDRE DE RÉVOLUTION. APPLICATIONS

110. ***Intersection de deux cônes circonscrits à la même sphère.*** — I. — ÉTUDE PRÉLIMINAIRE. — Nous utiliserons pour cette étude une propriété caractéristique des points d'un cône de révolution faisant intervenir une sphère (Σ) inscrite dans ce cône et le plan (H) du cercle de contact de cette sphère avec le cône.

Nous désignerons par O le centre de la sphère (Σ), par S le sommet du cône, par X son axe, et par α le demi-angle au sommet. Si M désigne un point quelconque du cône, la génératrice SM est tangente à la sphère (Σ) en un point A, et si E est le pied de la perpendiculaire menée de M sur le plan (H), la figure 232, qui représente la section du cône par le plan méridien du point M, montre immédiatement que

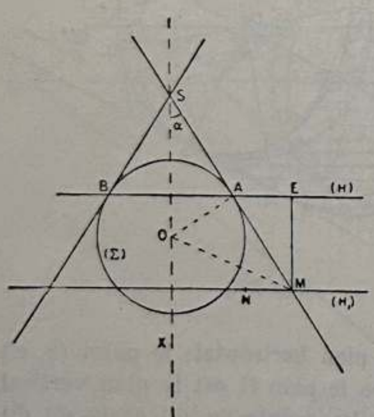

Fig. 232.

$$\text{(1)} \qquad \frac{MA}{ME} = \frac{1}{\cos\alpha}.$$

En appelant distance tangentielle d'un point M à une sphère la longueur d'une tangente issue de ce point à la sphère, limitée au point M et au point de contact, on voit que MA est la distance tangentielle de M à la sphère (Σ). ME est d'autre part la distance de M au plan (H), et l'égalité (1) exprime que, pour tout point M du cône, le rapport de la distance *tangentielle* σ_M de ce point à une sphère inscrite, à la distance *normale* h_M de ce point au plan de raccordement, est égal à $\frac{1}{\cos\alpha}$, α étant le demi-angle au sommet :

$$\text{(2)} \qquad \sigma_M = \frac{h_M}{\cos\alpha}.$$

Observons que la puissance de M par rapport à la sphère Σ est $\mathfrak{P}_\Sigma(M) = OM^2 - \rho^2$ ρ désignant le rayon de Σ, et que $\mathfrak{P}_\Sigma(M) = \sigma_M^2$ en sorte que l'égalité (2) peut encore s'exprimer par l'égalité

$$\text{(3)} \qquad \mathfrak{P}_\Sigma(M) = \frac{h_M^2}{\cos^2\alpha}.$$

Montrons qu'inversement tout point N de l'espace tel que le rapport de sa distance tangentielle à Σ à sa distance normale au plan H soit égale à $\frac{1}{\cos\alpha}$ est un point du cône (S). Cherchons en effet les points N situés dans un plan (H_1) parallèle à (H); si δ est la distance des plans H et H_1, la puissance de ces points par rapport à Σ est $\frac{\delta^2}{\cos^2\alpha}$, c'est donc que leur distance au point O est telle que $ON^2 = \rho^2 + \frac{\delta^2}{\cos^2\alpha}$, ces points forment le cercle commun au plan (H_1) et à la sphère qui a pour centre O et pour rayon $\sqrt{\rho^2 + \frac{\delta^2}{\cos^2\alpha}}$.

Or le cône (S) coupe le plan (H_1) suivant un cercle dont tous les points sont distants du point O de la même longueur $\sqrt{\rho^2 + \frac{\delta^2}{\cos^2\alpha}}$, les points N appartiennent au cône (S).

En résumé, nous énoncerons :

THÉORÈME. — *Tout cône de révolution est le lieu géométrique des points* M *de l'espace dont la distance tangentielle à une sphère inscrite* Σ *et la distance normale au plan* H *du cercle de contact sont dans le rapport* $\frac{1}{\cos\alpha}$, *α étant le demi-angle au sommet du cône.*

Remarque. — L'étude précédente s'applique à un cylindre de révolution et à une sphère inscrite à ce cylindre à la condition de remplacer $\frac{1}{\cos\alpha}$ par 1, c'est-à-dire de supposer $\alpha = 0$.

II. — ETUDE DE L'INTERSECTION DE DEUX CÔNES CIRCONSCRITS A LA MÊME SPHÈRE. — Soit S et T les sommets des deux cônes (S) et (T) circonscrits à la même sphère Σ de centre O, X et Y les axes de ces cônes, α et β les demi-angles au sommet, H et K les plans des cercles de contact. M étant un point commun aux deux cônes nous désignons par σ sa distance tangentielle à (Σ), par h et k ses distances aux plans (H) et (K). Ces quantités vérifient les relations

$$\text{(4)} \qquad \sigma = \frac{h}{\cos\alpha}, \qquad \text{(5)} \qquad \sigma = \frac{k}{\cos\beta},$$

et par suite aussi la relation.

$$\text{(6)} \qquad \frac{h}{k} = \frac{\cos\alpha}{\cos\beta};$$

inversement, si un point de l'espace vérifie les relations (4) et (6), il vérifie aussi la relation (5), et c'est un point commun aux deux cônes. L'intersection des deux cônes est donc l'intersection de l'un d'eux avec la surface (G) caractérisée par (6); cette surface est le lieu géométrique des points de l'espace dont le rapport des distances aux plans H et K est égal à $\frac{\cos\alpha}{\cos\beta}$, ce lieu se compose de deux plans R_1 et R_2 passant par la droite Δ commune aux plans H et K et conjugués harmoniques par rapport à eux.

Ce fait peut s'établir de la façon suivante : 1° si M est un point de (G), tout point N de la parallèle menée par M à Δ est aussi sur (G) et tout point N homothétique de M dans une homothétie dont le centre est un point de Δ est aussi sur (G); (G) se compose de plans contenant Δ; 2° On cherche la trace de ces plans sur un plan Π perpendiculaire à Δ; si on donne h, k s'en déduit et l'on obtient 4 points de G, aux sommets d'un parallélogramme centré sur Δ et dont les côtés sont les parallèles aux traces de (H) et (K), distantes respectivement de h et de k.

La démonstration précédente s'appliquerait aussi dans le cas d'un cône et d'un cylindre circonscrits à une même sphère, elle pourrait également s'appliquer au cas de deux cylindres circonscrits à la même sphère.

En résumé, nous énoncerons :

Théorème. — **Deux surfaces coniques ou cylindriques circonscrites à une même sphère se coupent suivant deux courbes planes dont les plans forment un faisceau harmonique avec les plans des cercles de contact.**

Généralisation. — La Géométrie analytique permet de démontrer plus généralement le *théorème de Monge* dont l'énoncé précédent n'est qu'un cas particulier :

Deux surfaces du second ordre circonscrites à une même surface du second ordre se coupent suivant deux courbes planes dont les plans sont conjugués harmoniques par rapport aux plans des deux courbes de contact. (*Spéc.*, III, 592).

Remarque. — On peut démontrer que le lieu géométrique des points M de l'espace tels que, une sphère Σ et un plan H étant donnés,

$$\mathfrak{P}_{\Sigma}(\mathrm{M}) = \lambda h_{\mathrm{M}}^2,$$

λ étant une constante positive ou négative, est une surface de révolution du second ordre ayant pour axe la perpendiculaire à H menée par le centre O de Σ. Cette surface n'est un cône que si $\lambda = \frac{1}{\cos^2 \alpha}$, en désignant par $\frac{\pi}{2} - \alpha$ l'angle sous lequel H coupe Σ.

111. Exemples. — Si X et Y sont les axes de deux surfaces coniques ou cylindriques circonscrites à la sphère Σ de centre O, le plan XOY est un plan de symétrie pour chacune des deux surfaces et par suite aussi pour leur intersection. Nous supposerons ce plan horizontal dans les figures suivantes.

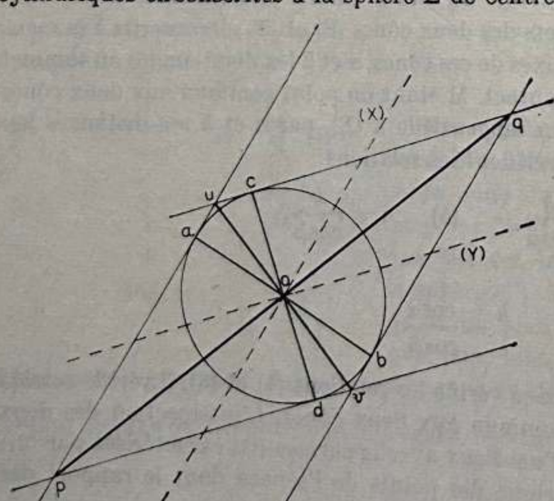

Fig. 233.

Exemple I. — La figure 233 est relative au cas de deux cylindres. Les génératrices de contour apparent horizontal forment un parallélogramme dont les sommets p, q, u, v, sont les points de l'intersection situés dans le plan de symétrie XOY. Les plans de contact sont les plans verticaux ab et cd, ils ont en commun la verticale o du centre de la sphère. Les plans

des coniques communes sont donc les plans verticaux pq et uv; le plan vertical pq coupe chaque cylindre suivant l'ellipse qui a pour grand axe le segment pq et pour petit axe le diamètre vertical de la sphère.

On observe d'ailleurs que la symétrie par rapport à l'un des plans bissecteurs des droites OX et OY transforme l'un des cylindres en l'autre; ces cylindres ont donc même section dans chacun des deux plans de symétrie verticaux pq et uv.

Exemple II. — La figure 234 est relative au cas de deux cônes ayant pour sommets S et T. Les génératrices situées dans le plan horizontal XOY sont Sa, Sb, Tc, Td; elles forment un quadrilatère complet dont les diagonales sont ST, pq et uv. On a démontré (*Spéc.*, III, 498; *Sup.*, I, 202) que le triangle diagonal $i\alpha\beta$ de ce

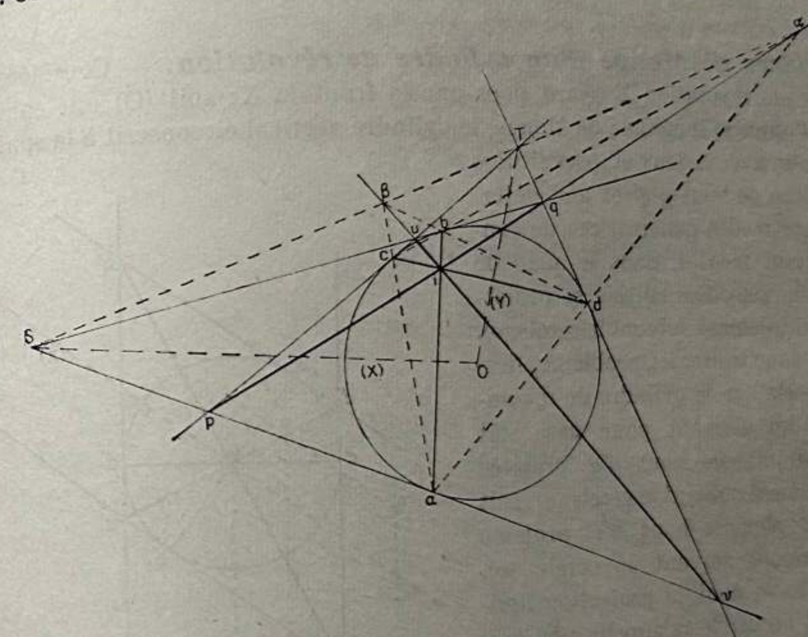

Fig. 234.

quadrilatère complet est un triangle conjugué par rapport au cercle (O), et que $i\alpha\beta$ est aussi le triangle diagonal du quadrangle formé par les points de contact des quatre tangentes, a, b, c, d. En particulier ab, cd, pq, uv concourent en i et comme les points α et β divisent harmoniquement S et T, les polaires uv et pq forment un faisceau harmonique avec ab et cd.

Le plan vertical pq coupe chaque cône suivant la même conique ayant p et q pour sommets et contenant les points I et J où la verticale Δ commune aux plans de contact coupe la sphère (Σ). De même le plan vertical uv coupe chaque cône suivant la conique ayant u et v pour sommets et contenant les points I et J.

Si l'un des points p, q, u, v est rejeté à l'infini, la conique correspondante est une parabole. Si les points S et T sont symétriques par rapport au centre O de la sphère, les deux cônes ont même ligne à l'infini, et se coupent suivant une conique commune à distance finie.

Exemple III. — La figure 235 est relative au cas où la droite ST est tangente à la sphère. Cette droite est une génératrice commune aux deux cônes, le long de laquelle les deux cônes ont le même plan tangent, le plan vertical ST. Le reste de leur intersection est leur section commune par le plan vertical ap, p étant commun aux autres génératrices Sb et Td situées dans le plan XOY. Les plans verticaux ST et ap sont conjugués harmoniques par rapport aux plans verticaux ab et ad qui contiennent les cercles de contact (la droite ap est la polaire par rapport au cercle du point β commun à ST et bd).

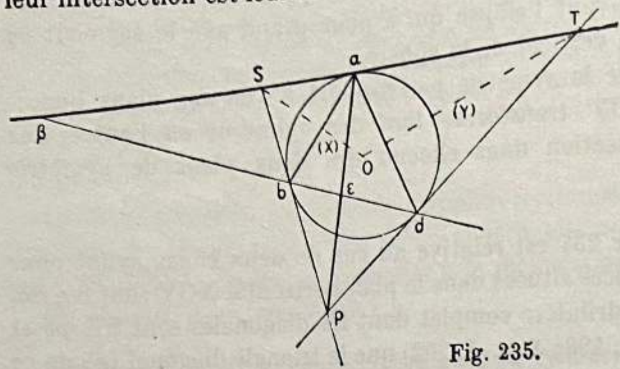

Fig. 235.

112. ***Bases de Monge d'un cylindre de révolution.*** — Considérons le cylindre de révolution Σ ayant pour axe la frontale X; soit (O) une sphère inscrite. D'après le théorème de Monge, le cylindre vertical circonscrit à la sphère a en commun avec Σ deux ellipses situées dans les plans de bout $p'q'$ et $u'v'$ déterminés à partir des génératrices de contour apparent frontal, dans le plan de front X (fig. 236). Ces ellipses se projettent horizontalement suivant le cercle (o). On pourra donc traiter les problèmes descriptifs usuels sur le cylindre de révolution Σ en lui donnant pour base soit l'ellipse du plan de bout $p'q'$ projetée horizontalement suivant le cercle (o), soit l'ellipse du plan de bout $u'v'$ projetée horizontalement suivant le cercle (o). Une telle base, dont la projection horizontale est un cercle, s'appelle une *base de Monge pour la projection horizontale ;* tout plan de bout parallèle à $p'q'$ ou à $u'v'$ coupe le cylindre Σ suivant une ellipse dont la projection horizontale est un cercle, on dit que c'est un *plan de Monge pour la projection horizontale.*

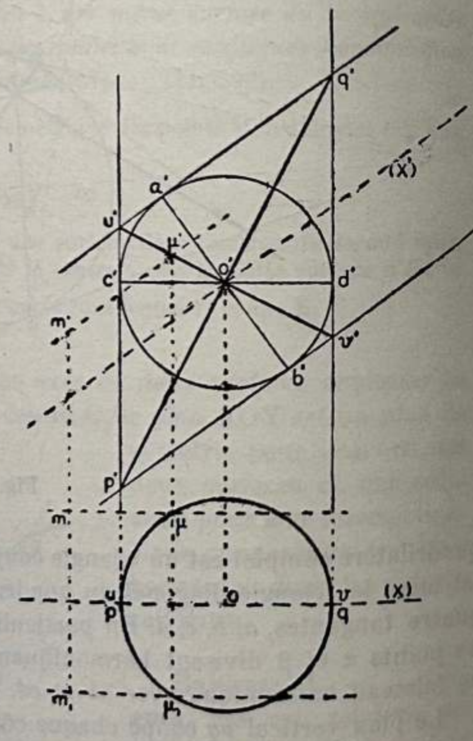

Fig. 236.

Une base de Monge d'un cylindre de révolution d'axe frontal offre la particularité d'avoir deux projections simples; la projection horizontale est un cercle et la projection frontale est un segment de droite. Pour un tel cylindre une base de Monge est d'un emploi plus commode que celui d'une section droite, celui-ci nécessitant un rabattement.

Si l'on cherche par exemple la projection horizontale d'un point de Σ projeté frontalement en m', on mène la génératrice de ce point qui s'appuie sur la base $u'v'$ en un point μ' qui se rappelle sur le cercle (o) en μ ou en μ_1, d'où l'on déduit m et m_1 sur les génératrices correspondantes.

Résumons la marche à suivre pour obtenir une base de Monge :

Pour obtenir une base de Monge d'un cylindre de révolution Σ dont l'axe est frontal, on construit successivement les contours apparents frontaux d'une sphère O inscrite dans le cylindre Σ, et d'un cylindre vertical circonscrit à la sphère O. Les sécantes communes aux génératrices de contour apparent frontal des deux cylindres sont les traces frontales des plans de bout qui contiennent les bases de Monge cherchées relatives à la projection horizontale.

Remarque. — Si le cylindre Σ a son axe horizontal, la considération du cylindre de bout circonscrit à une sphère inscrite donne, pour la projection frontale, des bases de Monge dans des plans verticaux.

Lorsque le cylindre Σ a son axe non parallèle à un plan de projection, les coniques en lesquelles se décompose son intersection avec le cylindre vertical circonscrit à une sphère (O) inscrite dans Σ sont situées dans des plans dont la direction n'offre aucune particularité; il en est de même pour le cylindre de bout circonscrit à la sphère (O). On peut encore définir des bases de Monge, mais leur emploi est moins commode parce qu'une seule de leurs projections est simple.

113. ***Bases de Monge d'un cône de révolution.*** — Considérons un cône de révolution Σ de sommet S, d'axe de front X. Soit (O) une sphère inscrite, $a'b'$ le plan de bout du cercle de contact (fig. 237). D'après le théorème de Monge, le cylindre vertical circonscrit à la sphère le long du grand cercle horizontal $c'd'$ coupe le cône Σ suivant deux ellipses dont les plans contiennent la droite de bout $i'j'$ commune aux plans des deux cercles de contact. Les plans de ces ellipses se déterminent à partir des génératrices de contour apparent frontal, situées dans le plan de front X; on trouve ainsi les plans de bout $p'q'$ et $u'v'$. Chacun d'eux coupe le cône suivant une ellipse projetée horizontalement suivant le cercle (o); on pourra donc traiter les problèmes descriptifs usuels sur le cône de révolution Σ en lui donnant pour base, soit l'ellipse du plan de bout $p'q'$ projetée horizontalement suivant le cercle (o), soit l'ellipse du plan de bout $u'v'$ projetée horizontalement suivant le cercle (o). Une telle base dont la projection horizontale est un cercle s'appelle une *base de Monge pour la projection horizontale.* Tout plan de bout parallèle à $p'q'$ ou à $u'v'$ coupe le cône suivant une ellipse dont la projection horizontale est un cercle; on dit que c'est un *plan de Monge pour la projection horizontale.*

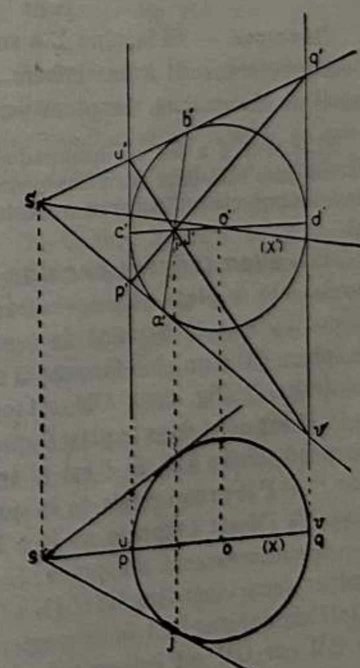

Fig. 237.

Une base de Monge d'un cône de révolution d'axe frontal offre la particularité d'avoir deux projections simples : la projection horizontale est un cercle, la projection frontale est un segment de droite. Nous verrons au paragraphe suivant que l'emploi d'une base de Monge est avantageux pour un tel cône.

Résumons la marche à suivre pour obtenir une base de Monge :

Pour obtenir une base de Monge d'un cône de révolution Σ dont l'axe est frontal, on construit successivement les contours apparents frontaux d'une sphère O inscrite dans le cône et d'un cylindre vertical circonscrit à la sphère O. Les sécantes communes aux génératrices de contour apparent frontal du cône et du cylindre sont les traces frontales des plans de bout qui contiennent les bases de Monge cherchées relatives à la projection horizontale.

Si le cône de révolution Σ possède une génératrice verticale (fig. 238), le cylindre vertical circonscrit à la sphère inscrite (O) possède la même génératrice verticale, le long de laquelle les deux surfaces ont le même plan tangent de profil; leur intersection se complète par l'ellipse du plan de bout $a'p'$ qui admet le cercle (o) pour projection horizontale. Le cône Σ n'a plus qu'une famille de bases de Monge pour la projection horizontale.

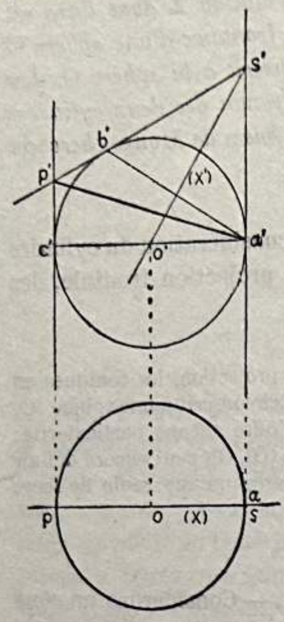

Fig 238.

Remarque. — Si le cône Σ a son axe horizontal, la considération du cylindre de bout circonscrit à une sphère inscrite donne, pour la projection frontale, des bases de Monge dans des plans verticaux.

Si le cône Σ a son axe quelconque, on peut encore définir des bases de Monge, mais comme elles sont dans des plans quelconques, leur emploi est moins commode, une seule de leurs projections étant remarquable.

114. *Plan tangent par une droite à une sphère.* — 1° *Emploi du grand cercle dont le plan est perpendiculaire à la droite.*

— Soit M le point de contact avec la sphère (O) d'un plan tangent Q contenant la droite D (fig. 239). OM est orthogonal à D, M est donc dans le plan P mené par O perpendiculaire à D. Si I est la trace de D sur P, et Γ le grand cercle de la sphère situé dans P, IM est tangente en M à Γ.

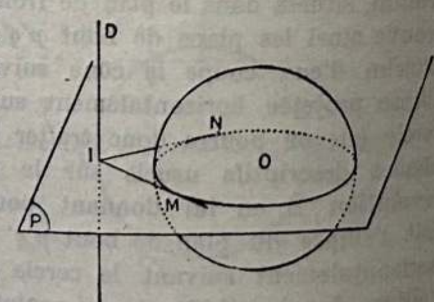

Fig. 239.

Réciproquement, du point I on peut mener deux tangentes IM et IN à Γ; le plan Q déterminé par D, I, M est perpendiculaire à OM car OM est orthogonale à D et perpendiculaire à IM; ce plan est donc tangent en M à la sphère (O); de même le plan Q_1 déterminé par D et N est tangent en N à la sphère (O).

Le problème admet deux solutions si le point I est extérieur au grand cercle Γ. La droite MN joignant les deux points de contact est la droite conjuguée de D par rapport à la sphère (O).

L'application de la méthode précédente sur une épure est simple si la droite D est parallèle à un plan de projection.

La figure 240 est faite en supposant D horizontale. Le plan diamétral P est vertical; on a rabattu le grand cercle Γ sur le plan horizontal du centre, I se rabat en i_1 d'où l'on a mené les tangentes i_1m_1 et i_1n_1; les relèvements (m, m') et (n, n') des points de contact déterminent avec la droite D les plans tangents cherchés.

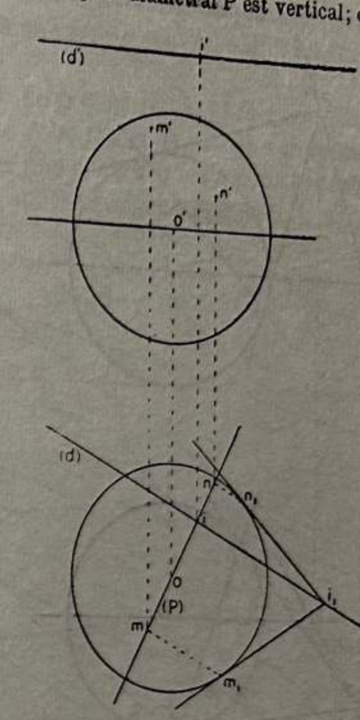

Fig. 240.

2° *Emploi d'un cône circonsrit.* — Si la droite D est quelconque, on préfère utiliser la remarque suivante. Soit S un point quelconque de D; le cône Σ de sommet S circonscrit à la sphère (O) est tangent aux plans Q et Q_1 le long de SM et SN respectivement.

Réciproquement, si l'on mène par la droite D les plans tangents au cône circonscrit de sommet S, ces plans sont tangents à la sphère puisque tout plan tangent au cône est tangent à la sphère; ce sont les plans tangents cherchés.

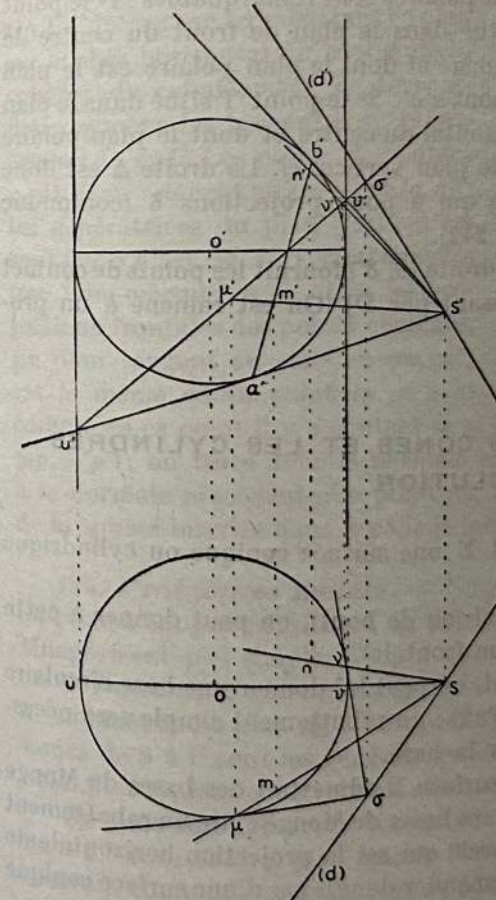

Fig. 241.

On retiendra la règle suivante :

Pour mener par une droite D les plans tangents à une sphère, on substitue à la sphère un cône circonscrit ayant son sommet S sur la droite D.

On choisit S dans le plan de front du centre de la sphère pour que le cône ait son axe de front et pour pouvoir lui donner une base de Monge dans un plan de bout; on peut aussi choisir S dans le plan horizontal du centre et donner au cône circonscrit une base de Monge dans un plan vertical.

Observons que la droite MN joignant les points de contact des plans tangents cherchés est située dans le plan polaire du point S par rapport à la sphère (O).

Sur la figure 241, le point S a été choisi dans le plan de front du centre; le tracé des génératrices de contour apparent frontal $s'a'$ et $s'b'$ permet d'obtenir la base de Monge dans le plan de bout $u'v'$. La droite D perce ce plan de base au point (σ, σ') d'où l'on a mené les tangentes à la base, ce qui a conduit à mener de σ les tangentes $\tau\mu$ et $\sigma\nu$ au cercle (o). Les génératrices de contact $(s\mu, s'\mu')$ et $(s\nu, s'\nu')$ sont tangentes à la sphère aux points (m, m') et (n, n') situés dans le plan polaire de S, qui est ici le plan de bout $a'b'$. Les plans (D, M) et (D, N) répondent à la question.

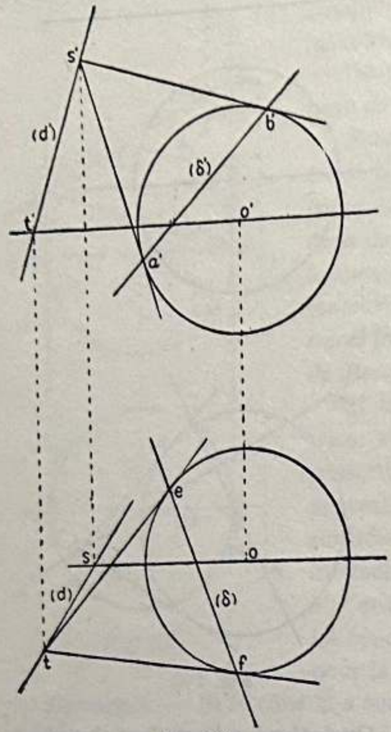

Fig. 242.

Lorsque la droite D est parallèle à la ligne de terre, on substitue à la sphère le cylindre circonscrit parallèle à la ligne de terre, cylindre dont on détermine une base de Monge.

3° *Emploi de la droite conjuguée.* — On sait que la droite MN qui joint les points de contact des deux plans tangents menés par D est la droite Δ conjuguée (ou réciproque) de D par rapport à la sphère (*Spéc.*, I, 199; *Sup.*, II, 426), et que cette droite conjuguée est commune à tous les plans polaires des points de D.

Or il existe deux points de D dont les plans polaires sont remarquables : 1° le point S situé dans le plan de front du centre de la sphère et dont le plan polaire est le plan de bout $a'b'$; 2° le point T situé dans le plan horizontal du centre et dont le plan polaire est le plan vertical ef. La droite Δ est donc celle qui a pour projections δ (confondue avec ef) et δ' (confondue avec $a'b'$) (fig. 242).

L'intersection avec la sphère (O) de la droite (δ, δ') fournit les points de contact cherchés M et N des plans tangents passant par D) (On est ramené à un problème connu (59 et 122).

PROBLÈMES USUELS SUR LES CÔNES ET LES CYLINDRES DE RÉVOLUTION

115. ***Méthodes générales.*** — Soit Σ une surface conique ou cylindrique de révolution.

1° Si l'axe de cette surface est vertical (ou de bout), on peut donner à cette surface une base circulaire horizontale (ou frontale).

2° Si l'axe de cette surface est de front, on peut lui donner une base circulaire dans un plan de bout perpendiculaire à l'axe; un rabattement simple sera nécessaire pour effectuer les tracés usuels sur la base.

On a vu aux nos 112 et 113 que la surface Σ admettait des bases de Monge dans des plans de bout; l'utilisation de ces bases de Monge évite un rabattement tout en permettant des tracés sur un cercle qui est la projection horizontale de la base. Cette méthode est donc à recommander dans le cas d'une surface conique ou cylindrique de révolution dont l'axe est de front.

Il en est de même pour une surface Σ d'axe horizontal, pour laquelle on utilisera une base de Monge située dans un plan vertical.

3° Si l'axe de la surface Σ est quelconque, l'utilisation d'une base circulaire dans un plan perpendiculaire à l'axe conduit à un rabattement sans simplification; elle est à éviter.

On pourrait déterminer encore une base de Monge, mais celle-ci est située dans un plan dont la direction est quelconque et les tracés ne sont pas immédiats.

On préfère souvent dans ce cas considérer une sphère inscrite dans le cône ou dans le cylindre et utiliser le contact avec la sphère des génératrices de la surface conique ou cylindrique considérée et des plans qui lui sont tangents.

Soit par exemple (fig. 243) la sphère (O) inscrite dans le cône Σ de sommet S; cherchons les points du cône projetés horizontalement en m. Le plan vertical sm coupe la sphère (O) suivant un petit cercle vertical Γ qui a pour diamètre la corde ab du grand cercle horizontal. Les tangentes menées de S à Γ sont les génératrices de Σ situées dans le plan vertical sm. On les détermine en rabattant ce plan sur le plan horizontal du centre de la sphère; du rabattement s_1 du sommet on mène les tangentes au rabattement Γ_1 de Γ. Les points de contact p_1 et q_1 se relèvent en (p, p') et (q, q'); les génératrices du plan vertical sm sont $(sp, s'p')$ et $(sq, s'q')$; c'est sur elles que l'on marque en m' et m'_1 les projections frontales des points cherchés. Le plan tangent au cône en (m, m') est le même qu'au point (p, p'), et comme en ce point il y a contact avec la sphère, on a immédiatement la normale $(op, o'p')$; on trace donc la normale en (m, m') en menant $(m\omega, m'\omega')$ parallèle à la normale précédente; le point (ω, ω') où elle s'appuie sur l'axe est le centre de la sphère inscrite dans le cône le long du parallèle du point (m, m').

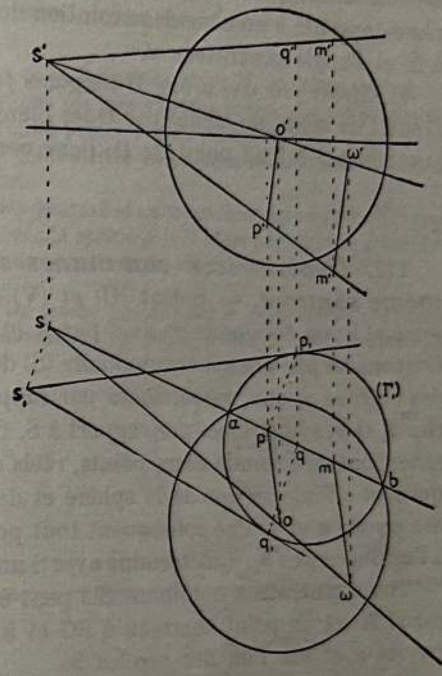

Fig. 243.

116. ***Problèmes usuels.*** — Nous ne les examinerons que dans l'hypothèse où l'axe n'est pas parallèle à un plan de projection, et où l'emploi d'une base de Monge n'est pas simple.

1° *Intersection avec une droite* D. — Soit (O) une sphère inscrite dans le cône Σ de sommet S. Le plan (S, D) coupe la sphère (O) suivant un cercle Γ; les tangentes issues de S à Γ sont les génératrices du cône qui rencontrent D aux points cherchés M et N; leur construction effective nécessite en général un rabattement

On peut aussi observer que les points de contact A et B des tangentes menées de S à Γ sont dans le plan polaire P de S par rapport à la sphère (O), donc sur la droite L commune au plan P et au plan (S, D); l'intersection de L avec la sphère (O) fournissant les points A et B, les génératrices SA et SB rencontrent la droite D aux points cherchés M et N.

2° *Plans tangents menés par un point* A. — Les plans tangents menés par le point A au cône Σ contiennent la droite SA et sont tangents à toute sphère inscrite dans le cône. Réciproquement, (O) étant une sphère inscrite dans le cône Σ, les plans tangents à cette sphère menés par la droite SA répondent à la question; on est ramené au problème du n° 114.

Remarque. — Il suffit de supposer que le sommet S est à l'infini lorsque la surface Σ est un cylindre de révolution d'axe quelconque.

Applications. — I. *Mener par une droite* D *les plans faisant l'angle donné* α *avec une droite* Δ. — D'après l'étude faite au n° 68, il suffit de mener par D les plans tangents à un cône de révolution dont le sommet S est sur D, l'axe parallèle à Δ, et l'angle générateur α.

II. *Mener par une droite* D *les plans faisant l'angle donné* α *avec un plan* Π. — Il suffit de même de mener par D les plans tangents à un cône de révolution dont le sommet S est un point de D, l'axe perpendiculaire à Π, et l'angle générateur $\frac{\pi}{2} - \alpha$.

117. *Génératrices communes à deux cônes de révolution de même sommet.* — Soient (U) et (V) deux cônes de révolution ayant même sommet S; on désigne leurs axes par X et Y, leurs angles générateurs par u et v. Coupons-les par une sphère auxiliaire (S) de centre S. Le cône (U) est coupé suivant deux cercles α_1 et α_2 symétriques par rapport à S, le cône (V) suivant deux cercles β_1 et β_2 symétriques par rapport à S. Or deux cercles α et β tracés sur la même sphère ont en commun deux points, réels ou imaginaires, distincts ou confondus, qui sont à l'intersection de la sphère et de la droite Δ commune aux plans P et Q des cercles α et β. Par conséquent tout point commun à l'un des cercles α_1, α_2 et à l'un des cercles β_1, β_2 détermine avec S une génératrice commune aux deux cônes.

Toute génératrice commune SG peut être obtenue par la méthode précédente car si M est un point commun à SG et à la sphère (S), M est situé sur l'un des cercles α et sur l'un des cercles β.

Pour compter le nombre des solutions, nous supposerons que le plan des deux axes SX et SY a été pris pour plan horizontal de la figure 244. Les génératrices horizontales du cône (U) sont sa_1 et $sb_1[\widehat{Xsa_1} = u]$, celles du cône (V) sont se_1 et $sf_1[\widehat{Yse_1} = v]$. Les cercles communs à (U) et (S) sont le cercle vertical α_1 de diamètre a_1b_1, et le cercle α_2 symétrique par rapport à S; les cercles communs à (V) et (S) sont le cercle vertical β_1 de diamètre e_1f_1, et le cercle β_2 symétrique par rapport à S. Le plan P_1 de α_1 et le plan Q_1 de β_1 ont en commun une verticale δ qui rencontre la sphère (S) en deux points M et N réels ou imaginaires suivant que la trace de δ est intérieure ou extérieure au grand cercle (s); de même le plan P_2 de α_2 et le plan Q_1 de β_1 ont en commun une verticale ε qui rencontre la sphère (S) en deux points M_1 et N_1 réels ou imaginaires. La considération du plan Q_2 de β_2 et des plans P_1 et P_2 donnerait sur la

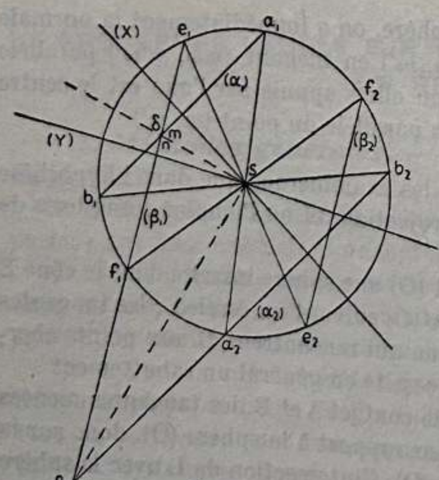

Fig. 244.

sphère (S) les points symétriques des précédents par rapport au centre, et par suite conduirait aux mêmes génératrices communes aux deux cônes, SM et SN, SM_1 et SN_1. Résumons cette étude : *deux cônes de révolution de même sommet ont en général quatre génératrices communes, réelles ou deux à deux imaginaires conjuguées.*

Si deux cercles α et β étaient tangents, les deux cônes seraient tangents le long d'une génératrice commune, cette génératrice compterait pour deux unités dans le dénombrement des génératrices communes.

Deux cônes de révolution de même sommet et d'axes rectangulaires peuvent être tangents le long de deux génératrices communes.

Sur la figure 244, les points M et N sont réels, les points M_1 et N_1 sont imaginaires. On observera que, dans tous les cas, les projections des génératrices communes sur le plan des axes sont réelles, ce sont les droites $s\delta$ et $s\varepsilon$, les points δ et ε étant communs à a_1b_1 et e_1f_1 d'une part, et a_2b_2 et e_1f_1 d'autre part. Les génératrices communes sont situées dans deux plans réels perpendiculaires au plan des axes.

Dans la pratique, il suffit de déterminer les droites δ et ε perpendiculaires au plan de symétrie XSY et de prendre leurs intersections avec la sphère (S); il suffit par suite de considérer une nappe de l'un des cônes et de l'associer aux deux nappes de l'autre cône.

Exemple. — *On demande de construire les droites passant par le point donné* S *et faisant des angles donnés* u *et* v *avec les plans horizontaux et les plans frontaux respectivement.* Ces droites sont les génératrices communes au cône (U) d'axe vertical X dont l'angle générateur est $\frac{\pi}{2} - u$ et au cône (V) d'axe de bout Y dont l'angle générateur est $\frac{\pi}{2} - v$. (fig. 245). Une sphère auxiliaire de centre S coupe la nappe inférieure de (U) suivant le cercle horizontal α_1, et les deux nappes de (V) suivant les cercles de front β_1 et β_2, ce qui donne immédiatement les points m, n, m_1 et n_1 rappelés en m' et n' dans le plan horizontal α'_1, et par suite quatre solutions obtenues en joignant S à ces quatre points, solutions deux à deux symétriques par rapport aux plans horizontal, frontal et de profil du point S.

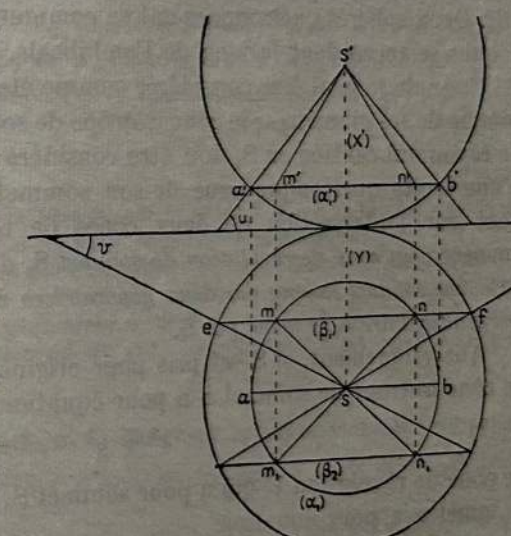

Fig. 245.

Le problème n'est possible que si la distance de s à β_1 (R sin$v$, R étant le rayon de la sphère auxiliaire) est inférieure ou égale au rayon du cercle α_1(R cos$u$); par suite $\sin v \leqslant \sin\left(\frac{\pi}{2} - u\right)$ et, puisqu'il s'agit d'angles aigus, $u + v \leqslant \frac{\pi}{2}$. Si $u + v = \frac{\pi}{2}$, il y a deux solutions doubles dans le plan de profil du point S.

118. *Intersection de deux cônes de révolution ayant même sommet et même axe.* — Soient U et V deux cônes de révolution ayant même sommet S et même axe Sz. Un plan H perpendiculaire à Sz les coupe suivant deux cercles ayant même centre au point Ω, trace de Sz sur H. Ces deux cercles n'ont en commun que les points cycliques I et J du plan H; on doit en outre les considérer comme tangents en I et J aux droites ΩI et ΩJ (*Spéc.*, I, 182; *Sup.*, I, 193). Par suite les cônes U et V ont en commun les génératrices isotropes SI et SJ du plan

P mené par le sommet perpendiculairement à l'axe, et ils se raccordent le long de ces génératrices, les plans tangents étant déterminés par les génératrices SI et SJ et par les tangentes en I et J aux deux bases du plan H, c'est-à-dire par les droites ΩI et ΩJ ; ces plans tangents sont les plans SΩI et SΩJ.

En résumé, *deux cônes de révolution ayant même sommet et même axe se raccordent le long de deux génératrices isotropes situées dans le plan mené par le sommet commun perpendiculairement à l'axe commun.*

Cône isotrope. — Tout point situé sur une droite isotrope issue de S, dans un plan quelconque contenant ce point, est à une distance nulle de S (*Spéc.*, I, 150; *Sup.*, I, 174); un tel point appartient aussi à la sphère de centre S et de rayon nul. Une telle sphère doit être considérée comme une sphère dégénérée, elle ne diffère pas du cône de sommet S engendré par les droites isotropes issues de ce point, ce cône est appelé *cône isotrope* de sommet S (*Spéc.*, I, 179).

Une droite isotrope issue de S dans un plan P contenant ce point est tangente en son point à l'infini, I, à tout cercle de centre S tracé dans ce plan ; on doit donc considérer cette droite isotrope comme tangente au point I à l'infini à toute sphère de centre S. Le cône isotrope de sommet S doit donc être considéré comme circonscrit à toute sphère de centre S le long de sa courbe à l'infini, appelée *ombilicale*. Deux sphères quelconques ont en commun l'ombilicale, deux sphères concentriques se raccordent le long de l'ombilicale.

Une sphère peut être considérée comme étant de révolution autour d'un quelconque de ses diamètres; le cône isotrope de sommet S n'étant autre que la sphère de rayon nul centrée en S, doit être considéré comme étant de révolution autour d'une droite quelconque issue de son sommet; en appliquant le résultat précédent sur l'intersection de deux cônes de révolution de même axe, on peut énoncer : *un cône de révolution de sommet* S, *d'axe* Sz *se raccorde au cône isotrope de même sommet le long des deux génératrices isotropes* SI, SJ *situées dans le plan perpendiculaire à* Sz *mené par* S.

Analytiquement, si S est pris pour origine de trois axes rectangulaires Sxyz, le cône isotrope de sommet S a pour équation

$$x^2 + y^2 + z^2 = 0, \tag{1}$$

le cône de révolution U qui a pour sommet S, pour axe Sz et pour demi-angle au sommet α a pour équation

$$x^2 + y^2 - z^2 \operatorname{tg}^2 \alpha = 0. \tag{2}$$

Les coordonnées des points communs à ces deux cônes vérifient les équations (1) et (2), ou le système équivalent

$$x^2 + y^2 = 0, \qquad z^2 = 0,$$

ce qui montre le raccordement le long des isotropes SI et SJ du plan xOy.

Application. — Un plan Π ne contenant pas S coupe le cône de révolution U suivant une conique (Γ) contenant les points M et N où la trace de Π sur le plan P perpendiculaire en S à l'axe Sz coupe les génératrices isotropes SI et SJ. Les tangentes à (Γ) en ces points étant situées dans les plans tangents zSI, zSJ, se projettent orthogonalement sur le plan P suivant les isotropes SI, SJ, qui sont ainsi tangentes en M et N à la projection orthogonale (γ) de (Γ) sur le plan P, ce qui montre que S est un foyer pour (γ), MN étant la directrice correspondante. On retrouve ainsi un résultat connu : *toute section plane d'un cône de révolution se projette orthogonalement sur un plan perpendiculaire à l'axe suivant une conique ayant pour foyer le pied de l'axe sur ce plan* (*Sup.*, II, 434).

119. ***Plans tangents communs à deux cônes de révolution de même sommet.*** — Soient (O_1) et (O_2) des sphères inscrites dans chacun des deux cônes de révolution Σ_1 et Σ_2 de même sommet S. Tout plan tangent commun à Σ_1 et Σ_2 est tangent aux deux sphères (O_1) et (O_2), et réciproquement tout plan tangent aux deux sphères mené par le point S est tangent aux deux cônes. Or on démontre aisément (*Sup.*, II, 423) que les plans tangents communs à deux sphères sont les plans tangents à l'une des sphères menés par un de leurs centres d'homothétie, Ω_1 et Ω_2. Finalement, les plans tangents communs aux deux cônes sont les plans tangents à l'une des sphères, (O_1) par exemple, menés par les droites SΩ_1 et SΩ_2.

Naturellement, si l'un des cônes a un axe parallèle à un plan de projection, on peut mener les plans tangents à ce cône par les droites SΩ_1 et SΩ_2.

Si les deux sphères inscrites choisies ont même rayon, le centre d'homothétie directe Ω_1 est rejeté à l'infini sur la droite des centres O_1O_2, le centre d'homothétie inverse Ω_2 est le milieu du segment O_1O_2.

Remarque. — Le problème précédent peut se ramener au problème du n° 117 par la considération des cônes supplémentaires (*Spéc.*, II, 396; *Sup.*, II, 418). Le cône supplémentaire du cône Σ_1 construit avec le sommet S, est le cône Φ_1 de même axe dont l'angle générateur est complémentaire du premier; on définit de même le cône Φ_2, supplémentaire du cône Σ_2, construit avec S pour sommet. A tout plan tangent commun aux cônes Σ_1 et Σ_2 correspond la perpendiculaire menée par S, qui est une génératrice commune aux cônes supplémentaires Φ_1 et Φ_2, et réciproquement.

Exemple. — *Soit à chercher les plans passant par le point donné* S *et faisant des angles donnés u et v avec les plans horizontaux et les plans frontaux respectivement.*

La perpendiculaire menée par S à un plan répondant à la question fait l'angle u avec la verticale de S et l'angle v avec la droite de bout de S; elle est commune aux cônes de révolution : 1° d'axe vertical SX et d'angle générateur u; 2° d'axe de bout SY et d'angle générateur v. On est ramené à la construction du n° 117. Le problème n'est possible que si $u + v \geqslant \frac{\pi}{2}$.

On pourra également traiter ce problème en cherchant les plans tangents communs : 1° au cône de révolution d'axe vertical SX et d'angle générateur $\frac{\pi}{2} - u$; 2° au cône de révolution d'axe de bout SY et d'angle générateur $\frac{\pi}{2} - v$. On inscrira dans ces deux cônes des sphères égales, de centres O_1 et O_2 et on mènera les plans tangents à l'un des deux cônes : 1° par la parallèle à O_1O_2 menée par S; 2° par la droite joignant S au milieu de O_1O_2.

Remarque sur les cylindres de révolution d'axes parallèles. — Pour trouver les génératrices communes à deux cylindres de révolution Σ_1 et Σ_2 dont les axes ont même direction Δ, on les coupe par un plan auxiliaire P perpendiculaire à Δ, ce qui donne deux cercles; les génératrices communes passent par les points communs à ces deux cercles. Il existe en général deux génératrices communes à distance finie, réelles ou imaginaires, qui peuvent être confondues si les cylindres sont tangents le long d'une génératrice.

Pour trouver les plans tangents communs aux deux cylindres Σ_1 et Σ_2, on leur inscrit des sphères (O_1) et (O_2) et on mène les plans tangents à l'une des sphères par les droites parallèles à Δ et issues des centres d'homothétie des deux sphères.

EXERCICES

Problèmes sur les sections planes d'une sphère, d'un cone de révolution, d'un cylindre de révolution

1. Étant donné un cône de révolution et un point A de ce cône, mener par un point donné P un plan coupant le cône suivant une conique dont A soit un sommet de l'axe focal.

2. On donne une sphère S, un plan P coupant S suivant un cercle C, et une droite Δ. Mener par Δ un plan coupant S suivant un cercle Γ orthogonal à C.

3. Trouver l'ombre portée par une droite sur une sphère.

4. Par un point donné A, mener un plan P coupant la sphère (O) donnée suivant un cercle Γ dont la projection horizontale ait une grandeur donnée.

5. Trouver un plan coupant une sphère donnée suivant un cercle se projetant horizontalement suivant une ellipse se déduisant par translation d'une ellipse donnée du plan horizontal.

6. Trouver une direction de lumière telle que les ombres portées par une sphère donnée sur les plans de projections soient semblables à deux ellipses données.

7. Construire une tangente de direction donnée à la trace horizontale d'un cône de sommet S :
1° ayant pour base une section plane d'une sphère donnée;
2° circonscrit à une sphère donnée.

8. Étant donné un cône de révolution et un point intérieur A, déterminer une section plane ayant un foyer en A.

9. Trouver un foyer lumineux S tel que l'ombre portée par une sphère donnée sur un plan horizontal donné soit :
1° une parabole tangente à une droite D donnée en un point A donné;
2° une hyperbole dont on donne une asymptote et un point;
3° une hyperbole dont on donne un sommet et une direction asymptotique.

10. Trouver un foyer lumineux S tel que les ombres portées par une sphère donnée sur les plans de projection soient deux paraboles dont l'une a une grandeur donnée.

11. Mener par une droite donnée un plan coupant un cône de révolution donné d'axe frontal :
1° suivant une ellipse semblable à une ellipse donnée;
2° suivant une hyperbole dont les asymptotes font un angle donné;
3° suivant une parabole.

12. Mener par un point donné A un plan coupant un cône de révolution donné d'axe frontal suivant une parabole dont la directrice passe par A.

Problèmes sur les tangentes et les plans tangents a une sphère, a un cone de révolution ou a un cylindre de révolution.

13. Par un point donné, mener un plan tangent à une sphère qui fasse un angle donné avec un plan de projection, ou qui fasse un angle donné avec la ligne de terre.

14. Mener par une droite des plans tangents à une sphère centrée sur la ligne de terre.

15. Mener par une droite donnée un plan coupant une sphère donnée suivant un cercle de rayon donné.

16. On donne une sphère S et un point A dans le plan frontal de son centre. Mener par A une horizontale Δ telle que les plans tangents menés par Δ à S soient rectangulaires.

17. Mener à un cylindre de révolution, déterminé par son axe et une sphère inscrite, un plan tangent faisant un angle donné avec un plan de projection.

18. Construire une normale commune à une droite et à un cône de révolution donnés.

19. Construire une normale commune à deux cônes de révolution donnés, l'un d'axe frontal, l'autre d'axe horizontal.

20. On donne un cylindre de révolution dont l'axe est de front et un point A dans le plan frontal de l'axe. Mener par A une tangente au cylindre faisant un angle donné avec la ligne de terre.

21. On donne une sphère S et un point I dans le plan de front de son centre. Mener par I :
1° une tangente à S faisant un angle donné avec sa projection horizontale;
2° deux tangentes à S ayant même projection frontale et faisant entre elles un angle donné.

Détermination d'un cone de révolution ou d'un cylindre de révolution par diverses conditions.

22. Construire un cylindre de révolution connaissant :
1° deux génératrices et une tangente;
2° une génératrice et deux tangentes;
3° la direction de l'axe et trois points (ou trois tangentes);
4° une sphère inscrite et deux points (ou deux tangentes);
5° une sphère inscrite, un point et une tangente;
6° deux plans tangents et un point;
7° deux normales et une tangente;
8° une ellipse tracée sur le cylindre.

23. Construire un cône de révolution connaissant :
1° trois génératrices (on construira la quatrième génératrice commune à deux des cônes répondant à la question);
2° trois plans tangents (en particulier on considère l'un des cônes de révolution tangents aux plans de projection et à un plan de profil donné; connaissant l'une des projections d'un point de ce cône, trouver l'autre);
3° une génératrice et deux plans tangents;
4° deux génératrices et un plan tangent;
5° une sphère inscrite et trois tangentes (ou trois points);
6° une sphère inscrite, deux points (ou deux tangentes) et l'angle au sommet;
7° une sphère inscrite, l'angle au sommet, et sachant que le sommet est sur une droite donnée;
8° l'axe, le sommet et deux points conjugués;
9° l'axe et sachant qu'il est tangent à une droite donnée en un point donné;
10° le sommet, l'angle générateur, et sachant qu'il admet un plan tangent horizontal et un plan tangent frontal.
11° une conique tracée sur le cône et la direction d'une génératrice;
12° une conique tracée sur le cône et sachant que l'axe rencontre une droite donnée;
13° deux points et sachant qu'il est tangent à un plan donné le long d'une droite donnée;
14° deux génératrices et sachant qu'il est tangent à une sphère donnée.

24. On donne un cercle γ dans le plan horizontal de projection, un point S dans le plan de front du centre de γ, et un plan de bout P. Déterminer un cône de révolution de sommet S sachant qu'un certain plan parallèle à P le coupe suivant une ellipse dont γ est la projection horizontale.

25. On donne un cône de révolution d'axe vertical, non sécant à la ligne de terre. Trouver les contours apparents du cône de révolution qui passe par un point donné et par les deux droites imaginaires communes au premier cône et au plan mené par le sommet et la ligne de terre.

Problèmes divers.

26. Trouver une sphère passant par deux points donnés A et B, tangente à une sphère donnée en un point situé dans un plan donné.

27. Un cône de révolution de sommet S est tangent au plan horizontal de S; le faire tourner autour de la verticale de S de façon qu'il devienne tangent à une sphère donnée.

28. Un cylindre de révolution a son axe horizontal; le faire tourner autour d'une droite de bout donnée rencontrant l'axe de façon qu'il devienne tangent à une sphère donnée.

29. On donne deux points S et T. Déterminer un cône de révolution de sommet S dont l'axe est vertical et un cône de révolution de sommet T dont l'axe est de bout sachant que les deux cônes ont même angle générateur et sont tangents.

30. On donne un cône de révolution d'axe vertical, de sommet S, et une frontale Δ passant par S. On considère une génératrice variable SG du cône et on construit les bissectrices de l'angle ΔSG; étudier le cône décrit par ces bissectrices : trace horizontale, contours apparents, sections circulaires.

CHAPITRE XII

INTERSECTION DE DEUX SURFACES (SPHÈRES, CÔNES, CYLINDRES)

GÉNÉRALITÉS SUR LES COURBES ALGÉBRIQUES

120. *Rappel de définitions.* — On dit qu'une courbe gauche est *algébrique* si elle appartient à deux surfaces algébriques. On appelle *ordre d'une courbe gauche algébrique* le nombre des points réels ou imaginaires, distincts ou confondus, à distance finie ou infinie, communs à cette courbe et à un plan quelconque.

L'intersection complète de deux surfaces algébriques S et S′ d'ordres n et p est une courbe algébrique Γ d'ordre np; cette intersection peut se décomposer en plusieurs courbes algébriques dont la somme des degrés est np (on dit que l'intersection complète Γ des surfaces S et S′ est formée de deux courbes algébriques distinctes Γ' et Γ'' lorsqu'il est possible de faire passer par l'une de ces courbes une surface algébrique ne contenant pas l'autre).

Par exemple, l'intersection complète de deux surfaces du second ordre est une courbe du quatrième ordre. Lorsque l'intersection n'est pas décomposée, on dit que c'est une *biquadratique gauche*. Comme nous le verrons ultérieurement, cette courbe peut se décomposer en une droite et une courbe du troisième ordre, ou en deux courbes du second ordre distinctes ou confondues, l'une de ces courbes, ou même les deux, pouvant se réduire à deux droites situées dans le même plan.

Si l'intersection de deux surfaces du second ordre comprend une courbe Γ du troisième ordre, cette courbe ne peut avoir tous ses points dans le même plan puisque toute section plane d'une surface du second ordre est une courbe du second ordre; la courbe Γ est une *cubique gauche*.

Comme il n'existe pas deux entiers plus grands que 1 dont le produit égale 3, une cubique gauche ne peut être l'intersection complète de deux surfaces algébriques.

Courbes du second ordre. — Par trois points pris sur une courbe du second ordre faisons passer un plan P. L'équation qui a pour racines les abscisses des points communs à la courbe et au plan P est du second degré et comme elle admet pour racines les abscisses des points choisis, elle se réduit à une identité, ce qui exige que toute la courbe soit dans le plan P ou qu'elle se décompose en deux droites dont l'une est dans ce plan. Ainsi, *une courbe du second ordre est plane à moins qu'elle ne soit formée de deux droites non situées dans le même plan.*

Cônes algébriques. — Le cône Σ qui a pour sommet un point A et pour directrice une courbe algébrique Γ est un cône algébrique (*Spéc.*, I, 178).

Si A n'est pas sur Γ et si Γ est d'ordre n, le cône Σ est d'ordre n puisqu'un plan