CHAPITRE II

DYNAMIQUE DU POINT LIBRE

LE PREMIER PROBLÈME DE LA DYNAMIQUE DU POINT LIBRE

730. Le premier problème de la dynamique du point libre peut s'énoncer ainsi : *Connaissant le mouvement d'un point matériel, trouver la force capable de produire ce mouvement.*

Supposons connues, en fonction de l'époque t, les coordonnées x, y, z du mobile dans un système formé d'axes constituant un repère sidéral, les composantes scalaires de la force demandée sont

$$X = m\frac{d^2x}{dt^2}, \qquad Y = m\frac{d^2y}{dt^2}, \qquad Z = m\frac{d^2z}{dt^2},$$

m étant la masse du point matériel considéré.

Les expressions de X, Y, Z ainsi trouvées sont, en général, des fonctions de t. Mais les relations

$$x = f(t), \quad \frac{dx}{dt} = f'(t), \quad y = g(t), \quad \frac{dy}{dt} = g'(t), \quad z = h(t), \quad \frac{dz}{dt} = h'(t),$$

où $f(t)$, $g(t)$, $h(t)$ sont des fonctions connues, permettent d'une infinité de manières, d'exprimer t et par suite X, Y, Z en fonction de x, y, z, $\frac{dx}{dt}$, $\frac{dy}{dt}$, $\frac{dz}{dt}$ et, si l'on veut, de t. Le mouvement donné pourra être produit par l'une quelconque des forces ainsi obtenues, il suffira de faire agir cette force sur le point matériel placé en un point de la trajectoire donnée, à l'époque où il doit être en ce point et avec la vitesse correspondant à cette époque.

On peut même, au moyen des relations

$$x = f(t), \qquad y = g(t), \qquad z = h(t),$$

exprimer X, Y, Z au moyen de x, y, z et définir ainsi des champs de forces tous capables de produire le mouvement donné à la condition de placer le point matériel considéré en un point de la trajectoire donnée, en lui imprimant la vitesse correspondante.

Exemple I. — 1° Supposons qu'un point matériel de masse m soit animé du mouvement défini par les équations

$$x = at^2 + bt + c, \qquad y = a't^2 + b't + c', \qquad z = a''t^2 + b''t + c''$$

dans lesquelles $a, b, c, \ldots, c''$ désignent des nombres donnés. On trouve

$$X = 2ma, \qquad Y = 2ma', \qquad Z = 2ma''.$$

Il existe une force constante en grandeur, direction et sens capable de produire le mouvement donné quand les conditions initiales sont convenablement choisies. Mais, remarquons-le, cette solution n'est pas la seule; on pourrait, par exemple, en obtenir d'autres en ajoutant aux expressions trouvées des fonctions de x, y, z s'annulant pour tous les points de la trajectoire donnée.

Exemple II. — Le mouvement des planètes et l'attraction universelle. Rappelons les lois dans lesquelles Képler parvint à réunir les résultats de très nombreuses observations portant sur le mouvement des planètes et notamment celles, très précises, faites par Tycho-Brahé sur la planète Mars.

1re *Loi de Képler. — Les planètes décrivent des ellipses dont le centre du Soleil occupe un foyer.*

2e *Loi de Képler. — Les aires balayées par le rayon vecteur allant du centre du Soleil au centre d'une planète sont proportionnelles aux temps employés à les balayer.*

3e *Loi de Képler. — Les carrés des durées des révolutions des planètes sont proportionnels aux cubes des demi-grands axes de leurs orbites.*

Assimilons une planète P à un point matériel M. Puisque ce point décrit une ellipse en obéissant à la loi des aires relativement au foyer O qui est le centre du soleil, son accélération est constamment dirigée vers O; la mesure algébrique de cette accélération est, d'après la formule de Binet,

$$\Gamma = -\frac{C^2}{r^2}\left[\frac{1}{r} + \left(\frac{1}{r}\right)''\right] \tag{1}$$

O étant le pôle. Le rayon vecteur est donné en fonction de l'angle polaire θ par l'équation de l'ellipse qui s'écrit

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{p} + \frac{e}{p}\cos\theta,$$

en supposant que l'axe polaire est l'axe focal orienté du foyer O vers la directrice correspondante, p est le paramètre $\frac{b^2}{a}$, a étant le demi-axe focal et b le demi-petit axe de l'orbite.

La formule (1) donne ainsi

$$\Gamma = -\frac{C^2a}{b^2}\cdot\frac{1}{r^2}.$$

La constante des aires C est le double de la mesure de l'aire balayée par le rayon vecteur OM pendant l'unité de temps, on l'obtient en divisant le double de la mesure de l'aire de l'ellipse, soit $2\pi ab$, par la durée T de la révolution de la planète, ce qui donne $C = \frac{2\pi ab}{T}$ et, par suite

$$\Gamma = -\frac{4\pi^2a^3}{T^2}\cdot\frac{1}{r^2}.$$

Or, d'après la troisième loi de Képler le rapport $\frac{a^3}{T^2}$ est le même pour toutes les planètes. Le mouvement des planètes est donc celui qu'elles auraient si elles étaient soumises au champ de forces déterminé par une attraction émanant du centre du soleil, cette attraction ayant pour mesure $\frac{m\mu}{r^2}$, m étant la masse de la planète, r la distance de son centre à celui du soleil et μ un certain coefficient.

On peut aussi mettre la mesure de cette force attractive sous la forme $k\dfrac{mM}{r^2}$, M étant la mesure de la masse du soleil. Newton eut l'intuition géniale que le coefficient k devait être le même pour l'attraction mutuelle de deux astres quelconques de masses m et M situés à la distance r. Il s'éleva ainsi à la loi de l'attraction universelle dont toutes les conséquences concordent avec les résultats des observations des mouvements célestes. Elle peut s'énoncer ainsi : *Deux points matériels quelconques exercent l'un sur l'autre une attraction dirigée suivant la droite qui les joint; l'intensité de cette attraction a pour mesure* $k\dfrac{mm'}{d^2}$, *d désignant la distance des deux points, m et m' leurs masses et k une constante.*

Dans le système CGS, $k = 6{,}667 \times 10^{-8}$.

Remarque générale. — Si le mouvement donné est rapporté à la Terre il suffit, dans les circonstances usuelles, d'ajouter à $m\dfrac{d^2x}{dt^2}$, $m\dfrac{d^2y}{dt^2}$, $m\dfrac{d^2z}{dt^2}$, les composantes scalaires de la force $-m\vec{g}$ opposée au poids du point matériel M pour trouver les composantes scalaires de la force $\vec{F}$ qui, adjointe au poids, serait capable d'imprimer à M le mouvement donné. Si le poids est négligeable on procède comme si la Terre était un repère sidéral.

Quand, dans un problème, on doit tenir compte du poids de certains points matériels ou de certains corps, on le spécifie dans l'énoncé soit en donnant ce poids, soit en précisant que tels points ou tels corps sont pesants.

GÉNÉRALITÉS SUR LE DEUXIÈME PROBLÈME DE LA DYNAMIQUE DU POINT LIBRE

731. Rappelons que le deuxième problème général de la dynamique du point consiste à trouver le mouvement que prend un point M de masse donnée m placé dans des conditions initiales données et soumis à des forces connues.

La recherche des coordonnées cartésiennes x, y, z, de M en fonction de l'époque t se ramène à l'intégration des équations différentielles

$$(1)\qquad m\frac{d^2x}{dt^2} = X, \qquad m\frac{d^2y}{dt^2} = Y, \qquad m\frac{d^2z}{dt^2} = Z,$$

qui traduisent analytiquement l'égalité vectorielle $m\vec{\Gamma} = \vec{F}$. Les seconds membres des équations (1) sont des fonctions connues de x, y, z, $\dfrac{dx}{dt}$, $\dfrac{dy}{dt}$, $\dfrac{dz}{dt}$ et t égales aux composantes scalaires de la résultante $\vec{F}$ des forces qui agissent sur M. Cette force peut, en effet, dépendre de la position du point, de sa vitesse et même de l'époque.

Répétons que d'après un théorème dû à Cauchy, si les fonctions X, Y, Z des sept variables énumérées sont définies, continues et admettent des dérivées partielles de tous les ordres dans un champ contenant le point $(x_0, y_0, z_0, x'_0, y'_0, z'_0, t_0)$ les équations (1) admettent une solution unique composée de fonctions x, y, z de la variable t prenant pour $t = t_0$ les valeurs x_0, y_0, z_0 et telles que leurs dérivées

soient respectivement égales à x'_0, y'_0, z'_0 pour $t = t_0$. En d'autres termes, le point M étant placé à l'époque t_0 en $M_0(x_0, y_0, z_0)$ et recevant la vitesse $\overrightarrow{M_0V_0}$ dont les composantes scalaires sont x'_0, y'_0, z'_0 prend un mouvement bien déterminé. En particulier, si X, Y, Z restent nulles pour les valeurs $x_0, y_0, z_0, 0, 0, 0$ des six variables $x, y, z, x' = \dfrac{dx}{dt}, y' = \dfrac{dy}{dt}, z' = \dfrac{dz}{dt}$ et pour les valeurs de t appartenant à l'intervalle (t_0, t_1) le point reste au repos de l'époque t_0 à l'époque t_1.

Ainsi, en vertu de cette proposition fondamentale dont la démonstration n'appartient pas au programme de la classe de Mathématiques Spéciales, dans tout ce cours **nous admettons que si un point matériel est soumis à des forces données et placé dans des conditions initiales données son état ultérieur de mouvement ou de repos est parfaitement déterminé.**

Sur l'intégration des équations différentielles du mouvement. — Au lieu d'intégrer le système formé par les équations (1) il peut être plus facile d'intégrer un système déduit du système (1) en remplaçant une ou plusieurs des équations (1) par autant d'équations qui soient des conséquences des équations (1). Donnons quelques exemples en vue des applications. Nous supposerons toujours les coordonnées rectangulaires :

1° Si le support de la force $\vec{F}$ s'appuie constamment sur une droite fixe et si l'on choisit cette droite comme axe $z'z$, la projection orthogonale du mobile sur le plan xOy obéit à la loi des aires relativement à l'origine. L'équation

$$x\frac{dy}{dt} - y\frac{dx}{dt} = C$$

est, dans cette hypothèse, une conséquence des deux premières équations (1). Au lieu d'intégrer le système (1) on pourra commencer par intégrer l'un des systèmes

$$(2)\qquad m\frac{d^2x}{dt^2} = X, \qquad x\frac{dy}{dt} - y\frac{dx}{dt} = C, \qquad m\frac{d^2z}{dt^2} = Z,$$

ou

$$(3)\qquad m\frac{d^2y}{dt^2} = Y, \qquad x\frac{dy}{dt} - y\frac{dx}{dt} = C, \qquad m\frac{d^2z}{dt^2} = Z,$$

dans lesquels la deuxième équation est du premier ordre seulement. Quant à la constante C, elle est déterminée par les conditions initiales, c'est $x_0y'_0 - y_0x'_0$ ou encore le double de l'aire algébrique du triangle Om_0v_0, le vecteur $\overrightarrow{m_0v_0}$ étant la projection orthogonale sur le plan xOy de la vitesse initiale $\overrightarrow{M_0V_0}$.

2° Lorsque le mouvement est plan le système à intégrer se réduit aux équations

$$(4)\qquad m\frac{d^2x}{dt^2} = X, \qquad m\frac{d^2y}{dt^2} = Y$$

les axes $x'x$ et $y'y$ étant pris dans le plan de la trajectoire. Les seconds membres X, Y peuvent être des fonctions de x, y, $x' = \dfrac{dx}{dt}$, $y' = \dfrac{dy}{dt}$ et t. Si le mouvement obéit à la loi des aires relativement au point A(a, b) les fonctions inconnues x, y de la variable t constituent une solution du système formé de l'équation

$$(x-a)\frac{dy}{dt} - (y-b)\frac{dx}{dt} = C$$

et de l'une des équations (4), la constante C étant déterminée par les conditions initiales.

3° F_T, mesure algébrique de la projection orthogonale de la force $\overrightarrow{F}$ sur la tangente en M à la trajectoire est égale au produit de la masse m par l'accélération tangentielle à l'époque t. L'équation

$$m\frac{dv}{dt} = F_T$$

qui exprime cette égalité ne diffère pas de celle que donnerait l'application du théorème de la force vive car on peut l'écrire $mv\,dv = F_T\,ds$.

Si la force $\overrightarrow{F}$ dérive d'une fonction de forces $mU(x, y, z)$ le théorème de la force vive donne une équation différentielle, du premier ordre seulement,

$$v^2 = 2U + h,$$

la constante h, déterminée par les conditions initiales, a pour valeur

$$v_0^2 - 2U(x_0, y_0, z_0).$$

Si, en outre, le support de la force $\overrightarrow{F}$ s'appuie constamment sur Oz, le système

$$(5) \qquad m\frac{d^2z}{dt^2} = Z, \qquad x\frac{dy}{dt} - y\frac{dx}{dt} = C, \qquad v^2 = 2U + h,$$

est conséquence du système (1). En employant des coordonnées semi-polaires, les deux dernières équations s'écrivent

$$r^2\frac{d\theta}{dt} = C, \qquad \left(\frac{dz}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + r^2\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 = 2U + h.$$

4° Dans le cas particulier où X est indépendant de y et de z, la première des équations (1) détermine l'abscisse du mobile en fonction de t. Cette circonstance se présente pour les diverses équations (1) dans deux problèmes classiques : celui où la force est constante en grandeur et direction et celui où le point matériel est sollicité par une attraction ou une répulsion proportionnelles à la distance.

5° Nous examinerons plus loin (741) les méthodes propres à l'étude du mouvement produit par une force centrale.

Observation générale. — Comme nous l'avons dit, sauf dans des cas exceptionnels qui ne se rencontrent pas dans les applications, les équations (1) n'admettent qu'une solution satisfaisant aux conditions initiales, elles déterminent sans ambiguïté le mouvement. Mais si, au lieu du système (1), on intègre, un système qui en est simplement une conséquence, il peut arriver que ce système ait des solutions étrangères au système (1); le cas échéant, il faudra les écarter. Toutefois, si le nouveau système n'admet qu'une solution répondant aux conditions initiales on peut, sans discussion, affirmer que cette solution appartient au système (1) et représente le mouvement cherché.

Équations différentielles d'un mouvement plan en coordonnées polaires. — La relation fondamentale $m\overrightarrow{\Gamma} = \overrightarrow{F}$ peut encore s'exprimer analytiquement par l'égalité des composantes scalaires des vecteurs $m\overrightarrow{\Gamma}$ et $\overrightarrow{F}$ relativement à des axes mobiles.

C'est ainsi qu'un mouvement plan étant rapporté à un système de coordonnées polaires $(O, \overrightarrow{Ox})$, en égalant les composantes scalaires des vecteurs $m\overrightarrow{\Gamma}$ et $\overrightarrow{F}$ sur l'axe OX défini

par l'angle polaire θ du mobile et sur l'axe directement perpendiculaire on forme *les équations différentielles du mouvement en coordonnées polaires* :

$$(6) \qquad m\left[\frac{d^2r}{dt^2} - r\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2\right] = F_r, \qquad m\frac{d\left(r^2\frac{d\theta}{dt}\right)}{dt} = rF_\theta.$$

Équations intrinsèques. — Bornons-nous encore au cas où le mouvement est plan et exprimons la relation fondamentale $m\overrightarrow{\Gamma} = \overrightarrow{F}$ en écrivant que les deux membres ont les mêmes composantes scalaires suivant la tangente et la normale en M à la trajectoire. On forme ainsi les équations

$$(7) \qquad m\frac{dv}{dt} = F_T, \qquad m\frac{v^2}{\rho} = F_N$$

appelées *équations intrinsèques* du mouvement.

Soit φ l'angle polaire de la tangente en M à la trajectoire, cette tangente étant orientée. La valeur algébrique ρ du rayon de courbure est $\frac{ds}{d\varphi}$ ou $\frac{ds}{dt}\cdot\frac{dt}{d\varphi}$, soit $\rho = v\frac{dt}{d\varphi}$. La deuxième des équations intrinsèques peut donc s'écrire

$$mv\frac{d\varphi}{dt} = F_N.$$

Si F_T et F_N peuvent s'exprimer au moyen de v et de φ l'équation différentielle

$$(8) \qquad \frac{dv}{v} = \frac{F_T}{F_N}d\varphi$$

détermine v en fonction de φ. On a ensuite

$$dt = m\frac{v\,d\varphi}{F_N}, \qquad dx = v\cos\varphi\,dt, \qquad dy = dx\,\mathrm{tg}\,\varphi.$$

Ces équations ramènent à des quadratures la recherche des fonctions φ, x, y de l'époque t. Rappelons que l'équation $v = f(\varphi)$ trouvée en intégrant l'équation (8) représente en coordonnées polaires l'hodographe du mouvement, l'origine étant le pôle de l'hodographe.

Mouvement rectiligne. — La trajectoire étant prise pour axe $x'x$ et l'origine sur cet axe étant un point fixe, la recherche du mouvement se ramène à l'intégration d'une seule équation

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = X.$$

Si X ne dépend que de x et $\frac{dx}{dt}$ sans contenir explicitement t, soit $X = f\left(x, \frac{dx}{dt}\right)$ cette équation se ramène à une équation du premier ordre en prenant $v = \frac{dx}{dt}$ comme fonction inconnue, x étant la variable. En effet $\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{dv}{dt}$ ou $\frac{dv}{dx}\cdot v$ et l'équation devient

$$mv\frac{dv}{dx} = f(x, v).$$

D'ailleurs, cette équation ne diffère pas de celle que donne le théorème de la force vive. Son intégration donne v en fonction de x, soit $v = \varphi(x)$. La relation ainsi trouvée s'écrit encore $\frac{dx}{\varphi(x)} = dt$, elle ramène à une quadrature la recherche de t en fonction de l'abscisse du mobile.

MOUVEMENT D'UN POINT SOUS L'ACTION D'UNE FORCE CONSTANTE EN GRANDEUR ET EN DIRECTION

732. Si un point matériel M est soumis à l'action d'une seule force dont la direction D est constante, le point m, projection orthogonale de M sur un plan P perpendiculaire à D a une accélération constamment nulle, il reste au repos ou est animé d'un mouvement rectiligne uniforme. Le premier cas est celui où la vitesse initiale de M est nulle ou dans la direction D, le second est celui où M est lancé avec une vitesse dont la direction n'est pas celle de la force. Dans le premier cas, la trajectoire de M est une droite dont la direction est celle de D; dans le second, c'est une courbe située dans un plan parallèle à D.

Pour fixer les idées, nous supposerons que la force est le poids du point. Lorsque la vitesse initiale n'est pas trop grande, le point reste dans une région assez peu étendue pour que, sans erreur appréciable, on puisse traiter le champ de la pesanteur comme un champ constant.

Remarque. — Étant donné un corps, on sait que le mouvement de son centre de gravité est celui d'un point qui aurait pour masse la masse du corps et serait sollicité par une force $\vec{F}$ égale à la somme géométrique des forces qui agissent sur les divers points du corps. Prendre comme force $\vec{F}$ le poids du corps c'est négliger l'influence du milieu dans lequel se déplace le corps c'est, en somme, supposer que le mouvement a lieu dans le vide. En procédant ainsi on se borne à une approximation assez grossière, les résultats que nous allons obtenir diffèrent en effet notablement de ceux que donne l'observation du mouvement des projectiles.

Mouvement d'un point soumis à la seule action de la pesanteur. — Première partie. La vitesse initiale est nulle ou verticale. — La trajectoire est la verticale de la position initiale. Soit O la position initiale. Orientons de bas en haut la verticale $z'z$ de ce point. Comme origine des cotes prenons le point O et comme origine des temps prenons l'instant où le mobile est abandonné ou lancé du point O. La mesure algébrique de l'accélération est $-g$ et, si v_0 est celle de la vitesse initiale, la vitesse algébrique et la cote du mobile à l'époque t se déduisent de l'équation différentielle $\frac{d^2z}{dt^2} = -g$; on obtient ainsi

$$(1)\qquad v = v_0 - gt, \qquad (2)\qquad z = -\frac{g}{2}t^2 + v_0 t.$$

En éliminant t entre ces équations on trouve que la cote et la vitesse du mobile sont constamment liées par la relation

$$(3)\qquad v^2 - v_0^2 = -2gz.$$

Nous allons retrouver cette relation en appliquant le théorème de la force vive et nous constaterons ainsi qu'elle reste valable quand la vitesse initiale n'est pas verticale. Puisque le champ de la pesanteur dérive, pour un point de masse m, de la fonction de forces $-mgz$, la somme de l'énergie cinétique $\frac{1}{2}mv^2$ et de l'énergie potentielle mgz reste constante pendant le mouvement. Si z_0 est la cote de la position initiale et v_0 la mesure de la vitesse initiale, la cote du mobile et sa vitesse numérique sont liées constamment par la relation

$$\frac{v^2}{2} + gz = \frac{v_0^2}{2} + gz_0.$$

Avec les conventions faites, $z_0 = 0$, cette relation ne diffère pas de la relation (3).

1er *Cas.* $v_0 = 0$. Les formules deviennent

$$v = -gt, \qquad z = -\frac{g}{2}t^2, \qquad v^2 = -2gz.$$

Le point tombe verticalement d'un mouvement uniformément accéléré.

2e *Cas.* $v_0 > 0$. *Le point est lancé vers le haut.* Le point monte pendant le temps qui s'écoule de l'époque zéro à l'époque $t_1 = \frac{v_0}{g}$ pour laquelle la vitesse est nulle. A cette époque, il est au point A dont la cote a pour valeur, d'après la relation (3)

$$z_1 = \frac{v_0^2}{2g}.$$

Pendant cette ascension, le mouvement est retardé.

A partir de l'époque t_1, le point tombe verticalement comme si, à cette époque, on l'abandonnait en A sans vitesse initiale. Son mouvement est uniformément accéléré, il revient en O à l'époque, non nulle, qui donne à z la valeur zéro, époque qui est $2\frac{v_0}{g}$ ou $2t_1$. La chute de A en O dure autant que l'ascension. Comme nous le savions, si P est un point du segment AO, à ses deux passages en P le mobile a la même vitesse numérique.

3e *Cas.* $v_0 < 0$. *Le point est lancé vers le bas.* — Le mobile descend verticalement d'un mouvement uniformément accéléré.

Deuxième partie. La vitesse initiale n'est pas verticale. — Le mouvement se fait dans le plan vertical qui contient la vitesse initiale $\overrightarrow{OV_0}$. Dans ce plan prenons deux axes : l'un, $y'Oy$, vertical orienté vers le haut, l'autre, $x'Ox$, horizontal tel que la demi-droite Ox soit du côté de $y'y$ où est le vecteur $\overrightarrow{OV_0}$. Soit α la mesure algébrique comprise entre $-\frac{\pi}{2}$ et $+\frac{\pi}{2}$ d'un angle de Ox avec $\overrightarrow{OV_0}$, si v_0 est la mesure de la vitesse initiale, les composantes scalaires de cette vitesse sont $v_0 \cos\alpha$ et $v_0 \sin\alpha$. L'instant où le mobile est lancé du point O sera l'origine des temps.

Équations du mouvement. — En exprimant que les composantes scalaires de l'accélération du mobile sont égales à celles de l'accélération de la pesanteur nous formons les équations différentielles du mouvement

$$(4)\qquad \frac{d^2x}{dt^2} = 0, \qquad \frac{d^2y}{dt^2} = -g.$$

Une première intégration donne, en tenant compte des composantes scalaires de la vitesse initiale, composantes auxquelles doivent se réduire $\frac{dx}{dt}$ et $\frac{dy}{dt}$ pour $t = 0$

$$(5)\qquad \frac{dx}{dt} = v_0 \cos\alpha, \qquad \frac{dy}{dt} = -gt + v_0 \sin\alpha;$$

$x_1 = \frac{dx}{dt}$ et $y_1 = \frac{dy}{dt}$ sont les coordonnées à l'époque t du point L qui décrit l'hodographe dont le pôle est l'origine. L'hodographe est la demi-droite verticale L_0U dirigée vers le bas qui a pour origine l'extrémité L_0 du vecteur vitesse initiale.

Une deuxième intégration donne, en observant que les coordonnées du mobile sont nulles à l'époque zéro,

(6) $$x = v_0 t \cos\alpha, \qquad y = -\frac{gt^2}{2} + v_0 t \sin\alpha.$$

D'après la première de ces équations, la projection du mobile sur $x'x$ est animée d'un mouvement uniforme, ce que nous savions déjà; d'après la deuxième, le mouvement de sa projection sur $y'y$ est celui que prendrait un point pesant lancé verticalement avec une vitesse mesurée algébriquement par $v_0 \sin\alpha$.

Relation entre la vitesse et la position du mobile. — Le théorème de la force vive nous a donné la relation

(7) $$v^2 - v_0^2 = -2gy$$

qu'il est facile de vérifier en calculant $v^2 = \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2$ d'après les formules (5)

$$v^2 = g^2t^2 - 2v_0 g t \sin\alpha + v_0^2$$

et comparant cette expression à la deuxième des équations (6).

D'après la deuxième des équations (6), le mobile peut traverser deux fois le même plan horizontal, à ces deux traversées il a, d'après la relation (7), la même vitesse numérique. Plus généralement nous avons vu (711) que lorsque la résultante des forces qui agissent sur un point matériel dérive d'une fonction de forces et que, par suite du mouvement, le point traverse plusieurs fois une même surface de niveau c'est avec la même vitesse numérique.

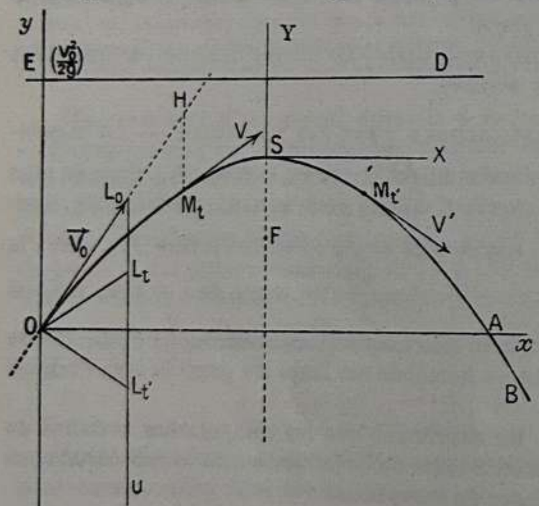

Fig. 533.

Trajectoire. — Nous reconnaissons dans les équations (6) la représentation paramétrique d'une parabole dont la direction asymptotique est verticale. Formons son équation cartésienne en éliminant t entre les équations (6),

(8) $$y = -\frac{g}{2}\frac{x^2}{v_0^2 \cos^2\alpha} + x \operatorname{tg}\alpha.$$

Mettons sous la forme canonique le second membre qui est un polynôme du second degré de l'abscisse x,

(9) $$y = -\frac{g}{2v_0^2\cos^2\alpha}\left(x - \frac{v_0^2}{g}\sin\alpha\cos\alpha\right)^2 + \frac{v_0^2}{2g}\sin^2\alpha.$$

Si, par une translation des axes, nous amenons l'origine au point S dont les coordonnées dans le système xOy sont

(10) $$x = \frac{v_0^2}{g}\sin\alpha\cos\alpha, \qquad y = \frac{v_0^2}{2g}\sin^2\alpha,$$

la parabole trajectoire a pour nouvelle équation

(11) $$X^2 + \frac{2v_0^2\cos^2\alpha}{g}Y = 0.$$

Étude du mouvement. — 1er *cas.* $\alpha > 0$. — Quand t croît de 0 jusqu'à $t_1 = \frac{v_0}{g}\sin\alpha$, époque à laquelle la dérivée de y est nulle, y croît; à l'époque t_1 le point est au sommet de la trajectoire, le mobile a décrit l'arc OS de la trajectoire avec une vitesse de grandeur décroissante. Quand t croît à partir de t_1, y décroît, le mobile décrit la branche SB de la parabole trajectoire et cela avec une vitesse croissante. Le mobile atteint le plan horizontal de la position initiale en un point A dont l'abscisse, double de celle de S, est $\frac{v_0^2}{g}\sin 2\alpha$, cette longueur OA est ce qu'on appelle *la portée* ou *l'amplitude du jet*; pour une valeur donnée de v_0, elle est maximum quand l'angle α appelé *angle de tir*, vaut 45°.

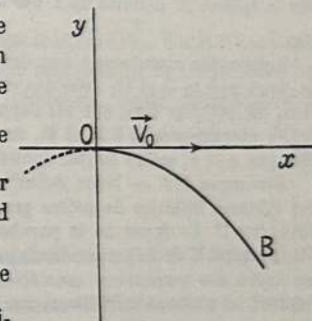

Fig. 534.

2e *cas.* $\alpha = 0$. — L'équation de la trajectoire se réduit à $y = -\frac{g}{2}\frac{x^2}{v_0^2}$, le sommet S est à l'origine, le mobile décrit, avec une vitesse croissant de 0 à $+\infty$, la branche OB de la parabole (Fig. 534)

3e *cas.* $\alpha < 0$, y décroît constamment. Le mobile décrit l'arc OB de la parabole avec une vitesse qui croît de 0 à $+\infty$, il ne passe pas au sommet de la parabole. (Fig. 535.)

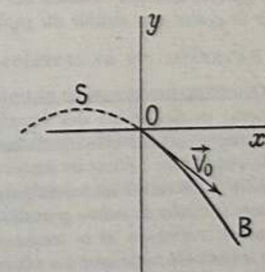

Fig. 535.

Éléments de la trajectoire. — Nous connaissons déjà le sommet S et l'axe de la parabole trajectoire. D'après l'équation (11) le paramètre a pour valeur $\frac{v_0^2\cos^2\alpha}{g}$. La cote de la directrice s'obtient en ajoutant le demi-paramètre à la cote du sommet on trouve ainsi $\frac{v_0^2}{2g}$, *valeur indépendante de la direction de la vitesse initiale dans le plan xOy mais dépendant de sa grandeur.* La cote de la directrice est celle du point le plus haut qu'atteindrait le mobile s'il était lancé verticalement de O avec la vitesse v_0.

La cote du foyer est l'excès de celle du sommet sur le demi-paramètre. Le foyer a donc pour coordonnées

(12) $$x = \frac{v_0^2}{2g}\sin 2\alpha, \qquad y = -\frac{v_0^2}{2g}\cos 2\alpha.$$

Remarque I. — Si dans l'équation (7) on remplace y par la cote d'un point de la directrice on trouve $\rho^2 = 0$. On s'explique ce fait en observant qu'aux points communs à la parabole et à sa directrice la tangente à la parabole est isotrope et $dx^2 + dy^2 = 0$.

Remarque II. — Revenons aux équations (6). Les termes $v_0 t \cos\alpha$ et $v_0 t \sin\alpha$ des seconds membres sont les coordonnées, à l'époque t, d'un mobile H qui partirait de O à l'origine des temps et serait animé d'un mouvement rectiligne uniforme ayant pour vitesse $\overrightarrow{V_0}$. La cote de M à l'époque t s'obtient en retranchant de celle de H, $\frac{1}{2}gt^2$, mesure du chemin parcouru à l'époque t par un point pesant abandonné sans vitesse à l'époque zéro. Ainsi, pour trouver la position de M à l'époque t on peut imaginer un mobile animé pendant le temps t d'un mouvement rectiligne uniforme ayant pour vitesse la vitesse initiale puis un autre mobile tombant librement pendant le temps t de la position atteinte par le premier. Cette conception, due à Galilée, rend immédiate la solution de certaines questions relatives au mouvement des projectiles dans le vide. En voici deux exemples.

Imaginons qu'on lance simultanément, à l'époque zéro, d'un point O, différents points pesants avec des vitesses initiales de même grandeur v_0 mais de directions différentes. A l'époque t, les mobiles fictifs animés de mouvements rectilignes uniformes seraient sur une sphère Σ ayant O pour centre et $v_0 t$ pour rayon. Les points pesants sont donc, à l'époque t sur la sphère Σ' déduite de Σ par la translation verticale mesurée par $\frac{1}{2}gt^2$ et dirigée vers le bas.

Supposons maintenant que deux mobiles pesants M et M_1 soient lancés simultanément de deux points O et O_1 avec des vitesses mesurées par v et v_1. Pour qu'ils se rencontrent il faut, en premier lieu, que les supports des vitesses initiales se croisent et que les mobiles fictifs correspondant à M et M_1 arrivent en même temps au point de croisement I, c'est-à-dire que v et v_1 soient proportionnelles aux distances de I à O et O_1.

Remarque III. — Nous avons montré que les diverses trajectoires qui correspondent à des vitesses initiales de même grandeur v_0 situées dans le même plan vertical ont même directrice D. Le foyer de la parabole tangente en O à OL_0 est le symétrique par rapport à OL_0 du pied E de la perpendiculaire menée de O à D. Il résulte de là que *le lieu géométrique des foyers des trajectoires considérées est le cercle qui a O pour centre et OE pour rayon.* Ce résultat se reconnaît d'ailleurs sur les formules (12).

Le sommet S peut se déduire de F par une affinité qui a D pour axe et $\frac{1}{2}$ pour rapport, *le lieu géométrique des sommets des trajectoires est l'ellipse dont les sommets du petit axe sont* O *et* E *et le grand axe double du petit axe.*

Réversibilité de certains mouvements. — Supposons qu'un point pesant soit lancé de O à l'époque zéro avec une vitesse initiale opposée à $\overrightarrow{OV_0}$, les équations du mouvement de ce point se déduisent des équations (6) en y remplaçant v_0 par $-v_0$. Les équations ainsi obtenues se déduiraient tout aussi bien des équations (6) en y remplaçant t par $-t$, d'où cette conclusion : *Dans les mouvements qu'auraient, sous la seule influence de la pesanteur, deux mobiles qui seraient au même point, à la même époque prise comme origine des temps, avec des vitesses initiales de même grandeur, de même direction mais de sens opposés, les mobiles suivent la même trajectoire et se trouvent respectivement à deux époques opposées au même point de cette trajectoire mais avec des vitesses opposées. Cette propriété connue sous le nom de réversibilité du mouvement se vérifie toutes les fois que la résultante $\vec{F}$ des forces qui agissent sur le point matériel ne dépend que de la position du point sur la trajectoire, ce qui est notamment le cas quand cette résultante dérive d'une fonction de forces.* En effet, supposons que le point matériel M décrive une trajectoire T sous l'action de la force $\vec{F}$ et qu'à une certaine époque que l'on peut prendre pour origine des temps il soit en un point P_0 de cette ligne avec une vitesse $\overrightarrow{P_0V_0}$; soit $s = f(t)$ l'équation intrinsèque du mouvement. Imaginons qu'un autre mobile décrive T de façon que l'équation de son mouvement soit $s = f(-t)$. A l'époque t, la vitesse algébrique de ce second mobile est $-f'(-t)$, elle est opposée à celle dont le premier mobile est animé à l'époque $-t$. A l'époque t, l'accélération tangentielle du deuxième mobile a pour mesure algébrique $f''(-t)$, elle est confondue avec celle du premier mobile à l'époque $-t$. De plus, à l'époque t, le deuxième mobile étant au point P de la trajectoire où se trouvait le premier à l'époque $-t$, les accélérations normales correspondantes sont aussi confondues. Ainsi les deux mobiles passent au point P, l'un à l'époque t, l'autre à

l'époque $-t$ avec la même accélération $\vec{\Gamma}$, le mouvement du deuxième obéit donc, comme celui du premier, à la relation $\vec{F} = m\vec{\Gamma}$. Le deuxième mouvement est donc bien celui que prendrait un point matériel soumis à la force $\vec{F}$ et lancé du point P_0 à l'époque zéro avec la vitesse $-\overrightarrow{P_0V_0}$.

733. **Problème balistique élémentaire.** — *Dans quelle direction faut-il lancer d'un point O donné, avec une vitesse de grandeur donnée, un point soumis à la seule action de son poids pour qu'il atteigne un point donné P?*

Soit v_0 la mesure de la vitesse initiale donnée. Nous supposerons que P n'est pas sur la verticale du point O. La vitesse initiale doit être dans le plan vertical qui contient O et P. Rapportons ce plan à l'axe vertical Oy orienté vers le haut et à l'axe défini par la demi-droite horizontale Ox tracée du côté de Oy où est P. Soient x, y, les coordonnées de P, ce sont des nombres connus.

Prenons comme inconnue la mesure algébrique α, comprise entre $-\frac{\pi}{2}$ et $+\frac{\pi}{2}$, d'un angle formé par la demi-droite Ox avec la vitesse initiale $\overrightarrow{OV_0}$. En écrivant que l'équation (8) donnée au paragraphe précédent pour représenter la trajectoire est vérifiée par les coordonnées du point P nous trouvons, pour déterminer α, l'équation

$$\frac{g}{2}\frac{x^2}{v_0^2\cos^2\alpha} - x\,\mathrm{tg}\,\alpha + y = 0. \tag{1}$$

A toute racine comprise entre $-\frac{\pi}{2}$ et $+\frac{\pi}{2}$ correspond une solution du problème.

La forme de l'équation (1) conduit à conserver comme seule inconnue $\mathrm{tg}\,\alpha = u$. En y remplaçant $\frac{1}{\cos^2\alpha}$ par $1 + u^2$, l'équation (1) devient

$$\frac{gx^2}{2v_0^2}u^2 - ux + y + \frac{gx^2}{2v_0^2} = 0. \tag{2}$$

Discussion. — A toute racine réelle de cette équation correspond pour α une seule valeur comprise entre $-\frac{\pi}{2}$ et $+\frac{\pi}{2}$. Le problème admet donc autant de solutions que l'équation (2) a de racines réelles, il admet deux solutions distinctes si les coordonnées de P vérifient l'inégalité

$$x^2 - 4.\frac{gx^2}{2v_0^2}\left(y + \frac{gx^2}{2v_0^2}\right) > 0$$

qui peut s'écrire, x^2 n'étant pas nul,

$$y < \frac{v_0^2}{2g} - \frac{gx^2}{2v_0^2}. \tag{3}$$

L'ordonnée y de P doit être inférieure à

$$Y = \frac{v_0^2}{2g} - \frac{gx^2}{2v_0^2}.$$

Lorsque x varie, le point Q qui a pour coordonnées x, Y décrit une parabole Σ qui a pour axe Oy, pour tangente au sommet la droite représentée par l'équation

$Y = \dfrac{v_0^2}{2g}$, cette droite est la directrice D de toutes les paraboles trajectoires obtenues en lançant du point O, avec une vitesse mesurée par v_0, un point pesant dans toutes les directions du plan xOy.

Enfin la parabole Σ dont la concavité est tournée vers le bas a pour paramètre

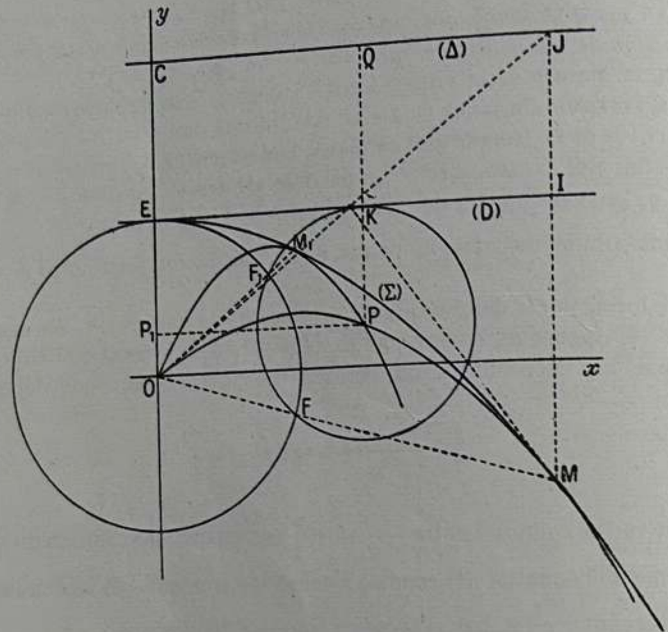

Fig. 536.

$\dfrac{v_0^2}{g}$, elle a donc pour foyer le point O. Seuls les points P situés à l'intérieur de cette parabole ou sur cette courbe peuvent être atteints par un projectile lancé de O avec une vitesse ayant la grandeur donnée v_0. Cette parabole Σ est pour cette raison dénommée *parabole de sûreté*. Pour un point P situé sur la parabole de sûreté les deux solutions sont confondues.

Remarque I. — Le calcul qui a conduit à l'équation de la parabole de sûreté est celui qui donne l'équation de l'enveloppe des paraboles trajectoires correspondant aux diverses valeurs de α. La parabole de sûreté est donc l'enveloppe de ces paraboles trajectoires.

Remarque II. — Revenons aux équations (6) données au paragraphe précédent, elles donnent x et y en fonction de deux paramètres t et α. Si α est constant et t variable elles représentent une trajectoire, si t est constant et α variable elles définissent le cercle, lieu géométrique des points atteints à l'époque t par des mobiles lancés avec la même vitesse v_0 dans des directions différentes. La parabole de sûreté est aussi l'enveloppe des cercles qui correspondent ainsi aux diverses valeurs de t (T. II, 383).

Solution géométrique. — La trajectoire que doit suivre le point est une parabole qui admet pour directrice la droite D, parallèle à Ox menée par le point E de Oy, point le plus haut qu'atteindrait le mobile lancé verticalement avec la vitesse donnée v_0. Prenons comme élément inconnu le foyer F de cette parabole, ce point est commun aux deux cercles tangents à la directrice D et décrits, l'un avec O, l'autre avec le point donné P pour centre.

Supposons que ces deux cercles se coupent et soit F un de leurs points communs. La parabole qui a pour foyer F et pour directrice D passe en O et P, elle est tangente en O à la bissectrice de l'angle EOF. Cette parabole est celle que suit le point lancé avec la vitesse de grandeur v_0 dirigée suivant cette bissectrice ; pourvu que le point soit lancé dans le sens tel que la branche qu'il décrit soit celle sur laquelle est P, il atteint ce point.

Les deux cercles considérés se coupent si la distance de leurs centres est comprise entre la différence et la somme de leurs rayons, c'est-à-dire si l'on a

$$|OE - PK| < OP < OE + PK. \tag{4}$$

Si P était au-dessus de la droite D, OP rencontrerait D en G et on aurait $OG > OE$ et $PG > PK$, OP serait supérieur à la somme $OE + PK$, le problème serait impossible ce qui est d'ailleurs manifeste. Supposons donc P au-dessous de D. La différence des longueurs OE et PK est égale à OP_1, P_1 étant la projection orthogonale de P sur Oy. Quel que soit P, elle est inférieure à OP.

Prolongeons OE d'une longueur égale EC et soit Δ la parallèle à D menée par C. La somme $OE + PK$ est la distance PQ du point P à la droite Δ. Les points P qui satisfont à la double inégalité (4) sont les points intérieurs à la parabole Σ qui a pour foyer O et pour directrice Δ.

On constate que toute parabole trajectoire est tangente à la parabole de sûreté Σ au point M où elle est rencontrée par la droite qui joint le point O à son foyer F, $MF = MI$ entraînant $MO = MJ$, et la tangente commune étant la bissectrice de l'angle OMJ (fig. 536).

734. **Équations générales du mouvement d'un point sollicité par une force constante en grandeur et direction.** — L'espace étant rapporté à trois axes de coordonnées rectangulaires, soient $\gamma, \gamma', \gamma''$ les composantes scalaires du vecteur accélération $\vec{\Gamma}$, quotient du vecteur force $\vec{F}$ par la masse du point. Soient v_0, v'_0, v''_0 les composantes scalaires de la vitesse initiale $\vec{V}_0$ et x_0, y_0, z_0 les coordonnées de la position initiale M_0 du mobile. L'origine des temps est l'instant où le mobile quitte M_0.

Les coordonnées x, y, z du mobile M à l'époque t satisfont aux équations différentielles

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \gamma, \qquad \frac{d^2y}{dt^2} = \gamma', \qquad \frac{d^2z}{dt^2} = \gamma'' \tag{1}$$

qui donnent successivement

$$\frac{dx}{dt} = \gamma t + v_0, \qquad \frac{dy}{dt} = \gamma' t + v'_0, \qquad \frac{dz}{dt} = \gamma'' t + v''_0, \tag{2}$$

$$x = \frac{1}{2}\gamma t^2 + v_0 t + x_0, \quad y = \frac{1}{2}\gamma' t^2 + v'_0 t + y_0, \quad z = \frac{1}{2}\gamma'' t^2 + v''_0 t + z_0, \tag{3}$$

équations qui peuvent être remplacées par l'équation vectorielle

$$\overrightarrow{OM} = \frac{1}{2}\vec{\Gamma} t^2 + \vec{V}_0 t + \overrightarrow{OM_0}.$$

Dans le cas particulier où la vitesse initiale est nulle ou a pour direction celle de la force, le mouvement est rectiligne uniformément varié. Dans le cas général où la direction de la vitesse initiale n'est pas celle de la force, la trajectoire est une parabole définie paramétriquement par les équations (3). Plaçons-nous dans ce cas.

L'axe de la parabole a pour direction celle de l'accélération. D'après les équations (2) l'hodographe est une droite, ce qui résulte d'ailleurs du fait que l'accélération a une direction constante. La vitesse numérique est donnée par la formule

$$V^2 = (\gamma t + v_0)^2 + (\gamma' t + v'_0)^2 + (\gamma'' t + v''_0)^2$$

à l'aide de laquelle on vérifie aisément la relation

$$V^2 - V_0^2 = 2\left[\gamma(x - x_0) + \gamma'(y - y_0) + \gamma''(z - z_0)\right]$$

que donnerait l'application du théorème de la force vive, la force donnée dérivant de la fonction de forces $m[\gamma x + \gamma' y + \gamma'' z]$.

Comme nous l'avons remarqué, aux points communs à la parabole et à sa directrice les tangentes à la parabole sont isotropes. Les coordonnées de ces points doivent annuler l'expression de V^2 en fonction des coordonnées du mobile. L'équation

$$2\left[\gamma(x - x_0) + \gamma'(y - y_0) + \gamma''(z - z_0)\right] + V_0^2 = 0$$

représente, par suite, le plan mené par la directrice D de la parabole perpendiculairement à son axe. Le mobile passe au sommet S de la parabole à l'époque t_1 pour laquelle la vitesse est perpendiculaire à l'axe de la parabole,

$$t_1 = -\frac{v_0\gamma + v_0'\gamma' + v_0''\gamma''}{\gamma^2 + \gamma'^2 + \gamma''^2} \quad \text{ou} \quad t_1 = -\frac{\vec{V}_0 \cdot \vec{\Gamma}}{\Gamma^2}.$$

Les coordonnées de S s'obtiennent en remplaçant t par la valeur de t_1 dans les formules (3).

La vitesse numérique V_1 à l'époque t_1 est la distance de l'origine à l'hodographe, droite définie par le point $L_0(v_0, v_0', v'')$ et le vecteur $\vec{\Gamma}$,

$$V_1 = \frac{\text{mesure}\,(\vec{V}_0 \wedge \vec{\Gamma})}{\Gamma}.$$

Quand le mobile est au sommet S de la parabole son accélération est confondue avec son accélération normale et comme le paramètre d'une parabole est aussi le rayon de courbure au sommet (T. I, 447. Ex. I) on a

$$p = \frac{V_1^2}{\Gamma}.$$

735. Influence de la résistance de l'air. — Si une sphère S est plongée dans un fluide homogène immobile par rapport à la Terre on sait, d'après le principe d'Archimède, que les réactions du fluide se composent en une force unique appliquée au centre de la sphère et directement opposée au poids $\mu\vec{g}$ du fluide déplacé. Quand la sphère se meut dans le fluide, celui-ci exerce sur elle non seulement la poussée d'Archimède mais aussi une force $\vec{R}$ par laquelle se manifeste la résistance que le milieu oppose au mouvement. L'expérience montre que l'intensité de cette force croît avec la vitesse.

On sait que le mouvement du centre de gravité M de la sphère est celui que prendrait un point matériel ayant pour masse celle de la sphère et sollicité par une force, somme géométrique des forces extérieures agissant sur la sphère; cette force est, m étant la masse de la sphère,

$$\vec{F} = m\vec{g} - \mu\vec{g} + \vec{R}.$$

La force $\vec{R}$ est dirigée en sens contraire de la vitesse de M. Une formule qui représente assez bien R pour les vitesses inférieures à 140 mètres par seconde est $R = kAv^2$, v étant la vitesse numérique et A la mesure de l'aire de la sphère, k désigne une constante dont la valeur est 11×10^{-5} dans le système CGS lorsque le mobile ne s'éloigne pas trop du sol. Si la vitesse est supérieure à 140 mètres par seconde il convient d'affecter v d'un exposant supérieur à 2.

Pour une sphère solide se mouvant dans l'air, le rapport $\frac{\mu}{m}$ est assez petit pour qu'on puisse négliger le terme $\mu\vec{g}$. Si on ne néglige pas ce terme on peut remplacer $\vec{g}$ par $\vec{g}_1$ tel que $(m - \mu)\vec{g} = m\vec{g}_1$; il peut se faire que l'accélération $\vec{g}_1$ soit dirigée vers le haut (bulle de savon gonflée d'hydrogène). Nous allons étudier brièvement le mouvement d'un point de masse m soumis à la force $\vec{F} = m\vec{g} + \vec{R}$ définie plus haut. Pour plus de généralité nous supposerons que $R = kAv^n$, n étant un exposant positif.

Montrons que la trajectoire est rectiligne quand la vitesse initiale est nulle ou verticale et qu'elle est plane quand la vitesse initiale n'est pas verticale. — Dans le cas général où la vitesse initiale n'est pas verticale, la trajectoire est telle qu'en un quelconque de ses points le plan défini par les vecteurs vitesse et accélération est vertical, ce plan étant le plan osculateur à la trajectoire au point considéré, la trajectoire est dans un plan vertical (T. II, 330). Plaçons-nous maintenant dans le cas particulier où la vitesse initiale est nulle ou verticale. Prenons pour axe $z'z$ la verticale de la position initiale, soit z_0 la cote de la position initiale du mobile et soit v_0 la mesure algébrique de la vitesse initiale. Nous savons que le mouvement est complètement déterminé par la connaissance de la force et celle des conditions initiales. Pour montrer que la trajectoire est verticale il suffit donc de montrer qu'il existe une fonction $z = \varphi(t)$ satisfaisant : 1° aux conditions initiales c'est-à-dire telle que $\varphi(t_0) = z_0$ et $\varphi'(t_0) = v_0$, t_0 étant l'époque initiale; 2° à l'équation différentielle

$$m\frac{d^2z}{dt^2} = -mg + \overline{R}$$

dans laquelle $\overline{R}$ désigne la mesure algébrique de la résistance de l'air, le signe de $\overline{R}$ est celui de $-\frac{dz}{dt}$. Or, nous connaissons l'existence d'une telle fonction, ce qui nous permet d'affirmer que le point se meut suivant la verticale de la position initiale.

Première partie. La vitesse initiale est nulle ou verticale. — 1er *Cas. Le point est lancé vers le haut.* Soit O la position initiale, nous prendrons ce point pour origine des cotes sur l'axe vertical $z'Oz$ orienté vers le haut. Pour origine des temps nous prendrons l'instant où on lance le mobile. Soit v_0 la mesure algébrique de la vitesse initiale, v_0 est positif. Pendant une première phase du mouvement le mobile s'élève. Si, pendant cette phase, v est la vitesse du mobile à l'époque t, la mesure algébrique de $\vec{R}$ à cette époque est — R. Pour cette première phase l'équation différentielle du mouvement peut s'écrire

$$m\frac{dv}{dt} = -mg - kAv^n.$$

Posons $\frac{kA}{m} = \rho$ et séparons les variables en écrivant

$$dt = \frac{dv}{-g - \rho v^n}.$$

Traçons dans un système d'axes rectangulaires $v'v$, $y'y$ la courbe représentative de la fonction

$$y = \frac{1}{-g - \rho v^n}$$

quand v croît de 0 à $+\infty$. Soit P_0 le point dont l'abscisse est v_0 et P_0' le pied de son ordonnée, $\frac{dv}{dt}$ étant négatif, v décroît quand t croît. Soit P un point dont l'abscisse v est un nombre positif inférieur à v_0. L'aire limitée à l'arc P_0P, aux ordonnées des points P, P_0 et à l'axe $v'v$ a même mesure que le temps qui s'écoule de l'instant initial à celui où la vitesse est réduite à v. Quand P vient en P_1 sur $y'y$ on obtient de même l'époque t_1 à laquelle se termine l'ascension du mobile.

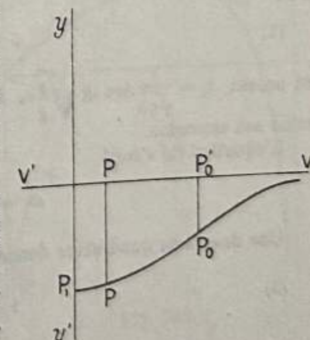

Fig. 537.

Si le coefficient ρ augmente, la longueur P'P de l'ordonnée de P diminue. Dans ces conditions la durée de la phase ascensionnelle diminue, il en est de même de la hauteur à laquelle peut s'élever le mobile. Observons que ρ augmente, soit quand le coefficient k augmente, soit quand le rapport $\frac{A}{m}$ augmente. Pour des sphères de même matière, A et m sont respectivement proportionnels au carré et au cube du rayon, ρ augmente quand le rayon diminue. L'influence de la résistance du milieu est d'autant plus grande que le rayon est plus faible, elle est prépondérante pour des grains de poussière.

2° *Cas. Le point est abandonné sans vitesse initiale.* — Le mouvement est aussi celui qui succède à l'ascension que nous venons d'étudier. Arrivé au point le plus haut, le mobile retombe comme s'il était abandonné sans vitesse.

Supposons Oz dirigé vers le bas, la résistance du milieu est dirigée vers le haut et $mg - kAv^n$ est la mesure algébrique de la résultante des forces qui agissent sur le point à l'époque t. L'équation différentielle du mouvement s'écrit

$$dt = \frac{dv}{g - \rho v^n}.$$

Traçons, comme plus haut, la courbe représentative de la fonction

$$y = \frac{1}{g - \rho v^n},$$

elle est asymptote à la parallèle à $y'y$ dont l'ordonnée est $v_1 = \left(\frac{g}{\rho}\right)^{\frac{1}{n}}$. Ce tracé met en évidence un fait important. La vitesse croît avec t mais seulement jusqu'à la valeur limite v_1, car l'intégrale définie $t = \int_0^v \frac{dv}{g - kv^n}$ devient infinie quand v tend vers v_1 à gauche.

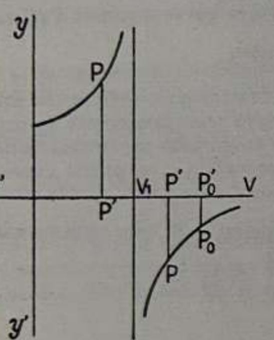

Fig. 538.

Ainsi, pour une sphère ayant pour densité 7 et pour rayon 1 centimètre, la vitesse limite serait de 45 m. 6 par seconde et après 12 secondes de chute la vitesse serait supérieure à 45 m. par seconde, c'est dire que pratiquement, la vitesse serait constante, le mouvement serait devenu sensiblement uniforme. Ceci permet de comprendre les descentes en parachute ou, pour les avions, les descentes en vol plané.

3° *Cas. Le point est lancé vers le bas.* — D'après le tracé utilisé dans la deuxième partie, si la vitesse initiale est inférieure à v_1, la vitesse croît et tend vers v_1 quand t devient infini. Si la vitesse initiale v_0 est supérieure à v_1, le point P_0 correspondant à v_0 a une ordonnée négative, la vitesse décroît, elle tend vers la vitesse limite v_1 quand t devient infini.

Cas particulier. — Nous allons maintenant effectuer les intégrations en supposant $n = 2$. Occupons-nous d'abord de l'ascension. Reprenons, Oz étant dirigé vers le haut, l'équation

$$(1) \qquad dt = -\frac{dv}{g + \rho v^2}.$$

Une quadrature donne aisément

$$\sqrt{g\rho}\,t = \operatorname{Arc\,tg}\sqrt{\frac{\rho}{g}}\,v_0 - \operatorname{Arc\,tg}\sqrt{\frac{\rho}{g}}\,v$$

d'où

$$(2) \qquad v = \sqrt{\frac{g}{\rho}}\operatorname{tg}\sqrt{g\rho}\,(t_1 - t)$$

en posant $t_1 = \frac{1}{\sqrt{g\rho}}\operatorname{Arc\,tg}\sqrt{\frac{\rho}{g}}\,v_0$. Pour $v = 0$, $t = t_1$, c'est à l'époque t_1 que le mobile termine son ascension.

L'équation (2) s'écrit

$$dz = \sqrt{\frac{g}{\rho}} \cdot \operatorname{tg}\sqrt{g\rho}\,(t_1 - t)\,.\,dt.$$

Une deuxième quadrature donne l'équation du mouvement

$$(3) \qquad z = \frac{1}{\rho}\,\mathrm{L}\,\frac{\cos\sqrt{g\rho}\,(t_1 - t)}{\cos\sqrt{g\rho}\,t_1}.$$

La cote z_1 du point le plus haut atteint par le mobile correspond à $t = t_1$, c'est $-\frac{1}{\rho}\mathrm{L}\cos\sqrt{g\rho}\,t_1$ ou $\frac{1}{2\rho}\mathrm{L}\left[1 + \frac{\rho v_0^2}{g}\right]$.

Comme exercices nous conseillons au lecteur : 1° de vérifier l'homogénéité de ces formules; 2° d'étudier comment varient t_1 et z_1 quand ρ augmente; 3° de montrer que lorsque ρ tend vers zéro elles deviennent les formules relatives au mouvement dans le vide.

Passons maintenant à la descente en traitant seulement le cas où la vitesse initiale est nulle. Le lecteur pourra traiter ensuite le cas où il n'en est pas ainsi. Oz étant dirigé vers le bas, à partir de $dt = \frac{dv}{g - \rho v^2}$, une quadrature donne, en observant que t est nul pour $v = 0$,

$$\sqrt{g\rho}\,t = \operatorname{Arg\,th}\sqrt{\frac{\rho}{g}}\,v, \qquad \text{d'où} \qquad v = \sqrt{\frac{g}{\rho}}\operatorname{th}\sqrt{g\rho}\,t.$$

Une deuxième quadrature donne l'équation du mouvement

$$z = \frac{1}{\rho}\mathrm{L}\,\operatorname{ch}\sqrt{g\rho}\,t.$$

Ces formules donnent lieu aux vérifications signalées à propos du mouvement ascendant.

Deuxième partie. — La vitesse initiale n'est pas verticale. — Nous donnerons seulement une idée des perturbations apportées par la résistance du milieu en étudiant le cas où la résistance est proportionnelle à la vitesse. Cette hypothèse facilite beaucoup l'intégration car elle conduit pour déterminer, en fonction de t, les coordonnées cartésiennes du mobile, à deux équations différentielles ne contenant chacune qu'une seule fonction inconnue.

Rapportons le plan vertical qui contient la vitesse initiale $\overrightarrow{OV_0}$ aux deux axes Ox et Oy déjà définis dans le cas où il n'y a pas de résistance de milieu et conservons les mêmes notations. La résultante des forces qui agissent sur le mobile est $\vec{F} = m\vec{g} + \vec{R}$, où $\vec{R} = -kA\vec{V}$

Les composantes scalaires de $\vec{F}$ sont

$$X = -kA\frac{dx}{dt}, \qquad Y = -mg - kA\frac{dy}{dt}$$

et, par suite, les équations différentielles du mouvement peuvent s'écrire

$$(1) \qquad m\frac{d^2x}{dt^2} + kA\frac{dx}{dt} = 0, \qquad m\frac{d^2y}{dt^2} + kA\frac{dy}{dt} = -mg.$$

Posons encore $\rho = \frac{kA}{m}$. Les dérivées $x_1 = \frac{dx}{dt}$, $y_1 = \frac{dy}{dt}$ vérifient les équations différentielles linéaires à coefficients constants

$$\frac{dx_1}{dt} + \rho x_1 = 0, \qquad \frac{dy_1}{dt} + \rho y_1 = -g$$

qui ont pour solution générale

$$x_1 = \lambda e^{-\rho t}, \qquad y_1 = -\frac{g}{\rho} + \mu e^{-\rho t}.$$

En déterminant λ et μ par les conditions initiales on trouve $\lambda = v_0\cos\alpha$, $\quad \mu = v_0\sin\alpha + \frac{g}{\rho}$,

d'où

$$(2) \qquad \begin{cases} x_1 = v_0 e^{-\rho t}\cos\alpha, \\ y_1 = \left(v_0\sin\alpha + \frac{g}{\rho}\right)e^{-\rho t} - \frac{g}{\rho}. \end{cases}$$

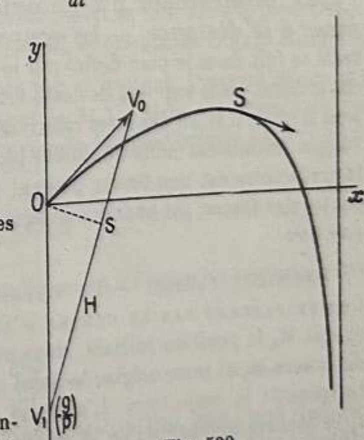

Fig. 539.

Ces formules, linéaires par rapport à $e^{-\rho t}$, montrent que l'hodographe est un segment de droite. Si le pôle de l'hodographe est O, ce segment joint le point V_0 qui correspond à $t = 0$ au point $V_1\left(0, -\frac{g}{\rho}\right)$ qui correspond à t infini. Nous reconnaissons ainsi l'existence d'une vitesse limite, cette vitesse qui est verticale a pour mesure $\frac{g}{\rho}$.

Une nouvelle intégration donne

(3) $$x = \frac{v_0 \cos\alpha}{\rho}(1 - e^{-\rho t}), \qquad y = \left(v_0 \sin\alpha + \frac{g}{\rho}\right)\frac{1 - e^{-\rho t}}{\rho} - \frac{g}{\rho}t.$$

Quand t devient infini par valeurs positives, $e^{-\rho t}$ tend vers zéro, x tend vers $\frac{v_0 \cos\alpha}{\rho}$ et y devient infini par valeurs négatives. La trajectoire admet une asymptote verticale dont l'abscisse est $\frac{v_0 \cos\alpha}{\rho}$.

La figure 539 donne la forme de la courbe *balistique* quand l'angle α est positif. La vitesse est minimum quand le mobile passe au point S qui correspond au point s, pied de la perpendiculaire menée de O à l'hodographe.

Effet de la résistance de l'air sur le mouvement des projectiles. — La résistance opposée au mouvement des projectiles, même par un air assez calme pour que l'influence du vent soit négligeable, se manifeste par des différences profondes entre le mouvement parabolique et les résultats de l'étude expérimentale du mouvement des projectiles. Les résultats suivants, relatifs au tir avec le fusil Lebel, la vitesse de la balle à la sortie de l'arme étant de 625 mètres par seconde, montrent l'influence considérable de la résistance de l'air.

	DANS LE VIDE	DANS L'AIR
Angle de tir correspondant à la plus grande portée . .	45°	32°
Maximum de la portée	40 km.	4 km.
Cote du point le plus haut de la trajectoire de plus grande portée	10 km.	0 km. 5
Abscisse du point le plus haut de cette trajectoire . .	20 km.	2 km. 2

Avec un projectile de même nature mais de dimensions plus grandes les résultats diffèrent un peu moins de ceux de l'étude du mouvement parabolique. Ainsi l'obus lancé avec une vitesse initiale de 800 mètres par seconde par un canon de marine de 305 millimètres sous un angle de 30° retombe à 18 kilomètres de son point de départ; dans le vide sa portée serait de 58 kilomètres.

FORCE ISSUE D'UN CENTRE FIXE ET PROPORTIONNELLE A LA DISTANCE A CE CENTRE

736. ***Mouvement d'un point attiré par un centre proportionnellement à la distance.*** — Le mouvement ayant lieu sous l'action d'une force centrale se fait dans le plan défini par le centre des forces et la vitesse initiale dans le cas général où le support de cette vitesse ne passe pas par le centre des forces, de plus il obéit à la loi des aires relativement à ce centre. Dans le cas particulier où la vitesse initiale est nulle ou portée par une droite passant par le centre des forces, la trajectoire est une droite passant par ce centre. Toutefois si le point, placé au centre des forces, est abandonné sans vitesse initiale, il reste en équilibre dans cette position.

PREMIÈRE PARTIE. — LA VITESSE INITIALE EST NULLE OU PORTÉE PAR UNE DROITE PASSANT PAR LE CENTRE D'ATTRACTION. — Soit O le centre d'attraction et soit M_0 la position initiale. Nous prendrons pour axe $x'x$ la droite OM_0 orientée de O vers M_0 et pour origine le point O. Dans le cas où M_0 est en O on oriente arbitrairement la trajectoire. L'abscisse de M_0 est un nombre positif ou nul x_0. Soit v_0 la mesure algébrique de la vitesse initiale. L'origine des temps est l'instant où le mobile est abandonné en M_0 ou lancé de ce point.

Quelle que soit la position du point matériel M, la force attractive a pour expression vectorielle

$$\vec{F} = -k\overrightarrow{OM},$$

k étant une certaine constante positive. Au point de vue de l'homogénéité la mesure de F a pour dimensions MLT^{-2}, celle de OM a pour dimensions L, les dimensions de la constante k sont donc MT^{-2}, ceci nous conduit à poser $k = m\omega^2$, m étant la masse de M et ω ayant les dimensions d'une vitesse angulaire.

Dans le cas étudié, l'équation différentielle du mouvement est

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -m\omega^2 x,$$

son intégrale générale est

$$x = a\cos\omega t + b\sin\omega t.$$

En déterminant les constantes a et b par les conditions initiales on trouve

$$x = x_0 \cos\omega t + \frac{v_0}{\omega}\sin\omega t.$$

Le mouvement est vibratoire simple, le centre des oscillations est le centre d'attraction. Nous avons déjà étudié ce mouvement (658).

Tautochronisme. — Abandonnons sans vitesse initiale le point matériel en un point M_0 distinct de O. L'équation du mouvement se réduit à

$$x = x_0 \cos\omega t.$$

Le mobile atteint le point O pour la première fois à l'époque $t_1 = \frac{\pi}{2\omega}$, plus petite valeur positive qui annule l'élongation x, cette valeur est indépendante de x_0. Ainsi, *quel que soit le point de l'espace où l'on abandonne le mobile sans vitesse initiale il met le même temps pour arriver au centre d'attraction*, on exprime cette propriété en disant que le mouvement est *tautochrone*.

DEUXIÈME PARTIE. — LE SUPPORT DE LA VITESSE INITIALE NE PASSE PAS PAR LE CENTRE D'ATTRACTION. — *Équations du mouvement.* — Soit M_0 la position initiale et soit $\overrightarrow{M_0V_0}$ la vitesse initiale. Le mouvement se fait dans le plan OM_0V_0. Rapportons ce plan à un axe $x'Ox$ passant par M_0 et orienté de O vers M_0 et à un axe $y'Oy$ parallèle au vecteur $\overrightarrow{M_0V_0}$ et orienté par ce vecteur. Posons $OM_0 = x_0$ et $M_0V_0 = v_0$. (Observons que si la direction de M_0V_0 varie au cours d'un problème, on devra choisir un axe $y'Oy$ fixe, par exemple perpendiculaire à Ox.) L'équation fondamentale de la Dynamique

$$m\vec{\Gamma} = -m\omega^2\overrightarrow{OM}$$

donne, en projetant sur chacun des axes parallèlement à l'autre les vecteurs correspondant aux deux membres,

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\omega^2 x, \qquad \frac{d^2y}{dt^2} = -\omega^2 y.$$

Grâce au fait que chacune de ces équations ne contient que l'une des coordonnées on peut les intégrer séparément. Ce sont d'ailleurs des équations linéaires à coefficients constants sans second membre; leur intégrale générale est donnée par les formules

$$x = a\cos\omega t + b\sin\omega t, \qquad y = a'\cos\omega t + b'\sin\omega t.$$

A l'époque zéro, l'abscisse du mobile est x_0 et la projection de sa vitesse sur $x'x$ parallèlement à $y'y$ est nulle, on trouve ainsi que $a = x_0$ et $b = 0$. L'ordonnée étant nulle à l'époque zéro et la projection de la vitesse initiale sur $y'y$ parallèlement à $x'x$ ayant pour mesure algébrique v_0 on trouve que $a' = 0$ et $b' = \frac{v_0}{\omega}$. Les équations du mouvement sont donc

$$(1) \qquad x = x_0 \cos \omega t, \qquad y = \frac{v_0}{\omega} \sin \omega t.$$

Il importe d'observer que ces équations expriment que les composantes scalaires du vecteur $\overrightarrow{OM}$ sont celles de la somme géométrique $\overrightarrow{OM_0} \cos\omega t + \frac{\overrightarrow{M_0V_0}}{\omega} \sin \omega t$, elles équivalent à l'égalité vectorielle

$$(2) \qquad \overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OM_0} \cos \omega t + \frac{\overrightarrow{M_0V_0}}{\omega} \sin \omega t$$

indépendante du système de coordonnées auquel on peut rapporter le mouvement.

Trajectoire. — La trajectoire est une ellipse E ayant pour centre le centre d'attraction et pour équation

$$\frac{x^2}{x_0^2} + \frac{\omega^2 y^2}{v_0^2} = 1.$$

Le demi-diamètre conjugué de OM_0 est parallèle à la vitesse initiale, il a pour mesure $\frac{v_0}{\omega}$.

Le mobile tourne indéfiniment autour de O sur l'ellipse E. Entre deux passages consécutifs en un certain point P de la trajectoire il s'écoule le temps $T = \frac{2\pi}{\omega}$. *La durée de la révolution du mobile ne dépend ni de la position initiale ni de la vitesse initiale.*

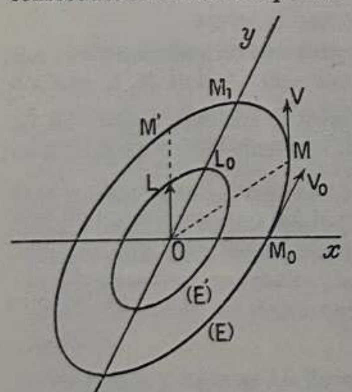

Fig. 540.

Remarque I. — Toute ellipse peut être regardée comme la trajectoire d'un point matériel attiré par un centre proportionnellement à la distance. En effet, il suffit de prendre pour centre d'attraction le centre de l'ellipse donnée, pour ω un nombre positif arbitraire, pour position initiale un point quelconque M_0 de la courbe et pour vitesse initiale une vitesse de sens quelconque portée par la tangente en M_0 et mesurée par le produit ωOM_1, OM_1 étant le demi-diamètre conjugué de OM_0.

Remarque II. — Si, la position initiale restant la même, la vitesse initiale est remplacée par son opposée, les équations du nouveau mouvement se déduisent des équations (1) en y remplaçant v_0 par $-v_0$. Elles ne diffèrent pas de celles que l'on obtient en remplaçant t par $-t$ dans les équations (1); comme nous le savions, le mouvement est réversible.

Hodographe. — Le pôle de l'hodographe étant choisi en O, les coordonnées du point L qui décrit l'hodographe sont

$$x_1 = \omega x_0 \cos\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right), \qquad y_1 = \omega \cdot \frac{v_0}{\omega} \sin\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right),$$

on a donc $\overrightarrow{OL} = \omega . \overrightarrow{OM'}$, M' étant la position du mobile à l'époque t' telle que $\omega t' = \omega t + \frac{\pi}{2}$. L'hodographe est l'ellipse E' homothétique de la trajectoire dans l'homothétie (O, ω).

Conditions pour que le mouvement soit circulaire. — Il est nécessaire que la vitesse initiale soit perpendiculaire à OM_0 et que $\frac{v_0}{\omega} = x_0$. Ces conditions sont suffisantes d'après les équations (1).

Conséquences de la loi des aires et du théorème de la force vive. Théorèmes d'Apollonius. — 1° Le support de l'accélération de M passant constamment par O, le mouvement obéit à la loi des aires relativement à ce point, c'est dire que, $\overrightarrow{MV}$ étant le vecteur vitesse de M,

$$(3) \qquad \overrightarrow{OM} \wedge \overrightarrow{MV} = \overrightarrow{OM_0} \wedge \overrightarrow{M_0V_0}.$$

On sait que $\overrightarrow{MV} = \omega \overrightarrow{OM'}$, M' étant la position du mobile à l'époque $t = t + \frac{\pi}{2\omega}$, et, comme toute ellipse peut être regardée comme la trajectoire du mouvement étudié, *l'aire du parallélogramme qui a pour côtés deux demi-diamètres conjugués d'une ellipse est constante et égale à l'aire du rectangle qui a pour côtés les demi-axes.*

2° La mesure algébrique de la force sur le rayon vecteur étant $-m\omega^2 r$, la force dérive de la fonction de forces $-m\omega^2 \frac{r^2}{2}$. En exprimant que la somme de l'énergie cinétique et de l'énergie potentielle du point reste constante on trouve, en posant $r_0 = OM_0$,

$$(4) \qquad \frac{v^2}{2} + \frac{\omega^2 r^2}{2} = \frac{v_0^2}{2} + \frac{\omega^2 r_0^2}{2}.$$

et comme $v^2 = \omega^2 OM'^2$, la relation précédente exprime aussi que $OM^2 + OM'^2$ reste constante. *La somme des carrés de deux demi-diamètres conjugués d'une ellipse est constante et égale à celle des carrés des demi-axes* (T. III, 600).

Le lecteur pourra vérifier analytiquement en partant de l'égalité (2) et en supposant les axes rectangulaires, que $\overrightarrow{OM} \wedge \overrightarrow{OM'}$ et $OM^2 + OM'^2$ ont des grandeurs constantes.

Cercle orthoptique. — Nous savons (T. III, 597) que le cercle orthoptique ou cercle de Monge d'une ellipse — cercle lieu géométrique des points d'où l'on peut mener à l'ellipse deux tangentes rectangulaires — est concentrique à l'ellipse et passe par les points communs à cette courbe et à ses directrices, points où les tangentes à l'ellipse sont isotropes. Pour un tel point l'expression de v^2 est nulle puisque, les axes étant supposés rectangulaires, $dx^2 + dy^2 = 0$. Si r est la distance d'un de ces points à l'origine, c'est aussi le rayon du cercle orthoptique, or d'après la relation (4)

$$r^2 = OM_0^2 + \frac{v_0^2}{\omega^2}.$$

Ainsi, *toutes les trajectoires qui correspondent à la même position initiale et à des vitesses initiales de même grandeur situées dans le même plan contenant le centre d'attraction ont même cercle orthoptique.*

Problème. — *Dans quelle direction faut-il lancer le mobile d'une position donnée M_0 avec une vitesse de mesure donnée v_0 pour qu'il atteigne un point donné P?*

Prenons pour plan de figure le plan déterminé par le centre d'attraction O et les points M_0, P. L'ellipse trajectoire demandée E doit passer par M_0, par P et admettre pour cercle orthoptique un cercle connu C; ces conditions équivalent à cinq conditions simples et déterminent géométriquement E. Pour obtenir la direction demandée cherchons à construire le point H, pôle de la droite M_0P par rapport à l'ellipse E. Les enveloppes de seconde classe tangentes en M_0 et P à l'ellipse E sont celles d'un faisceau linéaire tangentiel auquel on peut donner pour bases le couple des points M_0, P et l'enveloppe réduite à deux points confondus avec H. On sait que les cercles orthoptiques des enveloppes de seconde classe d'un faisceau linéaire tangentiel constituent un faisceau linéaire de cercles (T. III, 584). A ce faisceau de cercles appartiennent C et le cercle décrit sur le segment M_0P comme diamètre. *Le point H est l'un des points de Poncelet de ce faisceau.*

Réciproquement, soit H l'un de ces points de Poncelet. Parmi les coniques tangentes en M_0 et P aux droites HM_0 et HP il y a une ellipse ayant C pour cercle orthoptique.

Le problème a, en général, deux solutions.

Pour que les points de Poncelet soient réels, il faut et il suffit que le cercle décrit sur M_0P comme diamètre soit intérieur à C, les points M_0 et P étant nécessairement à l'intérieur de ce dernier cercle. Si A est le milieu de M_0P, cette condition s'exprime au moyen de l'inégalité

$$OA + AM_0 < R,$$

R étant le rayon de C. Les points A qui satisfont à cette inégalité sont les points situés à l'intérieur d'une certaine ellipse ayant O et M_0 pour foyers. Par l'homothétie $(M_0, 2)$ on déduit de ce résultat que le problème est possible et que deux trajectoires répondent à la question si le point P est intérieur à l'ellipse Σ qui a C pour cercle principal et M_0 pour foyer, il est impossible si P est extérieur à cette ellipse. *L'ellipse Σ est l'enveloppe des trajectoires que l'on peut obtenir en prenant M_0 pour position initiale et une vitesse initiale mesurée par v_0.*

Nous laissons au lecteur le soin de traiter analytiquement la question.

Équations générales du mouvement d'un point attiré par un centre proportionnellement à la distance. — Reprenons l'équation vectorielle du mouvement

$$(2) \qquad \overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OM_0}\cos\omega t + \frac{\overrightarrow{M_0V_0}}{\omega}\sin\omega t$$

et supposons l'espace rapporté à des axes O_1x, O_1y, O_1z. Soient c, c', c'' les coordonnées du centre d'attraction O; x, y, z celles du mobile à l'époque t et v_0, v_0', v_0'' les composantes scalaires de la vitesse initiale. D'après l'équation (2)

$$x - c = (x_0 - c)\cos\omega t + \frac{v_0}{\omega}\sin\omega t, \qquad y - c' = (y_0 - c')\cos\omega t + \frac{v_0'}{\omega}\sin\omega t,$$

$$z - c'' = (z_0 - c'')\cos\omega t + \frac{v_0''}{\omega}\sin\omega t.$$

On trouverait directement ces expressions en intégrant les équations différentielles du mouvement

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\omega^2(x - c), \qquad \frac{d^2y}{dt^2} = -\omega^2(y - c'), \qquad \frac{d^2z}{dt^2} = -\omega^2(z - c'').$$

737. **Mouvement dans un milieu résistant.** — Soit O un point fixe et soit M un point de masse m sollicité par une force $\vec{F}$ portée par MO et éprouvant de la part du milieu une résistance qui se manifeste par une force $\vec{R}$ ayant même support que la vitesse $\overrightarrow{MV}$ du point M. Soit M_0 la position initiale de M, soit $\overrightarrow{M_0V_0}$ la vitesse initiale et soit enfin t_0 l'époque initiale.

Dans le cas général où la vitesse initiale n'est pas portée par OM_0, puisque le vecteur accélération reste dans le plan OMV, ce plan est le plan osculateur en M à la trajectoire, ce plan contenant le point fixe O la trajectoire est plane, elle est dans le plan OM_0V_0.

Examinons le cas particulier où la vitesse initiale est nulle ou portée par OM_0. Le mouvement étant complètement déterminé par les conditions initiales et la loi de la force il suffit, pour prouver qu'il est rectiligne, d'établir qu'il existe un mouvement rectiligne satisfaisant à la relation $m\vec{\Gamma} = \vec{F} + \vec{R}$ et aux conditions initiales. A cet effet prenons la droite OM_0 pour axe $x'x$; appelons x_0 l'abscisse de M_0 et v_0 la mesure algébrique de la vitesse initiale. Si, dans le mouvement rectiligne cherché, x est l'abscisse du mobile à l'époque t, la mesure algébrique du vecteur $\vec{F} + \vec{R}$ correspondant est une fonction connue de x et $\frac{dx}{dt}$, soit $f\left(x, \frac{dx}{dt}\right)$. Or,

nous savons qu'il existe une fonction $x = \varphi(t)$ telle que $\varphi(t_0) = x_0$, $\varphi'(t_0) = v_0$ et qui vérifie l'équation différentielle

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = f\left(x, \frac{dx}{dt}\right).$$

L'existence de cette fonction prouve que le mouvement est rectiligne quand la vitesse initiale est nulle ou portée par OM_0.

Étudions ce mouvement rectiligne en supposant $\vec{F} = -m\omega^2\overrightarrow{OM}$, ω étant une constante positive et la *résistance du milieu proportionnelle à la vitesse* du point matériel M, soit $\vec{R} = -2mh\vec{V}$, h étant un certain coefficient positif. Le point O étant l'origine des abscisses l'équation différentielle du mouvement est

$$(1) \qquad m\frac{d^2x}{dt^2} = -m\omega^2x - 2mh\frac{dx}{dt}.$$

Cette équation différentielle linéaire à coefficients constants sans second membre a pour équation caractéristique

$$r^2 + 2hr + \omega^2 = 0.$$

Trois cas sont à distinguer :

1° $h < \omega$ (la résistance du milieu est suffisamment faible). Les racines de l'équation caractéristique sont les imaginaires $-h + ik$, $-h - ik$, k étant la racine carrée arithmétique de $\omega^2 - h^2$. L'intégrale générale de l'équation différentielle s'écrit

$$x = e^{-ht}(a\cos kt + b\sin kt),$$

a et b étant des constantes qui se calculent facilement au moyen de l'abscisse et de la vitesse initiales.

Pour suivre le déplacement du point M, considérons un mobile M' animé sur $x'x$ d'un mouvement vibratoire simple dans lequel l'élongation à l'époque t est

$$a\cos kt + b\sin kt.$$

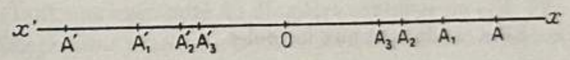

Fig. 541.

Ce mobile M' oscille entre deux points A et A' symétriques par rapport à O, la durée d'une oscillation complète étant $T = \frac{2\pi}{k}$. Si M' est en A à une certaine époque t_1, le mobile M est à cette époque en A_1 tel que $\overline{OA_1} = e^{-ht_1}.\overline{OA}$. Marquons les points A_1, A_1', A_2, A_2', ... dont les abscisses forment une progression géométrique ayant pour raison $-e^{-h\frac{T}{2}}$. A partir de l'époque t_1, M oscille autour de O en allant de chacun de ces points au suivant. Toutes ces oscillations sont de même durée, elles sont *isochrones*, leur durée commune est plus grande que si le milieu n'était pas résistant; leurs amplitudes décroissent en progression géométrique, on dit que les oscillations sont *amorties*. On dit encore que le point M est animé d'un *mouvement périodique amorti*.

2° $h > \omega$. — L'équation caractéristique a deux racines réelles négatives $-r_1$ et $-r_2$. L'abscisse du mobile à l'époque t a une expression de la forme

$$x = Ae^{-r_1t} + Be^{-r_2t}.$$

Les constantes A et B sont déterminées par les conditions initiales. M tend vers O quand t devient infini. Il se dirige constamment vers O quand v_0 a le signe de $-x_0$ tout en ayant une valeur absolue suffisamment petite. Au contraire le mobile ne se dirige vers O qu'après avoir rebroussé chemin quand v_0 a le signe de x_0 ou encore quand, ayant le signe de $-x_0$, sa valeur absolue est suffisamment grande.

3° $h = \omega$. — Dans ce cas particulier $x = e^{-\omega t}(a + bt)$, a et b étant des constantes déterminées par les conditions initiales. En ce qui concerne le sens du mouvement ce cas ne se distingue pas du précédent.

Nous conseillons au lecteur d'étudier le mouvement quand la vitesse initiale n'est pas portée par OM_0. Les coordonnées cartésiennes x, y du mobile sont des intégrales de l'équation différentielle (1). Dans tous les cas, le centre d'attraction est un point asymptote pour la trajectoire.

738. ***Mouvement d'un point repoussé par un centre proportionnellement à la distance.*** — O étant le centre de répulsion, la force à laquelle est soumis un point M de masse m est $\vec{F} = m\omega^2\overrightarrow{OM}$.

Les généralités par lesquelles commence le paragraphe 736 sont applicables.

Première partie. — La vitesse initiale est nulle ou portée par une droite passant par le centre de répulsion. — Reprenons les conventions et les notations du paragraphe 736. L'équation différentielle de mouvement est

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \omega^2 x.$$

En intégrant cette équation et tenant compte des conditions initiales nous trouvons

$$x = x_0 \operatorname{ch} \omega t + \frac{v_0}{\omega} \operatorname{sh} \omega t.$$

Nous avons déjà étudié le mouvement rectiligne défini par cette équation (659).

Deuxième partie. — Le support de la vitesse initiale ne passe pas par le centre de répulsion. — *Mouvement.* — En choisissant les axes de coordonnées comme dans le cas où la force est attractive les équations différentielles du mouvement sont

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \omega^2 x, \qquad \frac{d^2y}{dt^2} = \omega^2 y.$$

Elles conduisent aux formules

(1) $$x = x_0 \operatorname{ch} \omega t, \qquad y = \frac{v_0}{\omega} \operatorname{sh} \omega t,$$

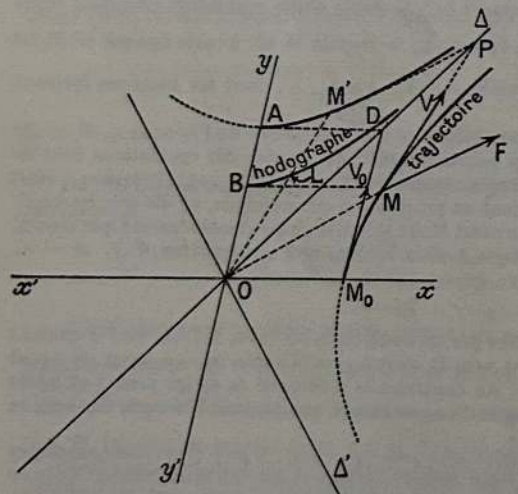

Fig. 542.

équivalentes à l'égalité vectorielle

(2) $$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OM_0} \operatorname{ch} \omega t + \frac{\overrightarrow{M_0V_0}}{\omega} \operatorname{sh} \omega t.$$

Partant de M_0 le point M se déplace toujours dans le même sens sur la branche de droite de l'hyperbole H représentée par l'équation

$$\frac{x^2}{x_0^2} - \frac{\omega^2 y^2}{v_0^2} = 1.$$

Le mobile s'éloigne à l'infini quand t devient infini. La trajectoire est asymptote à la droite Δ définie par O et le point $D\left(x_0, \frac{v_0}{\omega}\right)$.

Remarque. — Soit H une hyperbole donnée et soit O son centre. Prenons sur cette courbe un point quelconque M_0. La tangente à l'hyperbole en M_0 rencontre les asymptotes en deux points, soit D l'un d'eux. Soit enfin ω un nombre positif arbitraire. D'après ce qui précède, si de M_0 nous lançons un point M de masse arbitraire m avec la vitesse $\omega \overrightarrow{M_0D}$ et si ce point est soumis à la force $m\,\omega^2\overrightarrow{OM}$, sa trajectoire fait partie de H.

Hodographe. — Le pôle de l'hodographe étant pris en O, les coordonnées du point L de l'hodographe sont

$$x_1 = \omega x_0 \operatorname{sh} \omega t, \qquad y_1 = v_0 \operatorname{ch} \omega t.$$

Posons $\overrightarrow{OL} = \omega . \overrightarrow{OM'}$. Les coordonnées x', y' de M' sont telles que

$$\frac{x'^2}{x_0^2} - \frac{\omega^2 y'^2}{v_0^2} = -1$$

d'où il résulte que M' se déplace sur l'hyperbole H' conjuguée de H (T. III, 602). L'hodographe se déduit par l'homothétie (O, ω) de la partie de H' que décrit M'; le point L va de B au point à l'infini sur l'asymptote Δ.

Remarque. — Pour que l'hyperbole H soit équilatère, il faut et il suffit que la tangente en M_0 détermine avec les asymptotes un triangle rectangle en O et, pour cela, que $M_0D = OM_0$ c'est-à-dire que $v_0 = \omega . OM_0$.

Conséquences de la loi des aires et du théorème de la force vive. Théorèmes d'Apollonius. — 1° D'après la loi des aires, vérifiée relativement au point O, pour toute position du mobile

$$\overrightarrow{OM} \wedge \overrightarrow{MV} = \overrightarrow{OM_0} \wedge \overrightarrow{M_0V_0}.$$

Or, $\overrightarrow{MV} = \omega . \overrightarrow{OM'}$, M' étant une extrémité du diamètre conjugué de OM. Par conséquent, *l'aire du parallélogramme construit sur deux demi-diamètres conjugués d'une hyperbole est égale à celle du rectangle construit sur les demi-axes.*

2° La force dérive de la fonction de forces $\frac{1}{2} m\omega^2 r^2$. En exprimant que la somme de l'énergie cinétique et de l'énergie potentielle du point reste constante on trouve, en posant $r_0 = OM_0$.

$$\frac{v^2}{2} - \frac{\omega^2 r^2}{2} = \frac{v_0^2}{2} - \frac{\omega^2 r_0^2}{2}.$$

Comme $v^2 = \omega^2 OM'^2$, cette relation exprime que la différence $OM^2 - OM'^2$ reste constante. *Dans toute hyperbole, la différence des carrés de deux demi-diamètres conjugués est égale à la différence des carrés des demi-axes* (T. III, 602).

Le lecteur pourra vérifier analytiquement en partant de l'égalité (2) et en supposant les axes rectangulaires que $\overrightarrow{OM} \wedge \overrightarrow{OM'}$ et $OM^2 - OM'^2$ ont des grandeurs constantes.

Cercle orthoptique. — En raisonnant comme nous l'avons fait pour une attraction proportionnelle à la distance, on reconnaît que les trajectoires données par la même position initiale et des vitesses initiales de même grandeur ont même cercle orthoptique.

Remarque. — Considérons un point matériel M soumis à des attractions ou à des répulsions proportionnelles à ses distances à certains centres, forces auxquelles on peut même adjoindre une force constante en grandeur et en direction. Nous savons (701) que la résultante de ces forces est, en général, une attraction ou une répulsion proportionnelles à la distance. Le point M est, par suite animé de l'un des mouvements étudiés.

Exceptionnellement, la résultante peut être constante en grandeur et en direction. Dans ce cas particulier le mouvement est celui que nous avons étudié au début du chapitre.

Il peut même arriver que la résultante soit nulle quelle que soit la position de M. Lorsqu'il en est ainsi, le seul mouvement possible est le mouvement rectiligne uniforme.

Solution de quelques exercices.

739. Problème I. — *Un point non pesant M de masse unité peut se mouvoir dans un plan fixe P que l'on suppose orienté. Il est soumis à l'action de la force* $\overrightarrow{F_1} = k^2.\overrightarrow{MO}$, *O étant un point fixe du plan P et d'une force* $\overrightarrow{F_2}$ *représentée par un vecteur du plan P, ce vecteur peut se déduire du vecteur vitesse* $\overrightarrow{MV}$ *par une rotation de valeur algébrique* $\frac{\pi}{2}$ *autour de M suivie de l'homothétie* (M, 2ω), *ω étant un nombre positif donné. On lance le mobile au point O avec une vitesse mesurée par* v_0 *et située dans le plan P. Étudier le mouvement de M. Construire la trajectoire lorsque* $k = \omega\sqrt{3}$ (École Navale).

Rapportons le plan à un système de coordonnées polaires ayant O pour pôle et pour axe polaire Ox le support de la vitesse initiale. Soient r et θ les coordonnées polaires du mobile à l'époque t. Les composantes scalaires de la force $\overrightarrow{F_2}$ sur l'axe OX orienté par l'angle θ et sur l'axe OY directement perpendiculaire à OX sont $-2\omega r\frac{d\theta}{dt}$ et $2\omega\frac{dr}{dt}$. En exprimant que les composantes scalaires suivant OX et OY du vecteur $\overrightarrow{\Gamma}$ sont celles de la résultante des forces $\overrightarrow{F_1}$ et $\overrightarrow{F_2}$ nous obtenons pour déterminer r et θ en fonction de l'époque t les équations différentielles

$$\begin{cases} \dfrac{d^2r}{dt^2} - r\left(\dfrac{d\theta}{dt}\right)^2 = -k^2r - 2\omega r\dfrac{d\theta}{dt} \\ \dfrac{1}{r}\dfrac{d\left(r^2\dfrac{d\theta}{dt}\right)}{dt} = 2\omega\dfrac{dr}{dt}. \end{cases}$$

La seconde s'intègre immédiatement; elle donne, en tenant compte des conditions initiales,

$$r^2\frac{d\theta}{dt} = \omega r^2 \quad \text{ou} \quad \frac{d\theta}{dt} = \omega \quad \text{et} \quad \theta = \omega t.$$

En remplaçant θ par ωt dans la première équation on trouve

$$\frac{d^2r}{dt^2} + (\omega^2 + k^2)r = 0.$$

L'intégrale satisfaisant aux conditions initiales est $r = \dfrac{v_0}{\sqrt{k^2+\omega^2}}\sin(\sqrt{k^2+\omega^2}\,t)$.

L'équation de la trajectoire est donc

$$r = \frac{v_0}{\sqrt{k^2+\omega^2}}\sin\left(\frac{\sqrt{k^2+\omega^2}}{\omega}\theta\right).$$

Si $k = \omega\sqrt{3}$, cette équation devient $r = \dfrac{v_0}{2\omega}\sin 2\theta$, la courbe qu'elle définit a été étudiée (T. II, 342). Le travail de la force $\overrightarrow{F_2}$ est nul puisque cette force est normale à la trajectoire; en appliquant le théorème de la force vive on peut calculer la vitesse v en fonction de r, on trouve $v^2 = v_0^2 - k^2r^2$.

Problème II. — *Un fil élastique de masse négligeable est attaché à un point fixe A. Quand ce fil pend librement sans être tiré il a une longueur AB = l et une tension nulle. Quand le fil est tiré à son extrémité libre de façon à prendre une longueur AM = r plus grande que l, la tension du fil a une intensité proportionnelle à l'allongement,* $F = k(r - l)$, *k étant une constante. On attache un point pesant M au bout du fil; quelle doit être la masse m de ce point pour qu'il soit en équilibre sous l'action de son poids et de la tension du fil dans la position O pour laquelle AO = 2l?*

On tire ensuite en M sur le fil et on amène le point M sur la verticale AO en M_0 *tel que* $AM_0 = r_0$
soit supérieur à 2l, puis on abandonne le système sans imprimer à M de vitesse initiale. Étudier
le mouvement de M (École Normale Supérieure).

Masse du point M. — Pour que le point O soit une position d'équilibre pour M, il faut
et il suffit que le poids de M soit directement opposé à la force exercée sur M. Cette force,
dirigée de bas en haut, est égale à la tension du fil, elle a pour mesure kl. La condition
d'équilibre s'exprime par l'égalité

$$mg = kl, \quad \text{elle donne} \quad m = \frac{kl}{g}.$$

Mouvement de M. — Lorsque la distance MA est supérieure à l, le fil est
tendu, M est soumis à son poids et à la tension du fil; la résultante de ces
forces peut être définie par la formule vectorielle

$$(1) \qquad \overrightarrow{F} = m\overrightarrow{g} + k\overrightarrow{MA}\left(1 - \frac{l}{MA}\right).$$

Lorsque la distance MA est inférieure à l, le point M n'est plus soumis qu'à son poids et

$$(2) \qquad \overrightarrow{F} = m\overrightarrow{g}.$$

Si, enfin MA = l, l'une quelconque des formules (1) et (2) représente la résultante des actions qui s'exercent sur M.

Étudions la question proposée. Orientons vers le bas la verticale de A, soit $\overline{AM} = r$ l'abscisse d'un point M de cette droite. Nous prendrons comme origine des temps l'instant où M est abandonné.

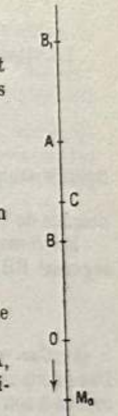

Fig. 543.

Rappelons que le mouvement est déterminé sans ambiguïté par la relation $m\overrightarrow{\Gamma} = \overrightarrow{F}$ et les conditions initiales. Dès lors, pour reconnaître que M prend un mouvement rectiligne il suffit d'observer qu'il existe une fonction $r = \varphi(t)$ telle que $\varphi(0) = r_0$ et $\varphi'(0) = 0$ et qui, en outre vérifie l'équation différentielle $m\dfrac{d^2r}{dt^2} = F$, dans laquelle F est la mesure algébrique de la force $\overrightarrow{F}$ quand son point d'application M est sur la verticale de A.

Marquons le point B_1 symétrique de B par rapport à A.

Si M est au-dessous de B, $\overrightarrow{F} = k.\overrightarrow{AB} + k\overrightarrow{MB}$ ou $\overrightarrow{F} = k\overrightarrow{BO} + k\overrightarrow{MB}$, soit $\overrightarrow{F} = k\overrightarrow{MO}$.

Si M est au-dessus de B_1, $\overrightarrow{F} = k\overrightarrow{AB} + k\overrightarrow{MB_1}$ ou $\overrightarrow{F} = k\overrightarrow{B_1A} + k\overrightarrow{MB_1}$ soit $\overrightarrow{F} = k\overrightarrow{MA}$

Enfin si M est entre B et B_1, $\overrightarrow{F} = m\overrightarrow{g}$, de même si M est en B ou en B_1.

1^er^ *Cas.* — Le point M étant abandonné en M_0 sans vitesse initiale, la résultante des forces qui agissent sur lui est $k\overrightarrow{MO}$, cela tant que M reste sur le segment M_0B. Le point M prend donc un mouvement vibratoire simple dont le centre est O et l'amplitude $OM_0 = r_0 - 2l$. Si cette amplitude est inférieure à OB, c'est-à-dire si r_0 est inférieur ou égal à $3l$, le point M conserve ce mouvement vibratoire simple, la période de ce mouvement est $2\pi\sqrt{\dfrac{m}{k}}$ ou $T = 2\pi\sqrt{\dfrac{l}{g}}$. Si $r_0 = 3l$, M atteint B avec une vitesse nulle.

2^e^ *Cas.* — Si r_0 surpasse $3l$, le point M atteint B avec une vitesse dirigée vers le haut,
soit v_1 la mesure de cette vitesse et soit t_1 la durée de l'ascension M_0B; après qu'il a dépassé B,
M n'est plus soumis qu'à son poids et si v_1 est assez faible M n'atteint pas B_1, il arrive en un
certain point C du segment BB_1 avec une vitesse nulle, soit t_2 la durée de l'ascension BC,
ensuite M retombe de C en B, en B il a une vitesse mesurée par v_1 et dirigée vers le bas tout
comme si le mouvement vibratoire s'était poursuivi; il reprend ce mouvement vibratoire
interrompu et revient en M_0. Entre le départ de M_0 et le retour en ce point il s'est écoulé un
temps mesuré par $2(t_1 + t_2)$. Les mêmes circonstances se produisent ensuite. Le mouvement est périodique, sa période est $2(t_1 + t_2)$.

Cherchons où doit être M_0 pour que M n'atteigne pas B_1. Le mouvement vibratoire que
prend M de M_0 en B a pour équation

$$r - 2l = (r_0 - 2l)\cos\sqrt{\frac{g}{l}}\,t,$$

la vitesse algébrique du mobile est donnée par la formule

$$v\sqrt{\frac{l}{g}} = -(r_0 - 2l)\sin\sqrt{\frac{g}{l}}\,t;$$

v et r sont liés par la relation

$$\frac{l}{g}v^2 + (r - 2l)^2 = (r_0 - 2l)^2.$$

La vitesse v_1 s'en déduit en remplaçant r par l qui correspond à B, on trouve

$$\frac{v_1^2}{g} = \frac{(r_0 - 2l)^2 - l^2}{l}.$$

Soumis seulement à son poids, le mobile s'élève à la hauteur $\frac{v_1^2}{2g}$ au-dessus de B, il reste au-dessous de B_1 si cette hauteur est inférieure à $2l$, c'est-à-dire si l'on a $r < l(2 + \sqrt{5})$.

En résumé le mobile oscille, comme nous l'avons expliqué, entre M_0 et un point C du segment BB_1 lorsque r satisfait à la double inégalité

$$3l < r_0 < l(2 + \sqrt{5}).$$

3e *Cas*. — Si la longueur r_0 est supérieure à $l(2 + \sqrt{5})$ le mobile s'élève au-dessus de B_1. Désignons maintenant par t_2 la durée de l'ascension BB_1 et par v_2 la vitesse numérique du mobile à son arrivée en B_1, M s'élève jusqu'à un point C_1 puis retombe de C_1 en B_1, il parcourt ainsi les segments B_1C_1 et C_1B_1 d'un mouvement vibratoire simple dont le centre est A et la période $T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$, soit t_3 la durée de l'ascension B_1C_1, c'est aussi la durée de la descente C_1B_1. En B_1 le mobile a repris la vitesse numérique v_2, et il arrive ensuite en B avec la vitesse numérique v_1, la durée de la chute B_1B est t_2. En B il reprend le mouvement vibratoire simple dont O est le centre. Il oscille ainsi indéfiniment de M_0 en C_1 et de C_1 en M_0, la durée d'une oscillation complète étant $2t_1 + 2t_2 + 2t_3$.

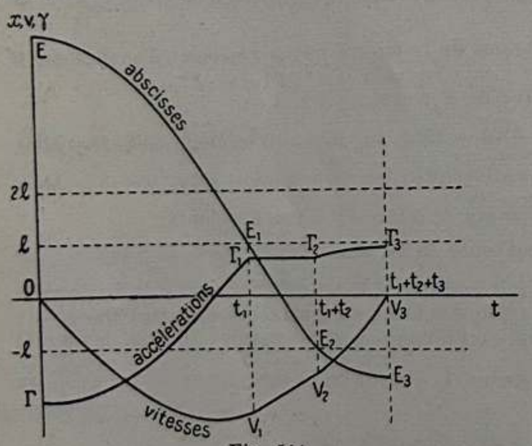

Fig. 544.

Diagrammes. — Traçons comme exemple les diagrammes relatifs au troisième cas. Pour l'ascension M_0B les diagrammes des abscisses, des vitesses et des accélérations sont des arcs EE_1, OV_1, $\Gamma\Gamma_1$ de sinusoïdes, le premier est limité au point E_1 dont l'ordonnée est l. Pour l'ascension BB_1, le diagramme des abscisses est un arc E_1E_2 de parabole, celui des vitesses est un segment rectiligne V_1V_2 tangent en V_1 à la deuxième sinusoïde et limité au point V_2, $t_1 + t_2$ est l'abscisse de V_2; quant au diagramme des accélérations c'est un segment $\Gamma_1\Gamma_2$ parallèle à Ot.

Enfin, pour l'ascension B_1C_1, les diagrammes sont des arcs E_2E_3, V_2V_3 et $\Gamma_2\Gamma_3$ de sinusoïdes, V_3 est sur Ot. Les diagrammes relatifs à l'intervalle de temps $(t_1 + t_2 + t_3,\ 2t_1 + 2t_2 + 2t_3)$ sont symétriques des précédents par rapport à la droite qui a pour équation $t = t_1 + t_2 + t_3$.

740. Problème III. — *Trois points* O, M, M' *ayant pour masses* μ, m, m' *s'attirent deux à deux proportionnellement à leurs masses et à leurs distances (l'unité de force sera la force d'attraction de deux masses égales à l'unité placées à l'unité de distance). Le point* O *est fixe, les deux autres sont libres, ni la pesanteur ni aucune autre action ne s'exercent sur ces points.*

Étudier le mouvement du point G, *centre de gravité du système des points* M, M' *et celui du point* R, *quatrième sommet du parallélogramme* OM'MR. *Montrer que les mouvements de* M *et* M' *peuvent résulter de la composition de deux mouvements vibratoires elliptiques simples. Dans quel cas les mouvements de* M *et* M' *sont-ils périodiques? Évaluer pour une durée quelconque,*

connaissant les positions de G *et de* R *au début et à la fin de cette durée, la somme des travaux de toutes les forces qui agissent sur les points* M *et* M'.

On construira les projections des trajectoires des points M, M' *sur les plans de coordonnées en supposant* $\mu = 2$, $m = m' = 3$, *et le point* O *à l'origine des coordonnées. A l'époque zéro, les points* M *et* M' *sont sur* Ox *avec des abscisses respectivement égales à* 3 *et* 1 *et des vitesses toutes deux mesurées par* 4 *et respectivement parallèles à* Oy *et* Oz. *Les axes de coordonnées sont rectangulaires (Agrégation des jeunes filles).*

Mouvement de G. — La force qui sollicite M est $\mu m\overrightarrow{MO} + mm'\overrightarrow{MM'}$, celle qui sollicite M' est $\mu m'\overrightarrow{M'O} + mm'\overrightarrow{M'M}$. Le mouvement de G est celui d'un point de masse $m + m'$ soumis à l'action d'une force, somme géométrique des précédentes, soit $\mu\left(m\overrightarrow{MO} + m'\overrightarrow{M'O}\right)$, cette force est aussi $\mu(m + m')\overrightarrow{GO}$. Ce mouvement est connu, la force étant une attraction proportionnelle à la distance. Toutefois le point G reste en O si les conditions initiales données pour M et M' sont telles qu'à l'instant initial le point G est en O avec une vitesse nulle.

Mouvement de R. — D'après l'égalité vectorielle $\overrightarrow{OR} = \overrightarrow{OM} - \overrightarrow{OM'}$, on a

$$\frac{d^2\left(\overrightarrow{OR}\right)}{dt^2} = \frac{d^2\left(\overrightarrow{OM}\right)}{dt^2} - \frac{d^2\left(\overrightarrow{OM'}\right)}{dt^2}.$$

Or, les accélérations de M et M' sont respectivement $\mu\overrightarrow{MO} + m'\overrightarrow{MM'}$ et $\mu\overrightarrow{M'O} + m\overrightarrow{M'M}$. On a donc

$$\frac{d^2\left(\overrightarrow{OR}\right)}{dt^2} = \mu\overrightarrow{MO} + m'\overrightarrow{MM'} - \mu\overrightarrow{M'O} - m\overrightarrow{M'M},$$

ou

$$\frac{d^2\left(\overrightarrow{OR}\right)}{dt^2} = (\mu + m + m')\overrightarrow{RO}.$$

Le mouvement de R est connu, c'est celui d'un point dont l'accélération est centrale, proportionnelle à la distance au point O. Exceptionnellement, si à l'instant initial R est en O avec une vitesse nulle, il reste en O.

Mouvements de M *et de* M'. — Le vecteur $\overrightarrow{OG}$ étant connu en fonction de l'époque t, il suffit de connaître aussi, en fonction de t, $\overrightarrow{GM}$ et $\overrightarrow{GM'}$ pour connaître les mouvements de M et de M'. Or

$$\frac{\overrightarrow{GM}}{m'} = \frac{-\overrightarrow{GM'}}{m} = \frac{\overrightarrow{OR}}{m + m'}$$

le troisième rapport s'obtenant en ajoutant terme à terme les deux premiers. On trouve ainsi

$$(1) \qquad \overrightarrow{GM} = \frac{m'}{m + m'}\overrightarrow{OR}, \qquad \overrightarrow{GM'} = -\frac{m}{m + m'}\overrightarrow{OR}.$$

Soit E le repère constitué par les axes Gx_1, Gy_1, Gz_1 parallèles aux axes Ox, Oy, Oz et de même sens qu'eux. Le repère E est animé, par rapport au repère $Oxyz$, d'un mouvement de translation guidé par le mouvement de G qui est, en général, un mouvement vibratoire elliptique simple. D'après les égalités précédentes, les mouvements de M et M' par rapport à E sont encore de même nature.

La période du mouvement de G est $T_1 = \frac{2\pi}{\omega_1}$, avec $\omega_1 = \sqrt{\mu}$, celle des mouvements de M et M' par rapport à E est $T_2 = \frac{2\pi}{\omega_2}$ avec $\omega_2 = \sqrt{\mu + m + m'}$. Pour que le mouvement de M soit périodique, il faut que l'abscisse de M dans le système $Oxyz$ soit une fonction périodique, cette abscisse peut s'écrire

$$a_1\cos\omega_1 t + b_1\sin\omega_1 t + a_2\cos\omega_2 t + b_2\sin\omega_2 t.$$

Plus généralement, cherchons la condition nécessaire et suffisante pour que la fonction

$$(2) \qquad F(t) = a_1\cos\omega_1 t + b_1\sin\omega_1 t + a_2\cos\omega_2 t + b_2\sin\omega_2 t \ldots + a_n\cos\omega_n t + b_n\sin\omega_n t$$

où t est la seule variable soit une fonction périodique. Pour qu'il en soit ainsi il faut et il suffit qu'il existe un nombre T tel que

$$F(t+T) - F(t) = 0$$

quel que soit t. Cette égalité peut s'écrire

$$(3) \qquad A_1 \cos \omega_1 t' + B_1 \sin \omega_1 t' + A_2 \cos \omega_2 t' + B_2 \sin \omega_2 t' + \ldots + A_n \cos \omega_n t' + B_n \sin \omega_n t' = 0$$

en posant

$$t' = t + \frac{T}{2}, \qquad A_k = 2b_k \sin \frac{\omega_k T}{2}, \qquad B_k = -2a_k \sin \frac{\omega_k T}{2}.$$

Sans restreindre la généralité de la question on peut supposer que les constantes $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n$ sont positives car, si ω_k était négatif, il suffirait de remplacer ω_k par $-\omega_k$ en posant

$$b'_k = -b_k.$$

Si le premier membre de l'égalité (3) est nul quel que soit t', les coefficients des diverses puissances de t' puissances de t' dans son développement en série entière ordonnée suivant les puissances de t' sont nuls. Il suffit de prendre les $2n$ premiers pour reconnaître, en utilisant ce que l'on sait d'un déterminant de Vandermonde, que l'égalité (3) ne peut avoir lieu quel que soit t' que si tous les coefficients $A_1, A_2, \ldots, A_n, B_1, \ldots, B_n$ sont nuls, ce qui exige que l'on ait

$$\sin \frac{\omega_1 T}{2} = 0, \qquad \sin \frac{\omega_2 T}{2} = 0 \ldots, \qquad \sin \frac{\omega_n T}{2} = 0.$$

D'après ces égalités, il existe des entiers $p_1, p_2, \ldots, p_n$ tels que

$$\omega_1 T = 2p_1\pi, \qquad \omega_2 T = 2p_2\pi \ldots, \qquad \omega_n T = 2p_n\pi.$$

Il est donc nécessaire que les coefficients $\omega_1, \ldots, \omega_n$ soient proportionnels à des nombres entiers, en d'autres termes que leurs rapports soient des nombres rationnels. Cette condition est aussi suffisante pour que le mouvement de M soit périodique car, si elle est remplie, les trois coordonnées de M sont des fonctions périodiques de t, ayant pour période $T = 2k\pi$, k désignant la commune valeur des rapports $\frac{p_1}{\omega_1}, \ldots, \frac{p_n}{\omega_n}$, les nombres $p_1, \ldots, p_n$ étant les entiers auxquels sont proportionnels $\omega_1, \ldots, \omega_n$.

En appliquant ce résultat au cas particulier du problème posé nous trouvons comme condition demandée que *le rapport* $\frac{\mu + m + m'}{\mu}$ *doit être le carré d'un nombre rationnel.*

Somme des travaux des forces agissant sur M *et sur* M'. — Les travaux élémentaires des forces qui sollicitent M et M' ont pour expressions

$$\left(-\mu m \overrightarrow{OM} + mm'\overrightarrow{MM'}\right) . d\left(\overrightarrow{OM}\right) \qquad \text{et} \qquad \left(-\mu m' \overrightarrow{OM'} + mm'\overrightarrow{M'M}\right) . d\left(\overrightarrow{OM'}\right).$$

La somme de ces travaux peut s'écrire

$$-\mu m \frac{d\left(\overrightarrow{OM}^2\right)}{2} - \mu m' \frac{d\left(\overrightarrow{OM'}^2\right)}{2} - mm' \frac{d\left(\overrightarrow{M'M}^2\right)}{2},$$

c'est la demi-différentielle de

$$H = -\mu m \overrightarrow{OM}^2 - \mu m' \overrightarrow{OM'}^2 - mm' \overrightarrow{M'M}^2.$$

Remplaçons $\overrightarrow{M'M}$ par $\overrightarrow{OR}$ et $\overrightarrow{OM}$, $\overrightarrow{OM'}$ par leurs valeurs en fonction de $\overrightarrow{OG}$ et $\overrightarrow{OR}$ (1). Nous trouvons successivement

$$H = -\mu m \left[\overrightarrow{OG} + \frac{m'}{m+m'} \overrightarrow{OR}\right]^2 - \mu m' \left[\overrightarrow{OG} - \frac{m}{m+m'} \overrightarrow{OR}\right]^2 - mm' \overrightarrow{OR}^2$$

$$H = -\mu (m - m') \overrightarrow{OG}^2 - \frac{mm'}{m+m'} [\mu + m + m'] \overrightarrow{OR}^2.$$

Le travail correspondant au passage des positions G_0 et R_0 des points G, R à leurs positions G_1, R_1 est

$$(4) \qquad \mathcal{T} = -\frac{\mu}{2}(m+m')(OG_1^2 - OG_0^2) - \frac{mm'}{2(m+m')}(\mu + m + m')(OR_1^2 - OR_0^2).$$

Étude du cas particulier. — Dans le cas particulier proposé par l'énoncé, $\omega_1 = \sqrt{2}$, $\omega_2 = 2\sqrt{2}$, G est le milieu de MM'; à l'époque zéro, G a pour coordonnées 2,0,0 et R aussi. Les vitesses initiales de M et de M' ont pour composantes scalaires 0, 4, 0 pour la première et 0, 0, 4 pour l'autre, celle de G a donc pour composantes scalaires 0, 2, 2; celle de R qui est $\frac{d\left(\overrightarrow{OM}\right)}{dt} - \frac{d\left(\overrightarrow{OM'}\right)}{dt}$ a pour composantes scalaires 0,4 et -4. A l'époque t les coordonnées de G ont pour expressions

$$(G) \qquad 2\cos t\sqrt{2}, \qquad \sqrt{2}\sin t\sqrt{2}, \qquad \sqrt{2}\sin t\sqrt{2}$$

et celles de R

$$(R) \qquad 2\cos 2t\sqrt{2}, \qquad \sqrt{2}\sin 2t\sqrt{2}, \qquad -\sqrt{2}\sin 2t\sqrt{2}.$$

En posant $t\sqrt{2} = u$, on trouve pour représentation paramétrique de la trajectoire de M, d'après l'égalité

$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OG} + \frac{\overrightarrow{OR}}{2},$$

$$x = 2\cos u + \cos 2u, \qquad y = \sqrt{2}\sin u + \frac{\sqrt{2}}{2}\sin 2u, \qquad z = \sqrt{2}\sin u - \frac{\sqrt{2}}{2}\sin 2u.$$

On trouverait de même une représentation paramétrique de la trajectoire de M' en utilisant l'égalité $\overrightarrow{OM'} = \overrightarrow{OG} - \frac{\overrightarrow{OR}}{2}$. La position de M correspondant à la valeur u du paramètre est symétrique par rapport à O de la position de M' qui correspond à $u + \pi$. Les trajectoires de M et de M' sont symétriques par rapport à O, nous n'étudierons que la première.

Auparavant, observons que G décrit d'un mouvement uniforme un cercle C_1 dont le centre est O, ce cercle est dans le plan représenté par $y - z = 0$.

Le point R décrit un cercle qui a aussi le point O pour centre, le plan de ce deuxième cercle a pour équation $y + z = 0$.

On peut concevoir le mouvement de M de la manière suivante. Le point G décrit d'un mouvement uniforme le cercle C_1, G est le centre d'un cercle C_2 dont le plan reste parallèle à celui qui contient l'axe du cercle C_1 et la position de G à l'époque zéro, le rayon du cercle C_2 est la moitié de celui de C_1, un point M décrit C_2 d'un mouvement uniforme relativement au repère E défini plus haut, la vitesse de ce mouvement a même grandeur que celle de G. A l'époque zéro, O, G et M sont alignés.

Projections de la trajectoire de M : 1° *sur le plan* yOz. — Rapportée à l'axe OY dirigé suivant la bissectrice de l'angle yOz et à l'axe OZ directement perpendiculaire à OY dans le plan yOz cette projection est représentée paramétriquement par les équations

$$Y = 2\sin u, \qquad Z = -\sin 2u.$$

Il est facile de la tracer (fig. 545).

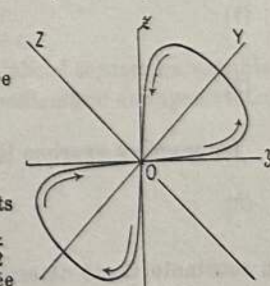

Fig. 545.

2° *Sur le plan* zOx. — Cette projection est représentée paramétriquement par les équations

$$x = 2\cos u + \cos 2u, \qquad z = \frac{1}{\sqrt{2}}(2\sin u - \sin 2u).$$

Elle se déduit d'une hypocycloïde à trois rebroussements (T. I, 118) par l'affinité qui a pour axe Ox et pour rapport $\frac{1}{\sqrt{2}}$.

3° *Sur le plan* xOy. — Cette projection est représentée paramétriquement par les équations

$$x = 2\cos u + \cos 2u, \qquad y = \frac{1}{\sqrt{2}}(2\sin u + \sin 2u).$$

Elle se déduit d'une cardioïde (T. I, 118) par l'affinité qui a pour axe Ox et pour rapport $\frac{1}{\sqrt{2}}$.

Somme des travaux des forces agissant sur M *et* M'. — Les longueurs OG et OR restant constantes pendant le mouvement, la somme $\mathcal{T}$ donnée par les formules (4) est nulle. Le théorème de la force vive permet d'en conclure que la somme des carrés des vitesses des points M et M' reste constante. Vérifions ce fait. Nous savons que

$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OG} + \frac{\overrightarrow{OR}}{2} \qquad \text{et} \qquad \overrightarrow{OM'} = \overrightarrow{OG} - \frac{\overrightarrow{OR}}{2}$$

d'où il résulte que

$$\frac{d\left(\overrightarrow{OM}\right)}{dt}=\frac{d\left(\overrightarrow{OG}\right)}{dt}+\frac{1}{2}\frac{d\left(\overrightarrow{OR}\right)}{dt},\qquad \frac{d\left(\overrightarrow{OM'}\right)}{dt}=\frac{d\left(\overrightarrow{OG}\right)}{dt}-\frac{1}{2}\frac{d\left(\overrightarrow{OR}\right)}{dt}.$$

La demi-somme des carrés des vitesses des points M et M' est égale à la somme des carrés de la vitesse de G et de la demi-vitesse de R; les vitesses de G et de R étant constantes, il en est de même de la somme considérée.

MOUVEMENT D'UN POINT SOUMIS A UNE FORCE CENTRALE

741. Supposons que la résultante $\vec{F}$ des forces appliquées au point matériel M soit centrale; soit O le centre des forces. Nous orienterons chaque rayon vecteur de O vers M, soit $r = OM$; nous désignerons par F la mesure algébrique de la résultante sur le rayon vecteur; dans le cas de l'attraction, F est négatif; dans le cas de la répulsion, F est positif. Nous écartons, dans tout ce qui suit, le cas où F reste proportionnelle à r, cas étudié aux paragraphes 736 et 738 en profitant de ce que, avec cette loi de force centrale, chacune des équations différentielles du mouvement, écrites en coordonnées cartésiennes, ne contient qu'une seule inconnue.

L'accélération dans le mouvement de M étant centrale, nous savons (664) que si la vitesse initiale $\overrightarrow{M_0V_0}$ est nulle ou portée par le rayon vecteur initial OM_0, la trajectoire est rectiligne, c'est la droite OM_0 dans le cas général où M_0 est distinct de O. Dans le cas où la vitesse initiale n'est pas nulle et où son support ne contient pas O, la trajectoire est plane, ce plan est déterminé par O et le support de $\overrightarrow{M_0V_0}$.

Plaçons-nous dans cette dernière hypothèse et rapportons le plan de la trajectoire à un système de coordonnées polaires, le pôle étant au centre des forces. L'égalité fondamentale de la Dynamique se traduit en projetant ses deux membres sur le rayon vecteur et sur la perpendiculaire au rayon vecteur, par les équations différentielles

$$(1)\qquad \frac{m}{r}\frac{d}{dt}\left(r^2\frac{d\theta}{dt}\right)=0$$

$$(2)\qquad m\left[\frac{d^2r}{dt^2}-r\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2\right]=F.$$

La première exprime la loi des aires

$$(3)\qquad r^2\frac{d\theta}{dt}=C;$$

la constante C est déterminée par les conditions initiales. Si à l'instant initial $OM_0=r_0$, $M_0V_0=v_0$, et si α désigne l'angle $(\overrightarrow{OM_0},\overrightarrow{M_0V_0})$, $C=r_0v_0\sin\alpha$. Le rayon vecteur tourne toujours dans le même sens autour de O.

Eliminons successivement θ et t entre les équations (2) et (3), le calcul déjà fait au nº 665 donne, d'une part

$$(4)\qquad m\frac{d^2r}{dt^2}=F+m\frac{C^2}{r^3},$$

et d'autre part,

$$(5)\qquad -m\frac{C^2}{r^2}\left[\frac{1}{r}+\frac{d^2\left(\frac{1}{r}\right)}{d\theta^2}\right]=F.$$

Dans le cas le plus général, F est une fonction de r, θ, $\frac{dr}{dt}$, $\frac{d\theta}{dt}$ et t.

Si F ne contient ni θ ni $\frac{d\theta}{dt}$, les équations (4) et (3) déterminent successivement r et θ en fonction de t. Si F ne contient pas t c'est-à-dire est une fonction de r, de θ et même de $\frac{dr}{d\theta}$, l'équation (5) détermine r en fonction de θ, c'est-à-dire détermine la trajectoire. L'équation (3) fait connaître ensuite θ ou r en fonction de t, elle donne ainsi la loi cinématique du mouvement.

CAS OÙ F EST FONCTION DE LA SEULE VARIABLE r. — Supposons qu'on ait $F=m\varphi(r)$; le théorème de la force vive donne $d\left(\frac{1}{2}mv^2\right)=m\varphi(r)\,dr$, ou, en appelant $U(r)$ une primitive de $\varphi(r)$,

$$(6)\qquad \left(\frac{dr}{dt}\right)^2+r^2\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2=2U(r)+h$$

qui peut être regardée (665) comme une conséquence des équations (2) et (3), est une équation différentielle du premier ordre seulement. Les deux équations différentielles du premier ordre (3) et (6) permettent d'étudier le mouvement. La constante h est déterminée par les conditions initiales : $h=v_0^2-2U(r_0)$.

L'élimination de dt entre les équations (3) et (6) donne l'équation

$$(7)\qquad C^2\left[\frac{1}{r^2}+\left(\frac{d\left(\frac{1}{r}\right)}{d\theta}\right)^2\right]=2U(r)+h$$

qui ramène la recherche de l'équation de la trajectoire à une quadrature.

L'élimination de $d\theta$ entre les équations (3) et (6) conduit à l'équation

$$(8)\qquad \left(\frac{dr}{dt}\right)^2+\frac{C^2}{r^2}=2U(r)+h$$

qui, par une quadrature, fait connaître r en fonction de t.

Pour intégrer l'une des équations (7) et (8) il faut d'abord séparer les variables. Dans le cas général où la vitesse initiale n'est pas perpendiculaire au rayon vecteur initial, le signe dont il faut faire précéder le radical

$$\sqrt{2U(r)+h-\frac{C^2}{r^2}}$$

pour obtenir, suivant le cas, $C\frac{d\left(\frac{1}{r}\right)}{d\theta}$ ou $\frac{dr}{dt}$ est déterminé, au début du mouvement, par la direction de la vitesse initiale car $\frac{d\left(\frac{1}{r}\right)}{d\theta}$ est l'inverse de la sous-tangente polaire pour la trajectoire et $\frac{dr}{dt}$ est la mesure algébrique de la projection orthogonale de la vitesse sur le rayon vecteur orienté. Le système formé par l'équation (3) et l'une des équations (7), (8) n'admet qu'une solution remplissant les conditions initiales, cette solution représente le mouvement.