30/12/21 (sic...)

Tout d'abord, il faut connaître la notion de "point fixe".
Lorsqu'une suite est exprimée sous forme récurrente, le point fixe est une valeur pour laquelle la suite devient constante.

Chloé

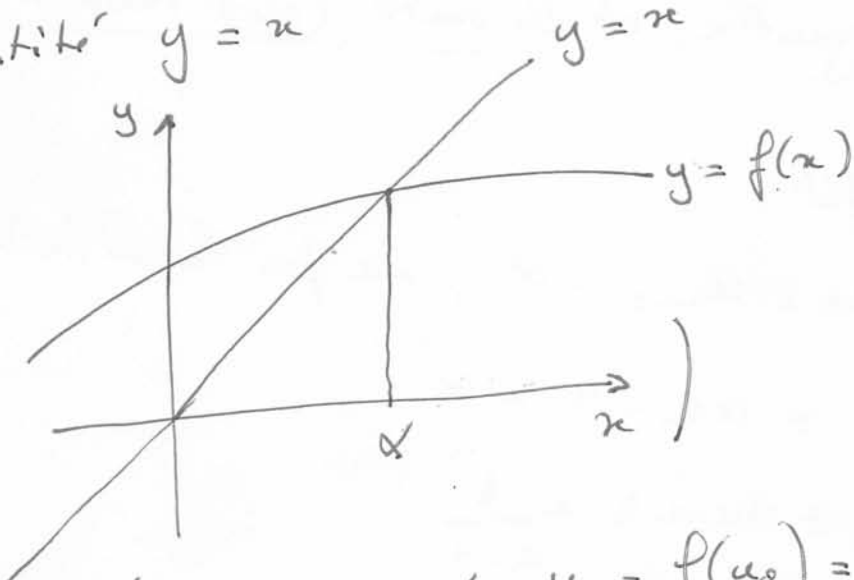
En d'autres termes, si la suite est exprimée sous la forme

$$u_{n+1} = f(u_n)$$

la valeur α d'un point fixe est solution de l'équation

$$f(\alpha) = \alpha$$

(graphiquement, α correspond à l'abscisse d'une intersection entre la courbe $y = f(x)$ et la diagonale identité $y = x$



)

En particulier, si $u_0 = \alpha$, $u_1 = f(u_0) = f(\alpha) = \alpha = u_0$,
$u_2 = f(u_1) = f(\alpha) = \alpha = u_0$, etc.

Il y a trois situations hyper classiques d'utilisation des points fixes :

1) Suite arithmético-géométrique $u_{n+1} = au_n + b$

L'équation $ax + b = x$ s'écrit

$$(a-1)x = -b$$

d'où $\boxed{\alpha = -\dfrac{b}{a-1}}$ $\left(\text{ou } \alpha = \dfrac{b}{1-a}\right)$

La suite auxiliaire

$$\boxed{v_n = u_n - \alpha}$$

est alors une suite géométrique de raison a,

et de premier terme $v_0 = u_0 - \alpha$.

D'où $v_n = (u_0 - \alpha)a^n$

et $\boxed{u_n = v_n + \alpha = (u_0 - \alpha)a^n + \alpha}$

Si $|a| < 1$, le terme $(u_0 - \alpha)a^n$ devient (rapidement) négligeable, et la suite (u_n) tend vers α

(En effet

$v_{n+1} = u_{n+1} - \alpha$, de par la définition de (v_n).

$$= au_n + b - \alpha$$

$$= au_n + b + \frac{b}{a-1}$$

$$= au_n + \frac{b(a-1) + b}{a-1}$$

$$= au_n + \frac{ab}{a-1}$$

$$= au_n - a\left(-\frac{b}{a-1}\right)$$

$$= au_n - a\alpha$$

$$= a(u_n - \alpha) = av_n$$

d'où finalement

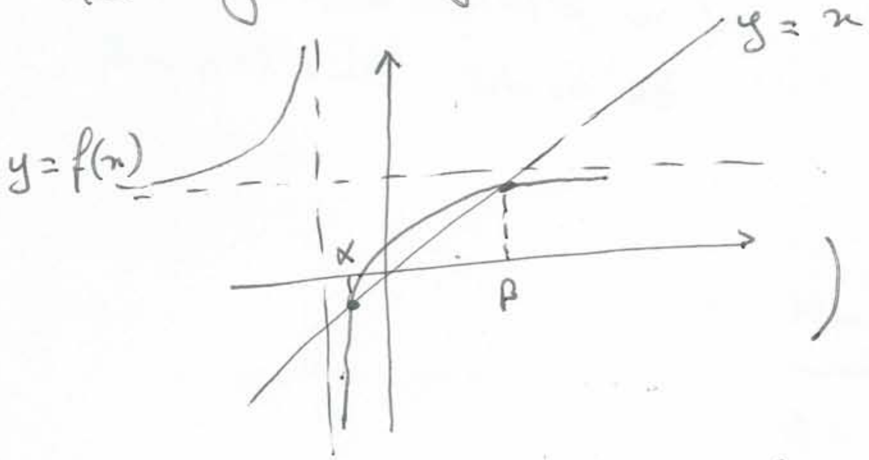
$\boxed{v_{n+1} = a v_n}$ et $\boxed{v_0 = u_0 - \alpha}$)

2) Suite homographique

$$u_{n+1} = \frac{a u_n + b}{c u_n + d}$$

présentant deux points fixes

(C'est-à-dire, la courbe $y = \frac{ax+b}{cx+d}$ coupe la diagonale $y = x$ en deux points; par exemple



)

Dans ce cas, la suite auxiliaire

$$\boxed{v_n = \frac{u_n - \alpha}{u_n - \beta}}$$

est une suite géométrique de raison $q = \frac{a - c\alpha}{a - c\beta}$

et de premier terme $v_0 = \frac{u_0 - \alpha}{u_0 - \beta}$

(En effet, α et β étant les valeurs des deux points fixes, $f(\alpha) = \alpha$ et $f(\beta) = \beta$

d'où

$$\frac{a\alpha+b}{c\alpha+d}=\alpha \underset{\text{(successivement)}}{\Rightarrow} a\alpha+b = c\alpha^2+d\alpha$$

$$a\alpha - c\alpha^2 = d\alpha - b$$

$$\alpha(a-c\alpha) = d\alpha - b$$

$$\left(\text{ou } d\alpha - b = \alpha(a-c\alpha)\right.$$

$$\left.\text{ou encore } b - d\alpha = -\alpha(a-c\alpha)\right)$$

De même

$$\frac{a\beta+b}{c\beta+d}=\beta \Rightarrow \beta(a-c\beta) = d\beta - b$$

$$\left(\text{ou } d\beta - b = \beta(a-c\beta)\right.$$

$$\left.\text{ou encore } b - d\beta = -\beta(a-c\beta)\right)$$

On a donc

$$v_{n+1} = \frac{u_{n+1}-\alpha}{u_{n+1}-\beta}$$

$$= \frac{\dfrac{au_n+b}{cu_n+d}-\alpha}{\dfrac{au_n+b}{cu_n+d}-\beta}$$

$$= \frac{au_n+b-\alpha(cu_n+d)}{au_n+b-\beta(cu_n+d)}$$

$$= \frac{au_n+b-\alpha cu_n-\alpha d}{au_n+b-\beta cu_n-\beta d}$$

Chloé 30/12/21 (15)

$$v_{n+1} = \frac{(a-c\alpha)u_n + b - d\alpha}{(a-c\beta)u_n + b - d\beta}$$

$$= \frac{(a-c\alpha)u_n - \alpha(a-c\alpha)}{(a-c\beta)u_n - \beta(a-c\beta)}$$

$$= \frac{a-c\alpha}{a-c\beta} \times \frac{u_n-\alpha}{u_n-\beta}$$

$$= \frac{a-c\alpha}{a-c\beta} \times v_n$$

d'où finalement

$$\boxed{v_{n+1} = \frac{a-c\alpha}{a-c\beta}} \quad \text{et} \quad \boxed{v_0 = \frac{u_0-\alpha}{u_0-\beta}}$$

Pour obtenir l'expression explicite de u_n, il faut exprimer u_n en fonction de v_n :

$$v_n = \frac{u_n-\alpha}{u_n-\beta} \underset{\text{(successivement)}}{\Rightarrow} u_n - \alpha = v_n(u_n-\beta)$$

$$u_n - v_n u_n = \alpha - \beta v_n$$

$$(1-v_n)u_n = \alpha - \beta v_n$$

d'où $u_n = \dfrac{\alpha - \beta v_n}{1-v_n}$

Comme $v_n = v_0 q^n$, avec $q = \dfrac{a - c\alpha}{a - c\beta}$

et $v_0 = \dfrac{u_0 - \alpha}{u_0 - \beta}$

on a in fine

$$\boxed{u_n = \frac{\alpha - \beta v_0 q^n}{1 - v_0 q^n}}$$

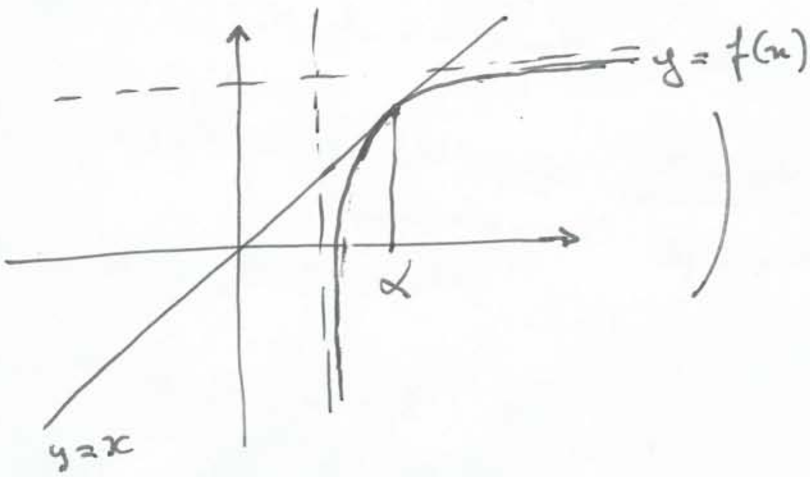
3) Suite homographique

$$u_{n+1} = \frac{a u_n + b}{c u_n + d}$$

présentant un seul point fixe

(C'est-à-dire, la courbe $y = \dfrac{ax+b}{cx+d}$ est tangente

à la diagonale $y = x$; par exemple



)

Chloé

Dans ce cas, la suite auxiliaire

$$\boxed{v_n = \frac{1}{u_n - \alpha}}$$

est une suite arithmétique de raison $r = \frac{c}{a - c\alpha}$

et de premier terme $v_0 = \frac{1}{u_0 - \alpha}$

(En effet — j'ai eu du mal à le démontrer ; mais, avec une certaine dose d'obstination, j'y suis arrivé — :

$$v_{n+1} = \frac{1}{u_{n+1} - \alpha} = \frac{1}{\frac{au_n + b}{cu_n + d} - \alpha}$$

$$= \frac{1}{\frac{au_n + b - c\alpha u_n - d\alpha}{cu_n + d}}$$

$$= \frac{cu_n + d}{(a - c\alpha)u_n + b - d\alpha}$$

$$= \frac{cu_n + d}{(a - c\alpha)u_n - \alpha(a - c\alpha)} \quad \text{(cf p 14)}$$

$$= \frac{1}{a - c\alpha} \times \frac{cu_n + d}{u_n - \alpha}$$

$$v_{n+1} = \frac{1}{a-c\alpha}\left[\frac{c(u_n-\alpha)+c\alpha+d}{u_n-\alpha}\right]$$

$$= \frac{1}{a-c\alpha}\left[c + \frac{c\alpha+d}{u_n-\alpha}\right]$$

$$= \frac{c}{a-c\alpha} + \frac{c\alpha+d}{a-c\alpha} \times \frac{1}{u_n-\alpha}$$

$$= \frac{c}{a-c\alpha} + \frac{c\alpha+d}{a-c\alpha} \times v_n$$

Pour débloquer le coefficient $\frac{c\alpha+d}{a-c\alpha}$, il faut utiliser l'information essentielle selon laquelle il n'y a qu'un seul point fixe. (Il m'a fallu du temps pour comprendre qu'il faut utiliser cette information. :-)

α l'équation $\frac{a\alpha+b}{c\alpha+d} = \alpha$ s'écrit

$$c\alpha^2 + d\alpha = a\alpha + b$$

Soit

$$c\alpha^2 + (d-a)\alpha - b = 0$$

Comme cette équation n'a, par hypothèse, qu'une seule solution,

$$\alpha = -\frac{(d-a)}{2c} = \frac{a-d}{2c}$$

(Revoir l'équation du second degré :-)

Chloé

On peut maintenant calculer le coefficient

$$\frac{c\alpha + d}{a - c\alpha} :$$

$$\frac{c\alpha + d}{a - c\alpha} = \frac{c \times \frac{a-d}{2c} + d}{a - c \times \frac{a-d}{2c}}$$

$$= \frac{\frac{a-d}{2} + d}{a - \frac{a-d}{2}} = \frac{\frac{a-d+2d}{2}}{\frac{2a - a + d}{2}} = \frac{a+d}{a+d} = \underline{\underline{1}} \quad \underline{\text{Yes!}}$$

On a donc finalement

$$\boxed{v_{n+1} = v_n + \frac{c}{a - c\alpha}}$$

La suite (v_n) est donc bien une suite arithmétique de raison $\frac{c}{a - c\alpha}$.

CQFD ! (Avec un certain <u>plaisir</u> !)

(L'<u>obstination</u>, face à une difficulté, est souvent source de <u>plaisir</u>. :-)

Fin de "En effet")

On a donc maintenant

$$v_n = \frac{1}{u_0 - \alpha} + n \times \frac{c}{a - c\alpha}$$

De $v_n = \frac{1}{u_n - \alpha}$, on déduit que

$$u_n - \alpha = \frac{1}{v_n}$$

et, donc, que $u_n = \frac{1}{v_n} + \alpha$

D'où l'expression explicite de u_n

$$\boxed{u_n = \frac{1}{\frac{1}{u_0 - \alpha} + \frac{nc}{a - c\alpha}} + \alpha}$$

Comme une suite arithmétique tend vers $+\infty$ (si sa raison est positive), ou vers $-\infty$ (si sa raison est négative), $\frac{1}{v_n}$ tend toujours vers 0.

Donc $\boxed{\lim_{n \to +\infty} u_n = \alpha}$

Fin de "Il y a trois situations hyper classiques d'utilisation des points fixes."