

Bonjour à tous,

Le sujet que je soumets à votre attention porte sur le pendule de Foucault permettant d'illustrer un théorème mathématique, le Théorème des valeurs intermédiaires. Tout d'abord, le pendule de Foucault relate d'une expérience fascinante qui a vu le jour pour la 1^{er} fois en 1851 par le physicien français Léon Foucault (1819-1868). À titre informatif, nous lui devons également la vitesse de la lumière, le gyroscope et aussi les courants tourbillonnaires, appelés en son honneur « courant de Foucault ». Revenons-en à notre pendule, issu à la base d'une première tentative de mise au point dans la cave de sa maison avec une sphère suspendue à un fil de 2 mètres de long. Il se résigna par la suite à en entreprendre une expérience plus conséquente avec un fil d'acier de 67 mètres de long attaché à la voûte du Panthéon à Paris la même année. L'intérêt du pendule, imaginé et réalisé par Foucault, est de mettre en évidence la rotation de la Terre manifestée par la déviation constante du plan d'oscillation du pendule. En effet, une fois lancé, on observe un mouvement remarquable : le plan d'oscillation pivote au fil des heures. Si on le lance en premier lieu dans la direction Nord-Sud, on le retrouve osciller en quelques heures dans la position Est-Ouest, jusqu'à un tour complet.

De cela, en quoi le pendule de Foucault pourrait-il illustrer le Théorème des Valeurs intermédiaires ?

Avant toute chose, commençons par présenter le Théorème des Valeurs Intermédiaires ; approuvé en 1821 par le mathématicien français Cauchy est une propriété fondamentale des fonctions. Ce théorème stipule que pour toutes fonctions f définies et continues ; une fonction est dite continue si l'on peut tracer sa courbe représentative « sans lever le crayon » ou autrement, si cette fonction est dérivable sur un intervalle I alors elle est continue sur ce même intervalle ; prenant 2 valeurs a et $b \in I$, alors pour tout réel k compris entre $f(a)$ et $f(b)$, il existe au moins réel c compris entre a et b tel que $f(c) = k$.

Pour illustrer mon propos, je vous propose un exemple, admettons deux réels a et b , tels que $f(a) < 0$ (strictement négatif) et $f(b) > 0$ (strictement positif), alors pour $k = 0$, il existe au moins un réel que l'on va nommer c compris entre a et b tel que $f(c)=0$. Donc dans le cas présent, la fonction prend toutes les valeurs intermédiaires entre a et b passant à un moment par $f(c) = 0$.

En d'autres termes pour, cet exemple, une fonction continue ne peut pas sauter d'une valeur positive à négative sans passer par ce dernier.

Cette exemple résume parfaitement le cas du pendule de Foucault, car en effet son pivotement est dû à la rotation de la Terre autour de son propre axe (dessin pour comprendre cf image ci-dessus), démontrant ainsi sa caractéristique d'oscillation d'un point latéral à un autre, dépendante de la latitude terrestre variant quant à elle entre 90°N et 90°S en passant par 0° au niveau de l'équateur. De plus, il faut savoir que le pendule situé au Panthéon, à Paris, n'est pas le même que celui qui serait situé à l'Équateur, ni celui du Pôle Nord ! Je vais vous l'expliquer un peu plus loin.

En clair, si on lâche le pendule situé par exemple au pôle Nord en un point initial défini par le Nord, il oscille donc vers sont point opposé, le Sud tout en suivant la rotation de la Terre

pour se retrouver 24h plus tard à avoir parcouru un tour complet suivant sa période de rotation.

Avant de commencer ma présentation, j'aimerais vous rappeler que nous travaillerons avec les radians (donné des valeurs de référence 90° Nord et 90° Sud).



Pour revenir sur mon propos comme quoi le pendule diffère selon la latitude à laquelle il se trouve, en effet il faut savoir que la période de rotation du pendule au pôle Nord (donc 90° soit $\frac{\pi}{2}$) est égale à la valeur du Jour Sidéral. Le Jour Sidéral étant la durée de rotation complète de la Terre sur son axe par rapport aux étoiles fixes. La valeur du Jour Sidéral est 23 h 56 m 4,09 s ; et non 24h comme nous avons l'habitude de connaître. Ainsi la période de rotation du pendule de Foucault s'avère correcte car la verticale du point de suspension du pendule coïncide avec l'axe de rotation de la Terre.



Cela en va de même pour la valeur mais au pôle Sud.

Enfin, à l'équateur, de latitude 0° soit 0 rad, le pendule ne semble indiquer aucune variation d'orientation de son plan d'oscillation dû à une perpendicularité du point d'attaque avec l'axe de rotation.

En revanche, dans notre étude, nous considérons les valeurs de latitude dans l'hémisphère Nord comme positives (donc de $\frac{\pi}{2}$ à 0) et dans l'hémisphère Sud, les valeurs de latitude seront négatives (donc de 0 à $-\frac{\pi}{2}$). Ceci entraîne, autre chose, les valeurs de période de rotation du pendule seront donc positives dans l'hémisphère Nord et inversement pour l'hémisphère Sud. Les valeurs positives révèlent en fait le sens de rotation du pendule qui s'opère dans le sens des aiguilles d'une montre et les valeurs négatives montrent que le pendule à une rotation à l'inverse du sens des aiguilles d'une montre.

Nous devons cela, à la force de Coriolis, que je ne détaillerai pas dans cet exposé.

Donc dans au pôle Nord, la période de rotation équivaut à +JS (pour Jour Sidéral) soit +23h56m4,09s.

Et au pôle Sud, la période de rotation équivaut à -JS (pour Jour Sidéral) soit -23h56m4,09s.

Pour l'Equateur, nous déterminerons mathématiquement les valeurs, juste après.



Revenons maintenant à la période de rotation du pendule. En effet, celle-ci, à une latitude ϕ , correspond à la valeur du jour sidéral, divisée par le sinus de latitude où se trouve le pendule.

Ainsi la fonction qui définit la période de rotation du pendule, à une latitude ϕ , est :

$$T(\phi) = \frac{JS}{\sin(\phi)}, \text{ on reconnaît là, une fonction trigonométrique}$$

avec JS, qui définit la valeur du Jour Sidéral, soit 23h56m4,09s, comme je l'ai dit précédemment. Pour notre étude, nous simplifions notre en valeur en l'arrondissant à 24h.

Ainsi pour toutes valeurs de latitude appartenant à $]-\frac{\pi}{2}; 0 [\cup] 0; \frac{\pi}{2} [$, on a $T(\phi) = \frac{24}{\sin(\phi)}$



Maintenant dérivons notre fonction, en utilisant la formule de dérivé d'un quotient soit :

$$\begin{aligned} u(\phi) &= 24 & \text{et} & & v(\phi) &= \sin(\phi) \\ u'(\phi) &= 0 & & & v'(\phi) &= \cos(\phi) \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} \text{donc } T'(\phi) &= \frac{u'(\phi) \times v(\phi) - v'(\phi) \times u(\phi)}{(v(\phi))^2} \\ T'(\phi) &= \frac{0 \times \sin(\phi) - (\cos(\phi) \times 24)}{\sin^2(\phi)} \quad ; 0 \text{ ici est une valeur interdite car } \sin(0) = 0 \\ T'(\phi) &= -\frac{24 \times \cos(\phi)}{\sin^2(\phi)} \end{aligned}$$

Etudions maintenant le signe de la dérivée sur l'intervalle $]-\frac{\pi}{2}; 0 [\cup] 0; \frac{\pi}{2} [$



Pour tout $\phi \in]-\frac{\pi}{2}; 0 [\cup] 0; \frac{\pi}{2} [$; $\sin^2(\phi) > 0$

donc le signe de la fonction porte sur $-24 \times \cos(\phi)$

Pour étudier cette fonction, nous devons l'étudier sur l'intervalle $] 0; \frac{\pi}{2} [$; pour pouvoir l'étudier sur l'intervalle $]-\frac{\pi}{2}; 0 [\cup] 0; \frac{\pi}{2} [$

Commençons par déterminer la parité de cette fonction, autrement dit déterminons si cette fonction est paire ou impaire.

La fonction est paire si $f(-\phi) = f(\phi)$

La fonction est impaire si $f(-\phi) = -f(\phi)$

Déterminons $f(-\phi) = -24 \times \cos(-\phi)$

Or on sait que $\cos(-\phi) = \cos(\phi)$

donc $f(-\phi) = f(\phi)$; donc on en conclut que la fonction est paire et donc sa courbe représentative est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.

Ensuite étudions la périodicité de la fonction et montrons que f est périodique de période a ; afin de l'étudier sur notre intervalle.

Or nous savons que pour tout réel ϕ ; $\cos(\phi + 2\pi) = \cos(\phi)$; donc la fonction f est périodique de période 2π .

Nous pouvons maintenant étudier notre fonction sur $] 0; \frac{\pi}{2} [$;

$$0 \leq \phi \leq \frac{\pi}{2}$$

$$\cos(0) \leq \cos(\phi) \leq \cos\left(\frac{\pi}{2}\right)$$

or $\cos(\phi) \geq 0$; donc $-24 \times \cos(\phi) \leq 0$

$T(\frac{\pi}{2})$. Autrement dit, à toute valeur T , de période de rotation du pendule, on peut définir une latitude ϕ , dans l'hémisphère Nord ou dans l'hémisphère Sud (en fonction du signe), pour laquelle la période de rotation est égale à T .

Afin d'appuyer mon propos, je vais vous présenter un exemple. Pour cela nous souhaiterons montrer qu'il existe au moins une solution de latitude pour laquelle la période de rotation est égale à 33 (nous travaillons donc sur l'hémisphère Nord, dû à la valeur positive de période de rotation). Donc nous cherchons à déterminer $T(\phi) = 33$ sur l'intervalle $]0; \frac{\pi}{2}]$

Pour commencer,

- Nous savons que la fonction est dérivable donc continue sur l'intervalle
- La fonction est strictement décroissante sur $]0; \frac{\pi}{2}]$
- $f(]0; \frac{\pi}{2}]) =]24; +\infty]$
- or $33 \in]24; +\infty]$

Donc d'après le Théorème des Valeurs Intermédiaires, $T(\phi) = 33$, admet une unique solution, admet une seule valeur de latitude sur $]0; \frac{\pi}{2}]$.



Partie pas obligatoire :

Afin de trouver la valeur de la latitude, on doit résoudre l'équation :

$$\begin{aligned}\frac{24}{\sin(\phi)} &= 33 \\ \sin(\phi) &= \frac{24}{33} \\ \phi &= \arcsin\left(\frac{24}{33}\right)\end{aligned}$$

donc en radian, la valeur de latitude pour laquelle, la période de rotation du pendule de Foucault est égale à 33 h, est la latitude $\arcsin(\frac{24}{33})$ soit 0,81 rad

Pour convertir en degré, il faut faire $\arcsin(\frac{24}{33}) \times \frac{180}{\pi} = 46,66^\circ$ soit environ 47° (ce qui représente la latitude du *centre d'examen*)



En somme, tout au long de cet oral, j'ai pu vous illustrer un théorème de mathématiques avec un concept qui semble à première vue n'avoir aucun lien. En effet, la continuité du

pendule de Foucault m'a permis de vous illustrer le Théorème des Valeurs. En revanche, il existe un petit problème, son installation à n'importe quel point du globe !