11.

Fonctions logarithmiques Fonctions exponentielles

Indications : $\ln \equiv \mathrm{Log}$
logarithme décimal $\equiv \log$

1. Fonctions logarithmiques.

De l'étude faite dans le chapitre 10, il résulte que nous connaissons, pour tout réel k et pour tout rationnel r différent de -1, les primitives de la fonction $x \longmapsto kx^r$.

Soit k un réel non nul. La fonction $x \longmapsto \frac{k}{x}$ est continue sur tout intervalle $[a, b]$ qui ne contient pas 0. Du théorème 1.12 du chapitre 10, il résulte que la fonction $x \longmapsto \frac{k}{x}$ est intégrable sur $[a, b]$ et par suite admet, sur cet intervalle, des primitives dont l'étude est l'objet de ce paragraphe.

Définition.

1.1 **DÉFINITION : Soit k un réel non nul.**
La primitive sur $]0, +\infty[$, qui s'annule en 1, de la fonction $x \longmapsto \frac{k}{x}$ est appelée fonction logarithmique.

Cette fonction, que nous notons provisoirement f_k, est donc l'application de $]0, +\infty[$ dans $\mathbb{R}$ définie par :

$$f_k : \;]0, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto \int_1^x \frac{k}{t}\, dt.$$

Propriétés.

1.2 Soit k un réel non nul. La fonction logarithmique f_k possède les propriétés suivantes :

P1 f_k est dérivable sur $]0, +\infty[$ et a pour fonction dérivée sur cet intervalle la fonction $x \longmapsto \frac{k}{x}$.

Cette propriété résulte du théorème 2.1 du chapitre 10.

P2 f_k est un homomorphisme de $(\mathbb{R}_+^*, \times)$ dans $(\mathbb{R}, +)$, c'est-à-dire : $\forall (x, y) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*, \quad f_k(xy) = f_k(x) + f_k(y)$.

Démonstration :
Soit x un élément quelconque de $\mathbb{R}_+^*$. Considérons la fonction $g : y \longmapsto f_k(xy)$.
La fonction g est la composée de la fonction $y \longmapsto xy$, dérivable sur $\mathbb{R}$ et de la fonction f_k dérivable sur $]0, +\infty[$; elle est donc dérivable sur $]0, +\infty[$.
Soit g' la fonction dérivée de g sur $]0, +\infty[$.

On a alors : $\forall y \in]0, +\infty[, \quad g'(y) = xf'_k(xy) = x\dfrac{k}{xy} = \dfrac{k}{y}$.

La fonction g est donc une primitive sur $]0, +\infty[$ de fonction $x \longmapsto \dfrac{k}{x}$. De la propriété P_1 du paragraphe 2.3 du chapitre 10, il résulte qu'il existe un réel K tel que l'on ait :
$\forall y \in]0, +\infty[, \quad g(y) = f_k(xy) = f_k(y) + K$.
On a en particulier : $g(1) = f_k(x) = f_k(1) + K$. Il résulte de la définition de f_k que l'on a : $f_k(1) = 0$. On a donc : $K = f_k(x)$ et par suite :
$\forall y \in]0, +\infty[, \quad f_k(xy) = f_k(y) + f_k(x)$. ■

Conséquences : 1. L'égalité $f_k(1) = 0$ traduit le fait que l'image par f_k de l'élément neutre du groupe $(\mathbb{R}_+^*, \times)$ est l'élément neutre du groupe $(\mathbb{R}, +)$.
2. De même soit x un élément quelconque de $\mathbb{R}_+^*$. L'image par f_k du symétrique pour la loi $\times$ de x est le symétrique pour la loi $+$ de $f_k(x)$. On a donc :

$$\boxed{\forall x \in]0, +\infty[, \quad f_k\left(\frac{1}{x}\right) = -f_k(x)}$$

3. Il résulte de l'associativité de la loi $\times$ dans $\mathbb{R}_+^*$ et de celle de la loi $+$ dans $\mathbb{R}$ que l'on a aussi : $\forall (x_1, \ldots, x_n) \in (\mathbb{R}_+^*)^n, \quad f_k(x_1 \cdot \ldots \cdot x_n) = f_k(x_1) + \ldots + f_k(x_n)$.

P3 $\quad \forall (x, y) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*, \quad f_k\left(\dfrac{x}{y}\right) = f_k(x) - f_k(y)$

Démonstration :
On a :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*, \quad f_k\left(\frac{x}{y}\right) = f_k\left(x \cdot \frac{1}{y}\right) = f_k(x) + f_k\left(\frac{1}{y}\right) = f_k(x) - f_k(y). \quad ■$$

P4 $\quad \forall a \in \mathbb{R}_+^*, \quad \forall n \in \mathbb{Z}, \quad f_k(a^n) = nf_k(a)$

Démonstration :
Soient a un réel strictement positif quelconque et n un entier rationnel quelconque.
Il n'y a que trois cas possibles : $n = 0, \quad n > 0, \quad n < 0$.

$\boxed{n = 0}$ On a : $f_k(a^0) = f_k(1) = 0 = 0.f_k(a)$.

$\boxed{n > 0}$ On a : $f_k(a^n) = f_k(\underbrace{a. \ldots . a}_{n \text{ fois}}) = \underbrace{f_k(a) + \ldots + f_k(a)}_{n \text{ fois}} = nf_k(a)$.

$\boxed{n < 0}$ Soit n' le symétrique de n pour la loi $+$.

On a : $f_k(a^n) = f_k(a^{-n'}) = f_k\left(\dfrac{1}{a^{n'}}\right) = -f_k(a^{n'})$.
L'entier rationnel n' est positif; on a donc : $f_k(a^{n'}) = n'f_k(a)$
et par suite : $f_k(a^n) = -n'f_k(a) = nf_k(a)$. ■

P5 $\forall a \in \mathbb{R}_+^*, \quad \forall r \in \mathbb{Q}, \quad f_k(a^r) = r f_k(a)$

Démonstration :

Soient a un réel strictement positif quelconque et r un élément quelconque de $\mathbb{Q}$.

Soit (p, q) un élément de $\mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$ tel que : $r = \frac{p}{q}$.

On a alors : $f_k(a^r) = f_k\left(a^{\frac{p}{q}}\right) = f_k\left(\left(a^{\frac{1}{q}}\right)^p\right)$.

De la propriété P_4 il résulte que l'on a : $f_k(a^r) = p f_k\left(a^{\frac{1}{q}}\right)$.

Calculons $f_k\left(a^{\frac{1}{q}}\right)$.

On a : $f_k(a) = f_k\left(\left(a^{\frac{1}{q}}\right)^q\right) = q f_k\left(a^{\frac{1}{q}}\right)$, et par suite : $f_k\left(a^{\frac{1}{q}}\right) = \frac{1}{q} f_k(a)$.

On a finalement : $f_k(a^r) = \frac{p}{q} f_k(a) = r f_k(a)$. ■

Remarque : Cette propriété est une généralisation de la propriété P_4.

Fonction logarithme népérien.

1.3 **DÉFINITION : On appelle fonction logarithme népérien *, et on note Log la fonction logarithmique f_1, c'est-à-dire l'application de $\mathbb{R}_+^*$ dans $\mathbb{R}$ définie par :**

$$\begin{aligned} \text{Log} : \mathbb{R}_+^* &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \int_1^x \frac{1}{t}\,dt. \end{aligned}$$

On emploie aussi quelquefois le symbole ln au lieu du symbole Log.

Pour tout réel strictement positif x, le réel Log x est appelé le **logarithme népérien de** x et on a : $\text{Log}\, x = \int_1^x \frac{1}{t}\,dt$.

1.4 Les propriétés du paragraphe 1.2 s'écrivent alors :

$$\begin{array}{|ll|} \text{Log}\, 1 = 0 & \\ \forall (a, b) \in (\mathbb{R}_+^*)^2, & \text{Log}\,(ab) = \text{Log}\, a + \text{Log}\, b \\ \forall (a, b) \in (\mathbb{R}_+^*)^2, & \text{Log}\, \frac{a}{b} = \text{Log}\, a - \text{Log}\, b \\ \forall a \in \mathbb{R}_+^*, \ \forall r \in \mathbb{Q}, & \text{Log}\, a^r = r\, \text{Log}\, a \end{array}$$

Exemples.

1. On a : $\text{Log}\, \frac{2^7 . 5^2}{3^4} = \text{Log}\,(2^7 . 5^2) - \text{Log}\, 3^4$
$= \text{Log}\, 2^7 + \text{Log}\, 5^2 - \text{Log}\, 3^4$
$= 7\, \text{Log}\, 2 + 2\, \text{Log}\, 5 - 4\, \text{Log}\, 3.$

* John Neper, ou Napier, mathématicien écossais (1550-1617). Il a publié son ouvrage principal en 1614, où il choisit le nombre e comme base de son système de logarithmes.

2. Considérons la fonction $x \longmapsto \text{Log}\,(x-2) - \text{Log}\,(2x+1) + \text{Log}\,(x+3)$.
Cette fonction est définie pour tout réel x tel que l'on ait :

$$\begin{cases} x-2>0 \\ 2x+1>0, \\ x+3>0 \end{cases} \text{ c'est-à-dire : } \begin{cases} x>2 \\ x>-\dfrac{1}{2}. \\ x>-3 \end{cases}$$

L'ensemble de définition de f est $]2, +\infty[$.

On a alors : $\forall x \in]2, +\infty[,\ f(x) = \text{Log}\left(\dfrac{x-2}{2x+1}\right) + \text{Log}\,(x+3)$

$$= \text{Log}\,\frac{(x-2)(x+3)}{2x+1} = \text{Log}\,\frac{x^2+x-6}{2x+1}.$$

Remarquons que la fonction $x \longmapsto \text{Log}\,\dfrac{x^2+x-6}{2x+1}$ est définie pour tout réel x tel que l'on ait : $\dfrac{(x-2)(x+3)}{2x+1} > 0$, c'est-à-dire pour tout réel x de $\left]-3, -\dfrac{1}{2}\right[\cup]2, +\infty[$.

3. Considérons la fonction $f:\ x \longmapsto \text{Log}\,\dfrac{(x+2)^3}{(x-1)^4}$. X

Cette fonction est définie pour tout réel x tel que l'on ait :
$\left((x-1) \neq 0 \text{ et } \dfrac{(x+2)^3}{(x-1)^4} > 0\right)$,
c'est-à-dire : $(x \neq 1$ et $x+2>0)$.
L'ensemble de définition de f est $D =]-2, 1[\cup]1, +\infty]$.
On a alors : $\forall x \in D,\ \text{Log}\,\dfrac{(x+2)^3}{(x-1)^4} = \text{Log}\,(x+2)^3 - \text{Log}\,(x-1)^4$.
Puisque l'on a : $\forall x \in D,\ x+2>0$, on a : $\text{Log}\,(x+2)^3 = 3\,\text{Log}\,(x+2)$.
De la proposition : $\forall x \in D,\ \left((x-1)^4 = |x-1|^4 \text{ et } |x-1|>0\right)$, il résulte que l'on a : $\forall x \in D,\ \text{Log}\,(x-1)^4 = 4\,\text{Log}\,|x-1|$.
On a donc : $\forall x \in D,\ \text{Log}\,\dfrac{(x+2)^3}{(x-1)^4} = 3\,\text{Log}\,(x+2) - 4\,\text{Log}\,|x-1|$.

Étude de la fonction Log.

1.5 • Il résulte de la définition 1.3 que l'ensemble de définition de la fonction Log est $\mathbb{R}_+^*$. Il n'y a pas de réduction apparente de l'ensemble d'étude; nous étudions donc cette fonction sur $]0, +\infty[$.

• De la propriété P_1 du paragraphe 1.2 il résulte que la fonction Log est dérivable et par suite continue sur $]0, +\infty[$, et qu'elle a pour fonction dérivée sur cet intervalle la fonction $x \longmapsto \dfrac{1}{x}$.

De la proposition : $\forall x \in]0, +\infty[,\ \dfrac{1}{x} > 0$, il résulte que la fonction Log est strictement croissante sur $]0, +\infty[$.

• Démontrons que la fonction Log admet une limite en $+\infty$ égale à $+\infty$, c'est-à-dire :
$\forall a \in \mathbb{R},\ \exists b \in \mathbb{R},\ \forall x \in]0, +\infty[,\ \left((x>b) \Longrightarrow (\text{Log}\,x > a)\right)$.
Soit donc a un réel; cherchons le réel b sous la forme 2^n.

La fonction Log est strictement croissante sur $]0, +\infty[$. Pour tout entier rationnel n et pour tout réel x strictement positif, on a :
$(x > 2^n) \Longrightarrow (\text{Log } x > \text{Log } 2^n)$, c'est-à-dire :
$(x > 2^n) \Longrightarrow (\text{Log } x > n \text{ Log } 2)$.
Pour avoir : $\text{Log } x > a$, il suffit donc d'avoir : $n \text{ Log } 2 > a$.
D'autre part, il résulte de la croissance stricte de la fonction Log et de l'égalité : $\text{Log } 1 = 0$, que l'on a : $\text{Log } 2 > 0$.

Pour avoir : $n \text{ Log } 2 > a$, il suffit donc d'avoir : $n > \dfrac{a}{\text{Log } 2}$.

Soient n_0 l'entier rationnel égal à $E\left(\dfrac{a}{\text{Log } 2} + 1\right)$ et b le réel égal à 2^{n_0}.

On a alors : $\forall x \in]0, +\infty[, \quad ((x > b) \Longrightarrow (\text{Log } x > n_0 \text{ Log } 2) \Longrightarrow (\text{Log } x > a))$

et par suite : $\boxed{\lim\limits_{x \to +\infty} \text{Log } x = +\infty}$

- Cherchons si la fonction Log admet une limite à droite en 0.

On a : $\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad \text{Log } x = -\text{Log } \dfrac{1}{x}$.

Cherchons donc si la fonction $x \longmapsto \text{Log } \dfrac{1}{x}$, composée de la fonction $x \longmapsto \dfrac{1}{x}$ et de la fonction Log, admet une limite à droite en 0.

La fonction $x \longmapsto \dfrac{1}{x}$ admet une limite à droite en 0, égale à $+\infty$.

La fonction Log admet une limite en $+\infty$, égale à $+\infty$.
De la propriété P_3 du paragraphe 3.13 du chapitre 5, il résulte alors que la fonction $x \longmapsto \text{Log } \dfrac{1}{x}$ admet une limite à droite en 0, égale à $\lim\limits_{+\infty} \text{Log}$.

On a donc : $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} \text{Log } \dfrac{1}{x} = +\infty$ et par suite : $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} \text{Log } x = -\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} \text{Log } \dfrac{1}{x} = -\infty$.

- On a donc le tableau de variation suivant :

x	0	1	$+\infty$
$(\text{Log})'(x)$	‖	$+$	
$\text{Log } x$	‖ $-\infty$	$\nearrow$ 0 $\nearrow$	$+\infty$

- Étudions les branches infinies de la courbe représentative $\mathcal{C}$ de la fonction Log.
De la proposition : $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} \text{Log } x = -\infty$, il résulte que la **droite d'équation : $x = 0$ est asymptote à la courbe $\mathcal{C}$.**

D'autre part, cherchons si la fonction $x \longmapsto \dfrac{\text{Log } x}{x}$ admet une limite en $+\infty$.

De la proposition : $\left(\forall t \in]1, +\infty[, \frac{1}{t} < 1\right)$ et de la propriété P_2 du paragraphe 1.13 du chapitre 10, il résulte que l'on a : $\forall x \in]1, +\infty[, \quad \int_1^x \frac{1}{t}\,dt \leqslant \int_1^x dt,$ c'est-dire : $\forall x \in]1, +\infty[, \quad \text{Log}\, x \leqslant x - 1.$
On a donc a fortiori : $\forall x \in]1, +\infty[, \quad \text{Log}\, x \leqslant x.$
Soit x un élément quelconque de $]1, +\infty[$; le réel $\sqrt{x}$ appartient à $]1, +\infty[$.
On a donc : $\text{Log}\sqrt{x} \leqslant \sqrt{x}.$
On a alors les équivalences suivantes :

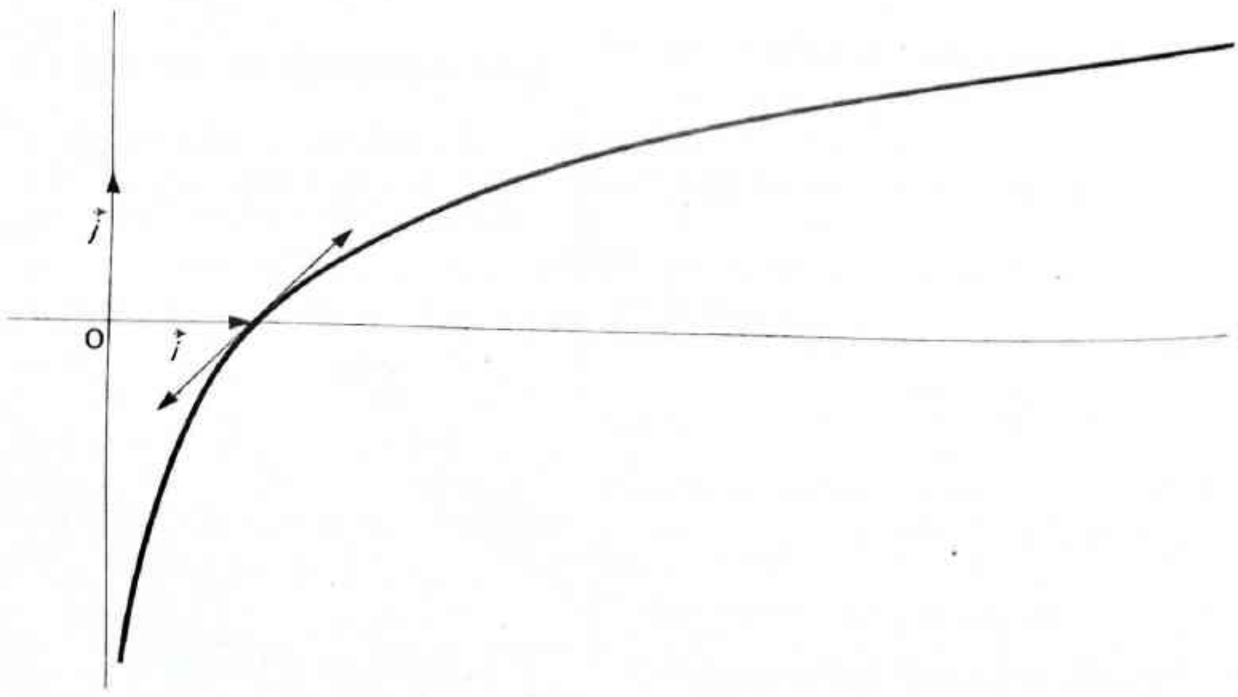
$$(\text{Log}\sqrt{x} \leqslant \sqrt{x}) \Longleftrightarrow \left(\frac{1}{2}\text{Log}\, x \leqslant \sqrt{x}\right)$$

$$\Longleftrightarrow (\text{Log}\, x \leqslant 2\sqrt{x}) \Longleftrightarrow \left(\frac{\text{Log}\, x}{x} \leqslant \frac{2\sqrt{x}}{x}\right).$$

Puisque x est strictement positif, on a : $x = (\sqrt{x})^2$, et par suite : $\frac{\text{Log}\, x}{x} \leqslant \frac{2}{\sqrt{x}}$.
D'autre part, puisque x est strictement supérieur à 1, on a : $\text{Log}\, x > 0$.
On a donc finalement : $\forall x \in]1, +\infty[, \quad 0 < \frac{\text{Log}\, x}{x} \leqslant \frac{2}{\sqrt{x}}$.
De la proposition : $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{2}{\sqrt{x}} = 0$ et de l'exercice n° 66 du chapitre 5, il résulte que l'on a : $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\text{Log}\, x}{x} = 0.$
La courbe $\mathcal{C}$ admet donc une **branche parabolique de direction** Ox.

- La courbe $\mathcal{C}$ admet une tangente au point de coordonnées $\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ de coefficient directeur $(\text{Log})'(1) = 1$.

Voici la courbe représentative $\mathcal{C}$ de la fonction Log :



Limites où intervient la fonction Log.

1.6 • Dans le paragraphe 1.5 nous avons démontré les résultats suivants :

$$\boxed{\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to +\infty} \operatorname{Log} x = +\infty \\ \lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} \operatorname{Log} x = -\infty \\ \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\operatorname{Log} x}{x} = 0. \end{array}}$$

• Cherchons si la fonction $x \longmapsto x \operatorname{Log} x$ admet une limite à droite en 0.

On a : $\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad x \operatorname{Log} x = -\dfrac{\operatorname{Log} \frac{1}{x}}{\frac{1}{x}}.$

La fonction $x \longmapsto \dfrac{\operatorname{Log} \frac{1}{x}}{\frac{1}{x}}$ est la composée de la fonction $x \longmapsto \dfrac{1}{x}$ et de la fonction $x \longmapsto \dfrac{\operatorname{Log} x}{x}.$

La fonction $x \longmapsto \dfrac{1}{x}$ a une limite à droite en 0, égale à $+\infty$.

La fonction $x \longmapsto \dfrac{\operatorname{Log} x}{x}$ a une limite en $+\infty$, égale à 0.

De la propriété P_3 du paragraphe 3.13 du chapitre 5, il résulte alors que la fonction $x \longmapsto \dfrac{\operatorname{Log} \frac{1}{x}}{\frac{1}{x}}$ admet une limite à droite en 0, égale à 0.

On a donc : $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} \dfrac{\operatorname{Log} \frac{1}{x}}{\frac{1}{x}} = 0$, et par suite : $\boxed{\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} x \operatorname{Log} x = 0}$

• La fonction Log est dérivable en 1, de nombre dérivé égal à 1.

On a donc : $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{\operatorname{Log} x - \operatorname{Log} 1}{x - 1} = 1$, c'est-à-dire : $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{\operatorname{Log} x}{x - 1} = 1.$

Considérons la fonction $x \longmapsto \dfrac{\operatorname{Log}(1 + x)}{x}$; cette fonction est la composée de la fonction $x \longmapsto x + 1$ et de la fonction $x \longmapsto \dfrac{\operatorname{Log} x}{x - 1}.$

La fonction $x \longmapsto x + 1$ admet une limite en 0, égale à 1 et il existe un intervalle épointé I de centre 0, par exemple $\left]-\frac{1}{2}, 0\right[\cup \left]0, \frac{1}{2}\right[$, tel que: $\forall x \in I, \; x + 1 \neq 1$.

La fonction $x \longmapsto \dfrac{\operatorname{Log} x}{x - 1}$ admet une limite en 1, égale à 1.

De la propriété P_2 du paragraphe 3.13 du chapitre 5, il résulte alors que la fonction $x \longmapsto \dfrac{\text{Log}(1+x)}{x}$ admet une limite en 0, égale à 1.

On a donc : $\boxed{\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\text{Log}(1+x)}{x} = 1}$

Exemples.

1. Cherchons si la fonction $x \longmapsto x^2 \text{Log}\, x$ admet une limite à droite en 0.
L'ensemble de définition de cette fonction est $\mathbb{R}_+^*$.
On a : $\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad x^2 \text{Log}\, x = x \cdot x \text{Log}\, x$.
Des propositions : $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} x = 0$ et $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} x \text{Log}\, x = 0$, il résulte que l'on a :
$\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} x^2 \text{Log}\, x = 0$.

2. Cherchons si la fonction : $x \longmapsto x \text{Log}\left(1 + \dfrac{1}{x}\right)$ admet une limite en $+\infty$.
L'ensemble de définition de cette fonction est $D =]-\infty, -1[\cup]0, +\infty[$.

On a : $\forall x \in D, \quad x \text{Log}\left(1 + \dfrac{1}{x}\right) = \dfrac{\text{Log}\left(1 + \dfrac{1}{x}\right)}{\dfrac{1}{x}}$.

La fonction $x \longmapsto x \text{Log}\left(1 + \dfrac{1}{x}\right)$ est donc la composée de la fonction $x \longmapsto \dfrac{1}{x}$ et de la fonction $x \longmapsto \dfrac{\text{Log}(1+x)}{x}$.

La fonction $x \longmapsto \dfrac{1}{x}$ admet une limite en $+\infty$, égale à 0 et on a :

$\forall x \in]0, +\infty[, \quad \dfrac{1}{x} > 0$.

La fonction $x \longmapsto \dfrac{\text{Log}(1+x)}{x}$ admet une limite à droite en 0, égale à 1.

De la propriété P_2 du paragraphe 3.13 du chapitre 5, il résulte alors que la fonction $x \longmapsto x \text{Log}\left(1 + \dfrac{1}{x}\right)$ admet une limite en $+\infty$ égale à 1.

3. Cherchons si la fonction $x \longmapsto \dfrac{\text{Log}\, x}{\sqrt{x}}$ admet une limite en $+\infty$.
L'ensemble de définition de cette fonction est $\mathbb{R}_+^*$.

On a : $\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad \dfrac{\text{Log}\, x}{\sqrt{x}} = \dfrac{2 \text{Log}\sqrt{x}}{\sqrt{x}}$.

La fonction $x \longmapsto \sqrt{x}$ admet une limite en $+\infty$, égale à $+\infty$,

La fonction $x \longmapsto \dfrac{\text{Log}\, x}{x}$ admet une limite en $+\infty$, égale à 0.

De la propriété P_3 du paragraphe 3.13 du chapitre 5, il résulte que la fonction $x \longmapsto \dfrac{\text{Log}\, x}{\sqrt{x}}$ admet une limite en $+\infty$ égale à 0.

Base d'une fonction logarithmique.

1.7 Il résulte du paragraphe 1.5 que la fonction Log est une application continue et strictement croissante de $]0, +\infty[$ dans $]-\infty, +\infty[$ qui satisfait aux deux propositions suivantes : $\lim\limits_{0^+} \text{Log} = -\infty$ et $\lim\limits_{+\infty} \text{Log} = +\infty$.

On démontre, comme dans le paragraphe 2.2 du chapitre 6 que la fonction Log est une bijection de $]0, +\infty[$ sur $]-\infty, +\infty[$.

D'autre part, pour tout réel k non nul, la fonction logarithmique f_k satisfait à la proposition suivante :

$$\forall x \in]0, +\infty[, \quad f_k(x) = \int_1^x \frac{k}{t}\,dt = k \int_1^x \frac{dt}{t} = k \,\text{Log}\, x.$$

On a donc : $f_k = k.\text{Log}$ et par suite f_k est aussi une bijection de $]0, +\infty[$ sur $]-\infty, +\infty[$.

Nous énonçons le résultat suivant :

> Pour tout réel k non nul, la fonction logarithmique f_k est une bijection de $]0, +\infty[$ sur $]-\infty, +\infty[$.

Définitions.

1.8 • Soit k un réel non nul.

On appelle base de la fonction logarithmique f_k et on note a l'unique réel strictement positif dont l'image par f_k est égale à 1.

De l'égalité : $f_k(1) = 0$ et de la bijectivité de f_k, il résulte que l'on a : $a \neq 1$.

On a d'autre part : $f_k(a) = k \,\text{Log}\, a = 1$ et par suite :

$$\text{Log}\, a = \frac{1}{k} \quad \text{et} \quad f_k = \left(\frac{1}{\text{Log}\, a}\right) \text{Log}.$$

• Soit a un réel strictement positif, différent de 1.

On appelle fonction logarithme de base a et on note $\log_a$ la fonction logarithmique f_k avec : $k = \dfrac{1}{\text{Log}\, a}$.

On a : $\boxed{\forall x \in]0, +\infty[, \quad \log_a(x) = \dfrac{\text{Log}\, x}{\text{Log}\, a}}$ $\log_a(x) = \dfrac{\ln x}{\ln a}$

• La base de la fonction logarithme népérien est le réel e tel que l'on ait : $\boxed{\text{Log}\, e = 1}$; une valeur approchée, à 10^{-5} près, de e est : 2,71828.

• La fonction logarithme de base 10 est utilisée pour les calculs numériques. On emploie souvent la notation log au lieu de $\log_{10}$.

On a donc : $\forall x \in]0, +\infty[, \quad \log x = \dfrac{\text{Log}\, x}{\text{Log}\, 10}$

Pour tout x de $]0, +\infty[$, le réel $\log x$ est appelé le **logarithme décimal de x**.

Une valeur approchée, à 10^{-5} près, du réel $M = \dfrac{1}{\text{Log}\, 10}$ est 0,43429.

Exemples.

1. Soit $A = \dfrac{\log_2 \sqrt{8} \times \log_3 27^2}{\log_4 \sqrt[3]{64}}$

On a : $\log_2 \sqrt{8} = \dfrac{1}{2} \log_2 8 = \dfrac{1}{2} \dfrac{\text{Log } 8}{\text{Log } 2} = \dfrac{1}{2} \dfrac{\text{Log } 2^3}{\text{Log } 2} = \dfrac{3}{2}$

$\log_3 27^2 = 2 \log_3 27 = 2 \dfrac{\text{Log } 27}{\text{Log } 3} = 2 \dfrac{\text{Log } 3^3}{\text{Log } 3} = 6$

$\log_4 \sqrt[3]{64} = \dfrac{1}{3} \log_4 64 = \dfrac{1}{3} \dfrac{\text{Log } 64}{\text{Log } 4} = \dfrac{1}{3} \dfrac{\text{Log } 4^3}{\text{Log } 4} = 1$

et par suite : $A = \dfrac{3}{2} \cdot 6 = 9$.

2. A tout couple (x, y) de l'ensemble $E = (\mathbb{R}_+^* - \{1\})^2$, associons le réel $B = \log_x y \,.\, \log_y x$.

On a alors : $\forall (x, y) \in E, \quad B = \dfrac{\text{Log } y}{\text{Log } x} \cdot \dfrac{\text{Log } x}{\text{Log } y} = 1$.

On a donc : $\boxed{\forall (x, y) \in E, \quad \log_x y \,.\, \log_y x = 1}$

3. A tout triplet (x, y, z) de l'ensemble $F = (\mathbb{R}_+^* - \{1\})^3$, associons le réel $C = \log_x y \,.\, \log_y z$.

On a alors : $\forall (x, y, z) \in F, \quad C = \dfrac{\text{Log } y}{\text{Log } x} \cdot \dfrac{\text{Log } z}{\text{Log } y} = \dfrac{\text{Log } z}{\text{Log } x} = \log_x z$.

On a donc : $\boxed{\forall (x, y, z) \in F, \quad \log_x y \,.\, \log_y z = \log_x z}$

Fonction logarithme de base a.

1.9 Soit a un réel strictement positif différent de 1.
Étudions la fonction $\log_a$.
Du paragraphe précédent, il résulte que cette fonction est le produit de la fonction Log par le réel $\dfrac{1}{\text{Log } a}$, et par suite :

- L'ensemble de définition de la fonction $\log_a$ est $]0, +\infty[$.
- La fonction $\log_a$ est dérivable, et par suite continue, sur $]0, +\infty[$.

On a : $\forall x \in]0, +\infty[, \quad (\log_a)'(x) = \dfrac{1}{\text{Log } a} \cdot \dfrac{1}{x} = \dfrac{1}{x \text{ Log } a}$.

- La fonction Log est bijective et strictement croissante; on a donc :

$((\text{Log } a < 0) \iff (0 < a < 1))$ et $((\text{Log } a > 0) \iff (a > 1).)$

Si l'on a : $a > 1$ (resp. $0 < a < 1$), la fonction $\log_a$ est strictement croissante (resp. strictement décroissante) sur $]0, +\infty[$ et satisfait aux deux propositions suivantes :

$$\begin{cases} \lim\limits_{+\infty} \log_a = +\infty \\ \lim\limits_{0^+} \log_a = -\infty \end{cases} \quad \left(\text{resp.} \begin{cases} \lim\limits_{+\infty} \log_a = -\infty \\ \lim\limits_{0^+} \log_a = +\infty \end{cases} \right).$$

- On a donc les deux tableaux de variation suivants :

$a > 1$

x	0	1	$+\infty$
$(\log_a)'(x)$	‖	$+$	
$\log_a x$	‖ $-\infty$	$\nearrow$ 0 $\nearrow$	$+\infty$

$0 < a < 1$

x	0	1	$+\infty$
$(\log_a)'(x)$	‖	$-$	
$\log_a x$	‖ $+\infty$	$\searrow$ 0 $\searrow$	$-\infty$

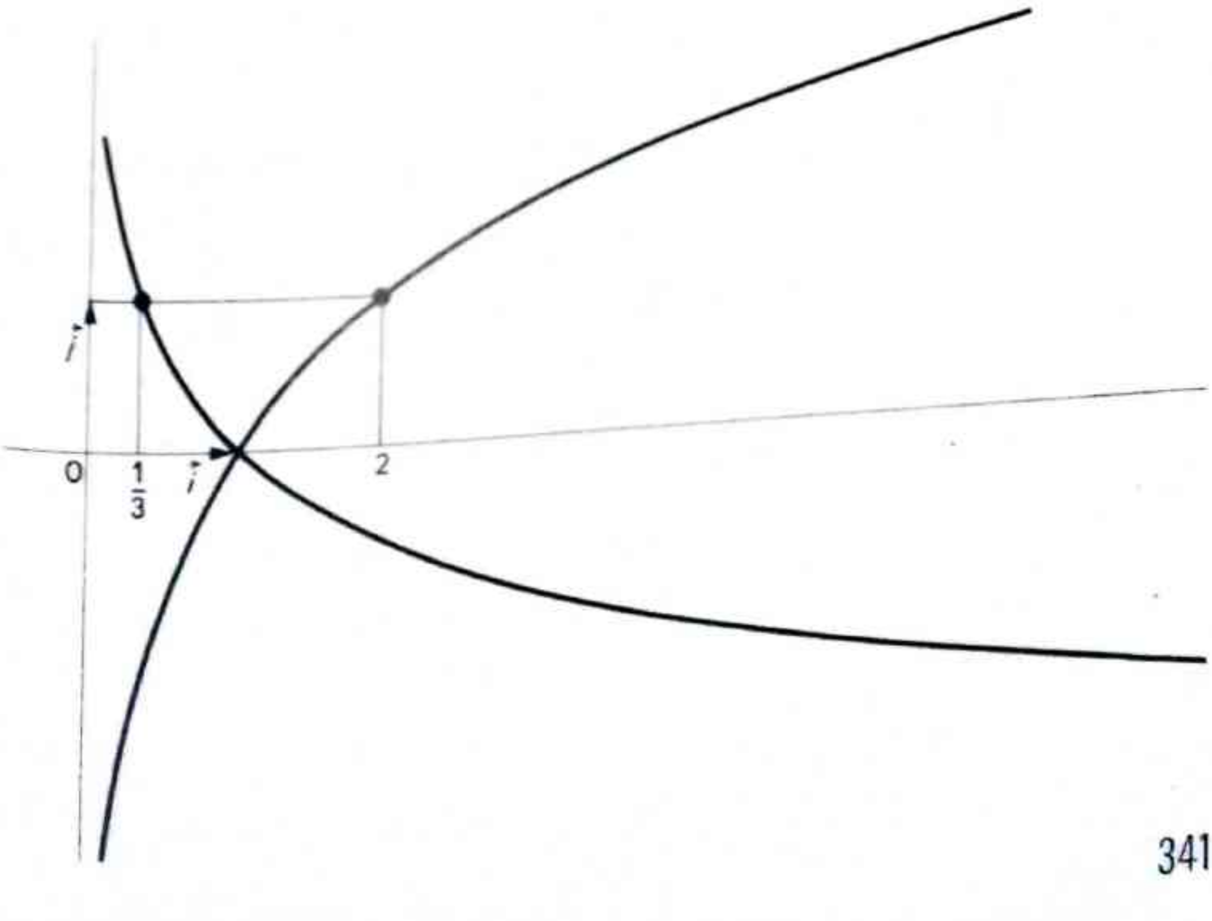
• Étudions les branches infinies de la courbe représentative $\mathcal{C}_a$ de la fonction $\log_a$. Si l'on a : $a > 1$ (resp. $0 < a < 1$), de la proposition : $\lim\limits_{0^+} \log_a = +\infty$ (resp. $\lim\limits_{0^+} \log_a = -\infty$), il résulte que **la droite d'équation : $x = 0$ est asymptote à la courbe $\mathcal{C}_a$.**

On a, d'autre part : $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\operatorname{Log} x}{x} = 0$ et par suite $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{\operatorname{Log} a} \dfrac{\operatorname{Log} x}{x} = 0$.

La courbe $\mathcal{C}_a$ admet donc une **branche parabolique de direction** Ox.

• La courbe $\mathcal{C}_a$ admet au point de coordonnées $\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ une tangente de coefficient directeur $(\log_a)'(1) = \dfrac{1}{\operatorname{Log} a}$

• On a donc les courbes représentatives suivantes $\mathcal{C}_{\frac{1}{3}}$ et $\mathcal{C}_2$ dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.



Remarques : 1. Dans le cas où a est égal à e, on retrouve la courbe représentative de la fonction Log.

2. Si a est un réel strictement positif différent de 1, son inverse $\frac{1}{a}$ est aussi un réel strictement positif différent de 1. De l'égalité : $\text{Log}\,\frac{1}{a} = -\text{Log}\,a$ il résulte que l'on a : $\forall x \in]0, +\infty[, \quad \log_{\frac{1}{a}}(x) = \frac{\text{Log}\,x}{\text{Log}\,\frac{1}{a}} = -\frac{\text{Log}\,x}{\text{Log}\,a} = -\log_a x.$

Les courbes représentatives respectives $\mathcal{C}_a$ et $\mathcal{C}_{\frac{1}{a}}$ de $\log_a$ et de $\log_{\frac{1}{a}}$ sont donc symétriques par rapport à l'axe Ox.

Caractérisation des fonctions logarithmiques.

1.10 Nous avons démontré dans les propriétés P_1 et P_2 du paragraphe 1.2 que toute fonction logarithmique est un homomorphisme dérivable de $(\mathbb{R}_+^*, \times)$ dans $(\mathbb{R}, +)$; d'autre part nous avons démontré, dans le paragraphe 1.7 que toute fonction logarithmique est une bijection de $\mathbb{R}_+^*$ sur $\mathbb{R}$. Il en résulte que toute fonction logarithmique est un isomorphisme dérivable de $(\mathbb{R}_+^*, \times)$ sur $(\mathbb{R}, +)$.
Démontrons que cette propriété caractérise les fonctions logarithmiques.

THÉORÈME : L'ensemble des fonctions logarithmiques est l'ensemble des isomorphismes dérivables de $(\mathbb{R}_+^*, \times)$ sur $(\mathbb{R}, +)$.

Démonstration :
On vient de démontrer que toute fonction logarithmique est un isomorphisme dérivable de $(\mathbb{R}_+^*, \times)$ sur $(\mathbb{R}, +)$. Il suffit donc de démontrer que tout isomorphisme dérivable de $(\mathbb{R}_+^*, \times)$ sur $(\mathbb{R}, +)$ est une fonction logarithmique.
Soit f un isomorphisme dérivable de $(\mathbb{R}_+^*, \times)$ sur $(\mathbb{R}, +)$.
f est en particulier un homomorphisme de $(\mathbb{R}_+^*, \times)$ dans $(\mathbb{R}, +)$; on a donc :
$\forall (x, y) \in (\mathbb{R}_+^*)^2, \quad f(xy) = f(x) + f(y)$.
Soit x un réel strictement positif quelconque. La fonction $g : \; y \longmapsto f(xy)$ définie sur $\mathbb{R}_+^*$ est égale à la fonction $h : \; y \longmapsto f(x) + f(y)$, définie sur $\mathbb{R}_+^*$. La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$; il en est donc de même des fonctions g et h et l'on a :
$\forall y \in \mathbb{R}_+^*, \quad g'(y) = xf'(xy), \quad$ et :
$\forall y \in \mathbb{R}_+^*, \quad h'(y) = 0 + f'(y)$.
Nous en déduisons : $\forall y \in \mathbb{R}_+^*, \quad xf'(xy) = f'(y)$.
Il en résulte : $xf'(x) = f'(1)$.

La fonction f satisfait donc à la proposition suivante : $\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad f'(x) = \frac{f'(1)}{x}$.
Si le réel $f'(1)$ était nul, la fonction f' serait égale à la fonction nulle, et par suite la fonction f serait une fonction constante sur $\mathbb{R}_+^*$. Or f est une bijection de $\mathbb{R}_+^*$ sur $\mathbb{R}$; le réel $f'(1)$ n'est donc pas nul.
Posons : $k = f'(1)$; la fonction f est alors une primitive sur $]0, +\infty[$ de la fonction $x \longmapsto \frac{k}{x}$.

D'autre part puisque f est un homomorphisme du groupe $(\mathbb{R}_+^*, \times)$ dans le groupe $(\mathbb{R}, +)$, l'image par f de l'élément neutre de $(\mathbb{R}_+^*, \times)$ est l'élément neutre de $(\mathbb{R}, +)$; on a donc : $f(1) = 0$.

La fonction f est la primitive de la fonction $x \longmapsto \frac{k}{x}$ qui s'annule en 1; c'est donc la fonction logarithmique f_k. ■

2. Fonctions exponentielles.

Dans le paragraphe 1.7 nous avons démontré que toute fonction logarithmique est une bijection de $\mathbb{R}_+^*$ sur $\mathbb{R}$. Par suite toute fonction logarithmique admet une application réciproque, qui est une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

2.1 **DÉFINITION : Soit a un réel strictement positif et différent de 1. On appelle fonction exponentielle de base a l'application réciproque de la fonction logarithme de base a.**

Nous notons provisoirement $\exp_a$ l'application réciproque de la fonction $\log_a$.
On a donc : $\forall x \in \mathbb{R},\ \forall y \in \mathbb{R}_+^*,\ \ ((y = \exp_a x) \Longleftrightarrow (x = \log_a y))$.
Le théorème suivant permet de poursuivre l'étude des fonctions exponentielles.

2.2 **THÉORÈME : Soient E un ensemble muni d'une loi de composition interne, notée $\star$, et F un ensemble muni d'une loi de composition interne, notée $\perp$. Soit f un isomorphisme de $(E, \star)$ sur $(F, \perp)$. Alors la bijection réciproque f^{-1} de f est un isomorphisme de $(F, \perp)$ sur $(E, \star)$.**

Démonstration :
Il suffit de démontrer la proposition suivante :
$\forall (y_1, y_2) \in F^2,\ \ f^{-1}(y_1 \perp y_2) = f^{-1}(y_1) \star f^{-1}(y_2)$.
Soient donc y_1 et y_2 deux éléments quelconques de F et soient x_1 et x_2 les éléments de E dont ils sont les images respectives par f.
Puisque f est un isomorphisme de $(E, \star)$ sur $(F, \perp)$, on a :
$f(x_1 \star x_2) = f(x_1) \perp f(x_2) = y_1 \perp y_2$
et par suite : $x_1 \star x_2 = f^{-1}(f(x_1 \star x_2)) = f^{-1}(y_1 \perp y_2)$.
On a donc : $f^{-1}(y_1) \star f^{-1}(y_2) = x_1 \star x_2 = f^{-1}(y_1 \perp y_2)$. ■

Propriétés.

2.3 Soit a un réel strictement positif et différent de 1. La fonction $\exp_a$ possède les propriétés suivantes :

P1 La fonction $\exp_a$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et a pour fonction dérivée sur $\mathbb{R}$ la fonction $x \longmapsto (\text{Log } a) \exp_a x$.

Démonstration :

Dans le paragraphe 1.9, nous avons démontré que la fonction $\log_a$ est une bijection strictement croissante si $a > 1$ (resp. strictement décroissante si $0 < a < 1$) de $\mathbb{R}_+^*$ sur $\mathbb{R}$, dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$, de fonction dérivée $(\log_a)'$ définie par :

$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \ (\log_a)'(x) = \dfrac{1}{x \operatorname{Log} a}.$

On a : $\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \ \dfrac{1}{x \operatorname{Log} a} \neq 0$. Du théorème 2.6 du chapitre 7, il résulte donc que la fonction $\exp_a$ est une bijection strictement croissante si $a > 1$ (resp. strictement décroissante si $0 < a < 1$) de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}_+^*$, dérivable sur $\mathbb{R}$, de fonction dérivée $(\exp_a)'$ définie par : $\forall x \in \mathbb{R}, \ (\exp_a)'(x) = \dfrac{1}{(\log a)' \ (\exp_a x)} = \dfrac{1}{\dfrac{1}{(\operatorname{Log} a) \exp_a x}},$

c'est-à-dire : $\forall x \in \mathbb{R}, \quad (\exp_a)'(x) = (\operatorname{Log} a) \exp_a x.$ ∎

P2 La fontion $\exp_a$ est un isomorphisme de $(\mathbb{R}, +)$ sur $(\mathbb{R}_+^*, \times)$.
On a donc : $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad \exp_a (x + y) = \exp_a x \,.\, \exp_a y.$

Démonstration :

$\log_a$ est un isomorphisme de $(\mathbb{R}_+^*, \times)$ sur $(\mathbb{R}, +)$; du théorème 2.2, il résulte que sa bijection réciproque $\exp_a$ est un isomorphisme de $(\mathbb{R}, +)$ sur $(\mathbb{R}_+^*, \times)$. ∎

Conséquences : 1. L'image par $\exp_a$ de l'élément neutre de $(\mathbb{R}, +)$ est l'élément neutre de $(\mathbb{R}_+^*, \times)$, c'est-à-dire : $\boxed{\exp_a 0 = 1}$

2. L'image par $\exp_a$ du symétrique pour la loi $+$ de tout élément x de $\mathbb{R}$ est le symétrique pour la loi $\times$ de $\exp_a x$, c'est-à-dire :

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}, \quad \exp_a (-x) = \frac{1}{\exp_a x}}$$

P3 $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad \exp_a (x - y) = \dfrac{\exp_a x}{\exp_a y}$

Démonstration :

On a :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad \exp_a (x - y) = \exp_a (x + (-y))$$
$$= (\exp_a x) \,.\, \exp_a(-y) = (\exp_a x) \cdot \frac{1}{(\exp_a y)}. \ ∎$$

P4 $\forall r \in \mathbb{Q}, \quad \exp_a r = a^r.$

Démonstration :

Soit r un nombre rationnel quelconque.

On a : $\log_a (a^r) = r \log_a a = r$

et par suite : $\exp_a (\log_a (a^r)) = \exp_a r$, c'est-à-dire : $a^r = \exp_a r$. ∎

Notations : 1. Il est donc légitime de noter par convention a^x l'image par $\exp_a$ d'un réel quelconque x. Avec cette notation, la définition de $\exp_a$ et les propriétés précédentes s'écrivent :

$\forall x \in \mathbb{R},\ \forall y \in \mathbb{R}_+^*,\ \ ((y = a^x) \Longleftrightarrow (x = \log_a y)).$
$\forall x \in \mathbb{R}\quad ,\ \log_a (a^x) = x$
$\forall x \in \mathbb{R}_+^*\quad ,\ a^{\log_a x} = x$
$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2,\ \ a^{x+y} = a^x . a^y$
$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2,\ \ a^{x-y} = \dfrac{a^x}{a^y}$

2. Pour tout nombre rationnel r, on a : $1^r = 1$. Il est donc légitime de poser, par convention : $\forall x \in \mathbb{R},\ \ 1^x = 1$.

P5 $\forall x \in \mathbb{R},\ \ a^x = e^{x \operatorname{Log} a}$

Démonstration :
Soit x un réel quelconque.
On a : $x = \log_a a^x = \dfrac{\operatorname{Log} a^x}{\operatorname{Log} a}$ et par suite : $x \operatorname{Log} a = \operatorname{Log} a^x$. La fonction exponentielle de base e est la bijection réciproque de la fonction logarithme népérien.
On a donc : $e^{x \operatorname{Log} a} = e^{\operatorname{Log} a^x} = a^x$. ■
Cette propriété est également vraie si $a = 1$.

P6 $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2,\ \ (a^x)^y = a^{xy}$

Démonstration :
Soient x et y deux réels quelconques.
Le réel a^x est strictement positif.
On a : $(a^x)^y = e^{y \operatorname{Log} a^x} = e^{xy \operatorname{Log} a}$ et : $a^{xy} = e^{xy \operatorname{Log} a}$.
On a donc : $(a^x)^y = a^{xy}$. ■

Remarque : On démontre de façon analogue que, si a et b sont deux réels strictement positifs et si x est un réel quelconque, on a : $(ab)^x = a^x . b^x$ et $\left(\dfrac{a}{b}\right)^x = \dfrac{a^x}{b^x}$.
Ces formules généralisent les formules sur les puissances rationnelles obtenues dans le chapitre 6.

Fonction exponentielle de base e.

2.4 Les propriétés du paragraphe 2.3 s'écrivent alors :

$\forall x \in \mathbb{R},\ \ \forall y \in \mathbb{R}_+^*,\ \ ((y = e^x) \Longleftrightarrow (x = \operatorname{Log} y))$
$\forall x \in \mathbb{R},\ \ \operatorname{Log} e^x = x$
$\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ \ e^{\operatorname{Log} x} = x$
$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2,\ \ e^{x+y} = e^x e^y$
$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2,\ \ e^{x-y} = \dfrac{e^x}{e^y}$

√

Exemples.

1. On a : $\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ \ \operatorname{Log}(\operatorname{Log} e^x + e^{-\operatorname{Log} x}) = \operatorname{Log}\left(x + \dfrac{1}{e^{\operatorname{Log} x}}\right) = \operatorname{Log}\left(x + \dfrac{1}{x}\right).$

2. Résolvons dans $\mathbb{R}$ l'équation : $e^{2x+1} - 5e^{x+2} - 6e^3 = 0$.

On a : $\forall x \in \mathbb{R}$, $e^{2x+1} - 5e^{x+2} - 6e^3 = e(e^{2x} - 5e.e^x - 6e^2)$

et : $\forall x \in \mathbb{R}$, $e^{2x} - 5e.e^x - 6e^2 = (e^x + e)(e^x - 6e)$.

On a donc :

$$
\begin{aligned}
(e^{2x+1} - 5e^{x+2} - 6e^3 = 0) &\Longleftrightarrow (e^{2x} - 5e.e^x - 6e^2 = 0) \\
&\Longleftrightarrow \big((e^x + e)(e^x - 6e) = 0\big) \\
&\Longleftrightarrow (e^x = 6e) \\
&\Longleftrightarrow \big(x = \text{Log}\,(6e)\big) \\
&\Longleftrightarrow (x = 1 + \text{Log}\,6).
\end{aligned}
$$

3. Résolvons dans $\mathbb{R}$ l'équation : $e^{4x} - 3e^{2x} + 2 = 0$.

On a : $\forall x \in \mathbb{R}$, $e^{4x} - 3e^{2x} + 2 = (e^{2x} - 1)(e^{2x} - 2)$.

On a donc :

$$
\begin{aligned}
(e^{4x} - 3e^{2x} + 2 = 0) &\Longleftrightarrow (e^{2x} - 1 = 0 \text{ ou } e^{2x} - 2 = 0) \\
&\Longleftrightarrow \big((e^x)^2 - 1 = 0 \text{ ou } (e^x)^2 - 2 = 0\big) \\
&\Longleftrightarrow \big(e^x = 1 \text{ ou } e^x = \sqrt{2}\big) \\
&\Longleftrightarrow \big(x = 0 \text{ ou } x = \text{Log}\,\sqrt{2}\big).
\end{aligned}
$$

L'ensemble des solutions dans $\mathbb{R}$ de l'équation : $e^{4x} - 3e^{2x} + 2 = 0$ est égal à $\{0, \text{Log}\,\sqrt{2}\}$ ou encore à $\left\{0, \frac{1}{2}\text{Log}\,2\right\}$.

Étude de la fonction $x \longmapsto e^x$.

2.5 • La fonction exponentielle de base e est l'application réciproque de la fonction Log.

De l'étude de la fonction Log, il résulte que l'on a le tableau de variation suivant :

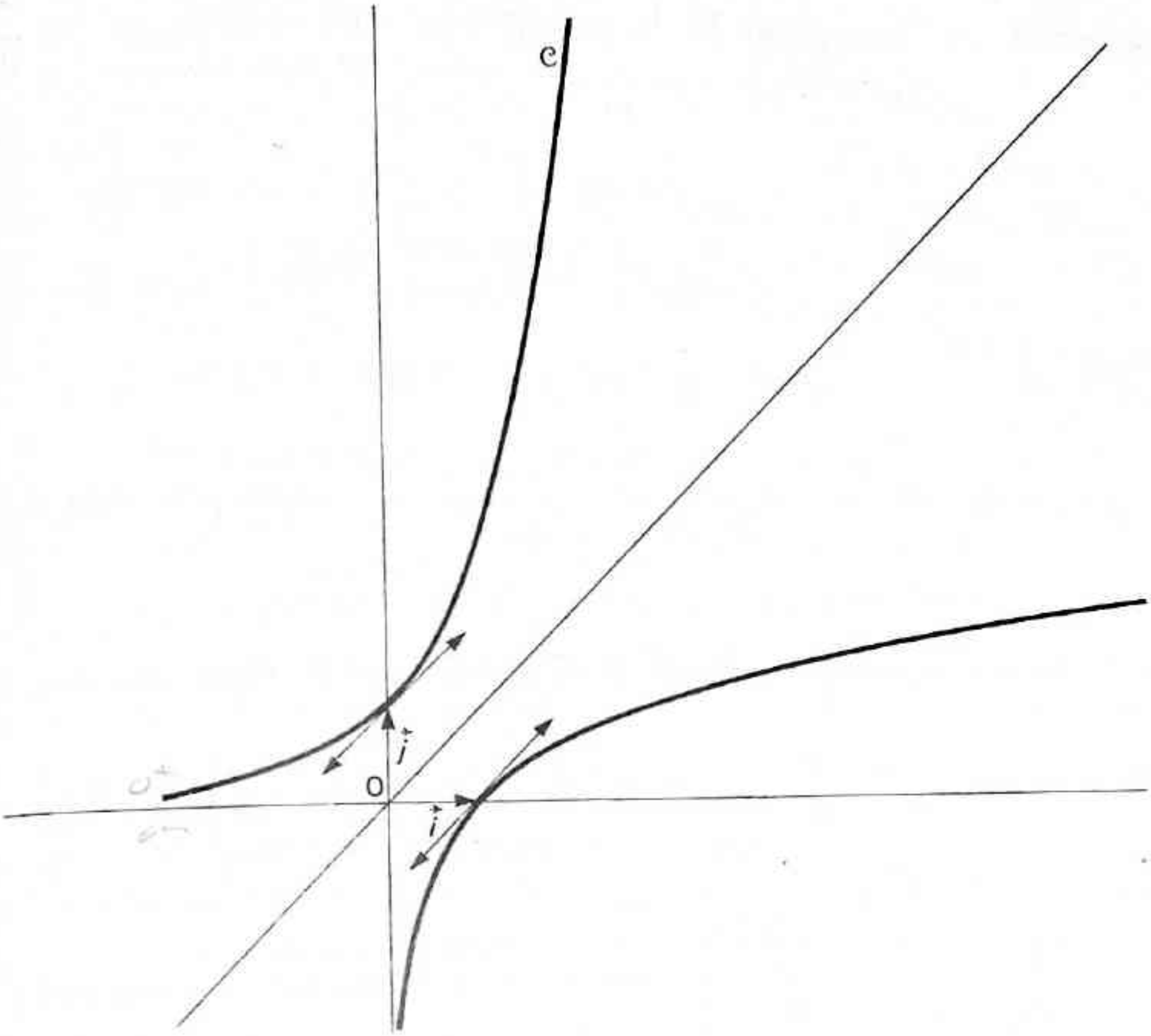
x	$-\infty$	0	$+\infty$
e^x	0	1	$+\infty$

On a donc : $\lim\limits_{x \to +\infty} e^x = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} e^x = 0$.

• De la propriété P_1 du paragraphe 2.3, il résulte que la fonction $x \longmapsto e^x$ est dérivable sur $\mathbb{R}$, de fonction dérivée $x \longmapsto (\text{Log}\,e)e^x$, c'est-à-dire $x \longmapsto e^x$.
La fonction exponentielle de base e est dérivable sur $\mathbb{R}$, de fonction dérivée $x \longmapsto e^x$.

• Puisque la fonction exponentielle de base e est la fonction réciproque de la fonction Log, la courbe représentative $\mathcal{C}$ de la fonction exponentielle de base e et celle de la fonction Log sont symétriques par rapport à la droite d'équation : $y = x$ dans le même repère.

On a donc la courbe représentative suivante :



• Étudions les branches infinies de la courbe $\mathcal{C}$.
De la proposition : $\lim\limits_{x \to -\infty} e^x = 0$, il résulte que **la droite d'équation : $y = 0$ est asymptote à la courbe** $\mathcal{C}$.

D'autre part, cherchons si la fonction $x \longmapsto \dfrac{e^x}{x}$ admet une limite en $+\infty$.

On a : $\forall x \in \mathbb{R}$, $x = \text{Log } e^x$; la fonction $x \longmapsto \dfrac{e^x}{x}$ est donc la composée de la fonction $x \longmapsto e^x$ et de la fonction $x \longmapsto \dfrac{x}{\text{Log } x}$.

La fonction $x \longmapsto e^x$ admet une limite en $+\infty$ égale à $+\infty$.

La fonction $x \longmapsto \dfrac{\text{Log } x}{x}$ admet une limite en $+\infty$ égale à 0 et on a :

$\forall x \in]1, +\infty[$, $\dfrac{\text{Log } x}{x} > 0$. Par suite la fonction $x \longmapsto \dfrac{x}{\text{Log } x}$ admet une limite en $+\infty$ égale à $+\infty$.

De la propriété P_3 du paragraphe 3.13 du chapitre 5, il résulte alors que la fonction $x \longmapsto \dfrac{e^x}{x}$ admet une limite en $+\infty$, égale à $+\infty$.

On a : $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^x}{x} = +\infty$.

La courbe $\mathcal{C}$ admet donc une **branche parabolique de direction** Oy.

Limites où intervient la fonction $x \longmapsto e^x$.

2.6 • Dans le paragraphe 2.5, nous avons démontré les résultats suivants :

$$\lim_{x \to +\infty} e^x = +\infty \qquad \lim_{x \to -\infty} e^x = 0 \qquad \lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$$

• Cherchons si la fonction $x \longmapsto xe^x$ admet une limite en $-\infty$.
La fonction $x \longmapsto xe^x$ est la composée de la fonction $x \longmapsto e^x$ et de la fonction $x \longmapsto x \operatorname{Log} x$.
La fonction $x \longmapsto e^x$ admet une limite en $-\infty$ égale à 0 et on a : $\forall x \in \mathbb{R},\ e^x > 0$.
La fonction $x \longmapsto x \operatorname{Log} x$ admet une limite à droite en 0 égale à 0.
De la proposition P_2 du paragraphe 3.13 du chapitre 5, il résulte alors que la fonction $x \longmapsto xe^x$ admet une limite en $-\infty$ égale à 0.

On a : $\boxed{\lim_{x \to -\infty} xe^x = 0}$.

• La fonction exponentielle de base e est dérivable sur $\mathbb{R}$, donc dérivable en 0, de nombre dérivé égal à 0.

On a donc : $\lim_{x \to 0} \dfrac{e^x - e^0}{x - 0} = 1$, c'est-à-dire : $\boxed{\lim_{x \to 0} \dfrac{e^x - 1}{x} = 1}$

Exemple.

Cherchons si la fonction : $x \longmapsto xe^{\frac{1}{x}}$ admet une limite en 0.
L'ensemble de définition de cette fonction est $\mathbb{R}^*$; nous distinguons donc deux cas : $x < 0$ et $x > 0$.

La fonction : $x \longmapsto \dfrac{1}{x}$ admet une limite à gauche en 0 égale à $-\infty$.

La fonction : $x \longmapsto e^{\frac{1}{x}}$ admet donc une limite à gauche en 0 égale à 0.

Des égalités : $\lim_{\substack{x \to 0 \\ x<0}} x = 0$ et $\lim_{\substack{x \to 0 \\ x<0}} e^{\frac{1}{x}} = 0$, il résulte : $\lim_{\substack{x \to 0 \\ x<0}} xe^{\frac{1}{x}} = 0$.

Si x est positif, nous remarquons que l'on a : $\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ xe^{\frac{1}{x}} = \dfrac{e^{\frac{1}{x}}}{\frac{1}{x}}$

La fonction $x \longmapsto \dfrac{1}{x}$ admet une limite à droite en 0, égale à $+\infty$.

La fonction $x \longmapsto \dfrac{e^x}{x}$ admet une limite en $+\infty$, égale à $+\infty$.

La fonction $x \longmapsto \dfrac{e^{\frac{1}{x}}}{\frac{1}{x}}$ admet donc une limite à droite en 0 égale à $+\infty$.

On a : $\lim_{\substack{x \to 0 \\ x>0}} xe^{\frac{1}{x}} = +\infty$.

Nous avons donc : $\lim_{\substack{x \to 0 \\ x<0}} xe^{\frac{1}{x}} = 0$ et $\lim_{\substack{x \to 0 \\ x>0}} xe^{\frac{1}{x}} = +\infty$.

Il en résulte que la fonction $x \longmapsto xe^{\frac{1}{x}}$ n'a pas de limite en 0.

Autres fonctions exponentielles.

2.7 Soit a un réel strictement positif différent de 1.

• La fonction exponentielle de base a est l'application réciproque de la fonction $\log_a$.
On a donc les deux tableaux de variation suivants :

$a > 1$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
a^x	$0 \nearrow$	1	$\nearrow +\infty$

$0 < a < 1$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
a^x	$+\infty \searrow$	1	$\searrow 0$

• De la propriété P_1 du paragraphe 2.3, il résulte que la fonction $x \longmapsto a^x$ est dérivable sur $\mathbb{R}$, de fonction dérivée $x \longmapsto a^x \operatorname{Log} a$.

• Puisque la fonction exponentielle de base a est la fonction réciproque de la fonction $\log_a$ la courbe représentative $\mathcal{C}_a$ de la fonction exponentielle de base a et celle de la fonction $\log_a$ sont symétriques par rapport à la droite d'équation : $y = x$ dans un même repère orthonormé.

• Étudions les branches infinies de la courbe $\mathcal{C}_a$.

Si l'on a : $a > 1$ (resp. $0 < a < 1$), de la proposition : $\lim\limits_{x \to -\infty} a^x = 0$ (resp. $\lim\limits_{x \to +\infty} a^x = 0$),

il résulte que **la droite d'équation : $y = 0$ est asymptote à $\mathcal{C}_a$.**

D'autre part, si l'on a : $a > 1$, on a :

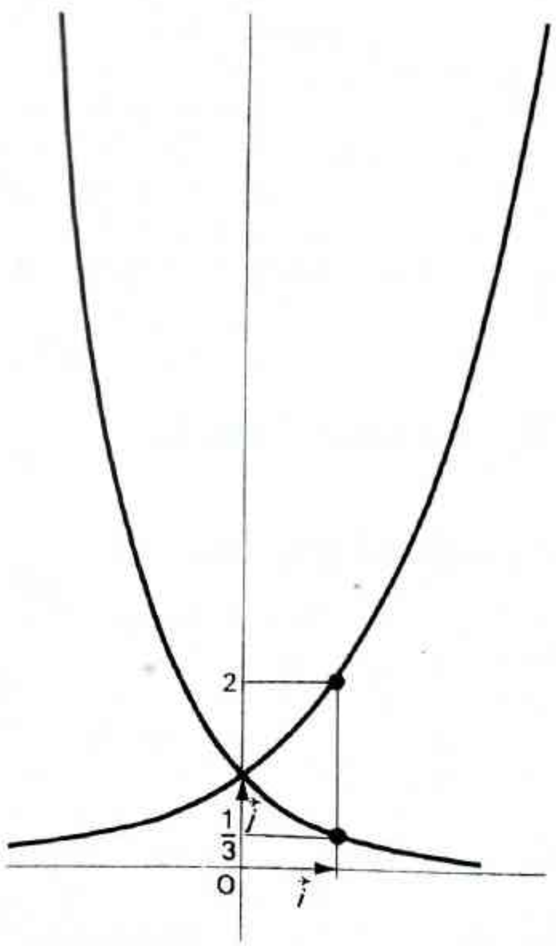
$$\lim_{x \to +\infty} \frac{a^x}{x} = \lim_{x \to +\infty} \operatorname{Log} a \cdot \frac{e^{x \operatorname{Log} a}}{x \operatorname{Log} a} = +\infty$$

et si l'on a : $0 < a < 1$, on a :

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{a^x}{x} = \lim_{x \to -\infty} \operatorname{Log} a \cdot \frac{e^{x \operatorname{Log} a}}{x \operatorname{Log} a} = -\infty.$$

La courbe $\mathcal{C}_a$ admet donc une **branche parabolique de direction** Oy.

La figure ci-contre représente les courbes $\mathcal{C}_{\frac{1}{3}}$ et $\mathcal{C}_2$.



Caractérisation des fonctions exponentielles.

De même que pour les fonctions logarithmiques, on a le théorème suivant :

2.8 THÉORÈME : **L'ensemble des fonctions exponentielles est l'ensemble des isomorphismes dérivables de $(\mathbb{R}, +)$ sur $(\mathbb{R}_+^*, \times)$.**

Démonstration :

Il résulte de la définition 2.1 et des propriétés P_1 et P_2 du paragraphe 2.3 que toute fonction exponentielle est un isomorphisme dérivable de $(\mathbb{R}, +)$ sur $(\mathbb{R}_+^*, \times)$.
Il suffit donc de démontrer que tout isomorphisme dérivable de $(\mathbb{R}, +)$ sur $(\mathbb{R}_+^*, \times)$ est une fonction exponentielle.

Soient donc f un isomorphisme dérivable quelconque de $(\mathbb{R}, +)$ sur $(\mathbb{R}_+^*, \times)$ et f^{-1} la bijection réciproque de f. Du théorème 2.2, il résulte que f^{-1} est un isomorphisme de $(\mathbb{R}_+^*, \times)$ sur $(\mathbb{R}, +)$.

Démontrons que f^{-1} est dérivable en tout point de $\mathbb{R}_+^*$; pour cela il suffit de démontrer que la fonction dérivée f' de f sur $\mathbb{R}$ ne s'annule en aucun point de $\mathbb{R}$.

Soit x un réel quelconque. La fonction $g : \; y \longmapsto f(x + y)$, définie sur $\mathbb{R}$ est égale à la fonction $h : \; y \longmapsto f(x)\,f(y)$. La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$; il en est donc de même des fonctions g et h. On a :

$\forall y \in \mathbb{R}, \quad g'(y) = f'(x + y)$ et

$\forall y \in \mathbb{R}, \quad h'(y) = f(x)\,.f'(y).$

Nous en déduisons : $\forall y \in \mathbb{R}, \quad f'(x + y) = f(x)\,f'(y).$

Il en résulte : $\forall x \in \mathbb{R}, \quad f'(x) = f(x)\,.f'(0).$

Si le réel $f'(0)$ était nul, la fonction f' serait égale à la fonction nulle, et, par suite, la fonction f serait une fonction constante sur $\mathbb{R}$.

Or f est une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}_+^*$; le réel $f'(0)$ n'est donc pas nul.

D'autre part on a : $\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) > 0;$ on a donc : $\forall x \in \mathbb{R}, \quad f'(x) \neq 0.$

La fonction f^{-1} est donc un isomorphisme dérivable de $(\mathbb{R}_+^*, \times)$ sur $(\mathbb{R}, +)$. Du théorème 1.10, il résulte que f^{-1} est une fonction logarithmique; la fonction f est donc une fonction exponentielle. ■

3. Applications.

Calcul de primitives.

3.1 • Soit f une fonction définie sur un sous-ensemble D de $\mathbb{R}$ et satisfaisant aux propriétés suivantes :

$$\begin{cases} \forall x \in D, \quad f(x) \neq 0 \\ f \text{ est dérivable sur tout intervalle contenu dans D.} \end{cases}$$

Considérons la fonction $g : \; x \longmapsto \mathrm{Log}\,|f(x)|$, que nous notons aussi $\mathrm{Log} \circ |f|$.
La fonction g est définie sur D. Étudions la dérivabilité de g.
Soit D_1 (resp. D_2) l'ensemble défini par :

$D_1 = \{x \in D \mid f(x) > 0\}$ (resp. $D_2 = \{x \in D \mid f(x) < 0\}$).

On a alors : $\forall x \in D_1, \quad g(x) = \mathrm{Log}\,f(x)$ et $\forall x \in D_2, \quad g(x) = \mathrm{Log}\,(-f(x)).$

La fonction f est dérivable sur tout intervalle contenu dans D, donc sur tout intervalle contenu dans D_1; la fonction Log est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$. La fonction g est donc dérivable sur tout intervalle contenu dans D_1, de fonction dérivée g' définie par : $\forall x \in D_1, \quad g'(x) = f'(x) \cdot \dfrac{1}{f(x)} = \dfrac{f'(x)}{f(x)}$.

De même la fonction $-f$ est dérivable sur tout intervalle contenu dans D, donc sur tout intervalle contenu dans D_2; la fonction Log est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$. La fonction g est donc dérivable sur tout intervalle contenu dans D_2, de fonction dérivée g' définie par : $\forall x \in D_2, \quad g'(x) = -f'(x) \cdot \dfrac{1}{-f(x)} = \dfrac{f'(x)}{f(x)}$.

Finalement la fonction g est dérivable sur tout intervalle contenu soit dans D_1, soit dans D_2 de fonction dérivée g' définie par : $\forall x \in D, \quad g'(x) = \dfrac{f'(x)}{f(x)}$,

c'est-à-dire : $\boxed{\forall x \in D, \quad (\mathrm{Log} \circ |f|)'(x) = \dfrac{f'(x)}{f(x)}}$

Cette propriété permet de déterminer les primitives de certaines fonctions.

Remarque : La fonction g est en fait dérivable sur tout intervalle contenu dans D car tout intervalle contenu dans D est contenu soit dans D_1, soit dans D_2 : s'il existait un intervalle I inclus dans D qui contienne un point x_1 de D_1 et un point x_2 de D_2, on aurait, $f(x_1) > 0$ et $f(x_2) < 0$; la fonction f est dérivable sur I, elle est donc continue sur I et par suite, d'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existerait un point y de I tel que $f(y) = 0$ ce qui est contraire à l'hypothèse faite sur la fonction f.

Exemples.

1. La fonction $f : x \longmapsto \dfrac{1}{x+1}$ est définie sur $\mathbb{R} - \{-1\}$. Cette fonction est continue sur $]-\infty, -1[$ et sur $]-1, +\infty[$; elle est donc intégrable sur chacun de ces intervalles.
Une primitive sur chacun des intervalles précédents de la fonction f est la fonction $x \longmapsto \mathrm{Log}\,|x+1|$ définie sur $\mathbb{R} - \{-1\}$.

2. La fonction tg : $x \longmapsto \mathrm{tg}\, x$ est définie sur $\mathbb{R} - \left\{\dfrac{\pi}{2} + k\pi, \ k \in \mathbb{Z}\right\}$.
Soit k un entier rationnel quelconque.
La fonction tg est continue et par suite intégrable sur $\left]-\dfrac{\pi}{2} + k\pi, \dfrac{\pi}{2} + k\pi\right[$.
On a : $\forall x \in \left]-\dfrac{\pi}{2} + k\pi, \dfrac{\pi}{2} + k\pi\right[, \quad \mathrm{tg}\, x = \dfrac{\sin x}{\cos x} = -\dfrac{(\cos)'(x)}{\cos x}$.
Une primitive de la fonction $x \longmapsto \mathrm{tg}\, x$ sur $\left]-\dfrac{\pi}{2} + k\pi, \dfrac{\pi}{2} + k\pi\right[$ est donc la fonction $x \longmapsto -\mathrm{Log}\,|\cos x|$.

3. Soit la fonction $f : x \longmapsto \dfrac{2x+1}{2(x^2+x+3)}$.
De la proposition : $(\forall x \in \mathbb{R}, \quad x^2 + x + 3 > 0)$, il résulte que la fonction f est définie sur $\mathbb{R}$. Cette fonction est continue sur $\mathbb{R}$.
La fonction $x \longmapsto 2x + 1$ est la fonction dérivée de la fonction $x \longmapsto x^2 + x + 3$, dérivable sur $\mathbb{R}$. Une primitive de la fonction f sur $\mathbb{R}$ est donc la fonction $g : x \longmapsto \dfrac{1}{2}\mathrm{Log}\,(x^2 + x + 3)$, c'est-à-dire : $g : x \longmapsto \mathrm{Log}\sqrt{x^2 + x + 3}$.

3.2 • Soit f une fonction définie sur une réunion D d'intervalles disjoints de $\mathbb{R}$ et dérivable sur tout intervalle contenu dans D.

Considérons la fonction g : $x \longmapsto e^{f(x)}$, notée encore $\exp_e \circ f$.

La fonction g est définie sur D. Étudions la dérivabilité de g.

La fonction $\exp_e$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et la fonction f est dérivable sur tout intervalle contenu dans D.

La fonction g est donc dérivable sur tout intervalle contenu dans D, de fonction dérivée g' définie par : $\forall x \in D, \quad g'(x) = f'(x)\, e^{f(x)}$,

c'est-à-dire : $\boxed{\forall x \in D, \quad (\exp_e \circ f)'(x) = f'(x)\, e^{f(x)}}$

Cette propriété permet de déterminer les primitives de certaines fonctions.

Exemples.

1. Soit la fonction $x \longmapsto xe^{x^2}$, définie et continue sur $\mathbb{R}$.

On a : $\forall x \in \mathbb{R}, \quad xe^{x^2} = \frac{1}{2}(2xe^{x^2})$.

Une primitive de la fonction $x \longmapsto xe^{x^2}$ sur $\mathbb{R}$ est donc la fonction $x \longmapsto \frac{1}{2}e^{x^2}$.

2. Soit la fonction $x \longmapsto (2x-1)e^{x^2-x+1}$, définie et continue sur $\mathbb{R}$.

La fonction $x \longmapsto x^2 - x + 1$ est dérivable sur $\mathbb{R}$, de fonction dérivée $x \longmapsto 2x - 1$.

Une primitive sur $\mathbb{R}$ de la fonction $x \longmapsto (2x-1)e^{x^2-x+1}$ sur $\mathbb{R}$ est donc la fonction $x \longmapsto e^{x^2-x+1}$.

3. Soit la fonction $x \longmapsto x^2\, 2^{x^3}$, définie et continue sur $\mathbb{R}$.

On a : $\forall x \in \mathbb{R}, \quad x^2\, 2^{x^3} = x^2 e^{x^3 \operatorname{Log} 2} = \dfrac{3x^2 \operatorname{Log} 2\, e^{x^3 \operatorname{Log} 2}}{3 \operatorname{Log} 2}$.

Une primitive de la fonction $x \longmapsto x^2\, 2^{x^3}$ sur $\mathbb{R}$ est donc la fonction $x \longmapsto \dfrac{1}{3 \operatorname{Log} 2}\, 2^{x^3}$.

✲ Étude de la fonction $x \longmapsto x^\alpha$.

3.3 Dans le chapitre 6 nous avons étudié, pour tout nombre rationnel r, la fonction $x \longmapsto x^2$; cette fonction est définie sur $]0, +\infty[$.

Plus généralement, soit α un réel quelconque. Étudions la fonction f_α : $x \longmapsto x^\alpha$.

Si $\alpha = 0$, on a : $\forall x \in \mathbb{R}^*, \quad x^\alpha = 1$, et si $\alpha = 1$, on a : $\forall x \in \mathbb{R}, \quad x^\alpha = x$. Nous supposons désormais que l'on a : $\alpha \neq 0$ et $\alpha \neq 1$.

• De la propriété P_5 du paragraphe 2.3, il résulte que l'on a :

$\forall x \in \mathbb{R}_+^* - \{1\}, \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}, \quad x^\alpha = e^{\alpha \operatorname{Log} x}$. D'autre part, on a : $\forall \alpha \in \mathbb{R}, \quad 1^\alpha = 1$.

L'ensemble de définition de la fonction f_α est donc $]0, +\infty[$.

• La fonction $x \longmapsto \operatorname{Log} x$ est dérivable sur $]0, +\infty[$, de fonction dérivée $x \longmapsto \dfrac{1}{x}$.

La fonction $x \longmapsto e^x$ est dérivable sur $\mathbb{R}$, de fonction dérivée $x \longmapsto e^x$.

La fonction f_α est donc dérivable, et par suite continue, sur $]0, +\infty[$, de fonction dérivée f'_α définie par : $\forall x \in]0, +\infty[, \quad f'_\alpha(x) = \dfrac{\alpha}{x} e^{\alpha \operatorname{Log} x} = \dfrac{\alpha x^\alpha}{x}$,

c'est-à-dire : $\forall x \in]0, +\infty[, \quad f'_\alpha(x) = \alpha x^{\alpha - 1}$.

On retrouve la même expression de la fonction dérivée que pour α rationnel.
Pour étudier le sens de variation de f_α, il faut donc distinguer deux cas : $\alpha > 0$ et $\alpha < 0$.
Si on a : $\alpha > 0$, on a alors : $\forall x \in]0, +\infty[$, $f'_\alpha(x) > 0$; la fonction f_α est donc strictement croissante sur $]0, +\infty[$.
Si on a : $\alpha < 0$, on a alors : $\forall x \in]0, +\infty[$, $f'_\alpha(x) < 0$; la fonction f_α est donc strictement décroissante sur $]0, +\infty[$.

• Cherchons si la fonction f_α admet une limite en $+\infty$.
La fonction $x \longmapsto \operatorname{Log} x$ admet une limite en $+\infty$, égale à $+\infty$.
Si α est positif, on a : $\forall x \in]1, +\infty[$, $\alpha \operatorname{Log} x > 0$.
Si α est négatif, on a : $\forall x \in]1, +\infty[$, $\alpha \operatorname{Log} x < 0$.
La fonction $x \longmapsto e^x$ admet une limite en $+\infty$, égale à $+\infty$ et une limite en $-\infty$ égale à 0.
La fonction $x \longmapsto e^{\alpha \operatorname{Log} x}$ admet donc une limite en $+\infty$, égale à $+\infty$ si α est positif, égale à 0 si α est négatif.

• Cherchons si la fonction f_α admet une limite à droite en 0.
La fonction $x \longmapsto \operatorname{Log} x$ admet une limite à droite en 0, égale à $-\infty$.
Si α est positif, on a : $\forall x \in]0, 1[$, $\alpha \operatorname{Log} x < 0$.
Si α est négatif, on a : $\forall x \in]0, 1[$, $\alpha \operatorname{Log} x > 0$.
La fonction $x \longmapsto e^x$ admet une limite en $-\infty$, égale à 0 et une limite en $+\infty$, égale à $+\infty$.
La fonction $x \longmapsto e^{\alpha \operatorname{Log} x}$ admet donc une limite à droite en 0, égale à 0 si α est positif, égale à $+\infty$ si α est négatif.

• On a donc les deux tableaux de variation suivants :

$\alpha > 0 \quad (\alpha \neq 1)$

x	0	$+\infty$
$f'_\alpha(x)$	‖	$+$
$f_\alpha(x)$	‖ 0	$\nearrow +\infty$

$\alpha < 0$

x	0	$+\infty$
$f'_\alpha(x)$	‖	$-$
$f_\alpha(x)$	‖ $+\infty$	$\searrow 0$

• **Supposons que l'on ait : $\alpha > 0 \quad (\alpha \neq 1)$.**

Considérons la fonction g_α définie par :

$$\begin{cases} \forall x \in]0, +\infty[, & g_\alpha(x) = f_\alpha(x) \\ & g_\alpha(0) = 0. \end{cases}$$

La fonction g_α est donc définie sur $[0, +\infty[$.
De la proposition : $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} f_\alpha(x) = 0$, il résulte que g_α est un prolongement par continuité en 0 de f_α.

Étudions la dérivabilité de g_α en 0.

On a : $\forall x \in]0, +\infty[, \quad \dfrac{g_\alpha(x) - g_\alpha(0)}{x - 0} = \dfrac{f_\alpha(x)}{x} = \dfrac{x^\alpha}{x} = x^{\alpha-1}$.

De l'étude de la limite de f_α à droite en 0, il résulte que l'on a :

$\forall \alpha \in]0, 1[, \quad \lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} x^{\alpha-1} = +\infty \quad$ et $\quad \forall \alpha \in]1, +\infty[, \quad \lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} x^{\alpha-1} = 0.$

La courbe représentative de g_α admet donc en O une demi-tangente, portée par Oy si α est élément de $]0, 1[$, portée par Ox si α est élément de $]1, +\infty[$.

Étudions la branche infinie, et pour cela cherchons si la fonction $x \longmapsto \dfrac{x^\alpha}{x}$ admet une limite en $+\infty$.

On a : $\forall x \in]0, +\infty[, \quad \dfrac{x^\alpha}{x} = x^{\alpha-1}$.

De l'étude de la limite de f_α en $+\infty$, il résulte que l'on a :

$\forall \alpha \in]0, 1[, \quad \lim\limits_{x \to +\infty} x^{\alpha-1} = 0$

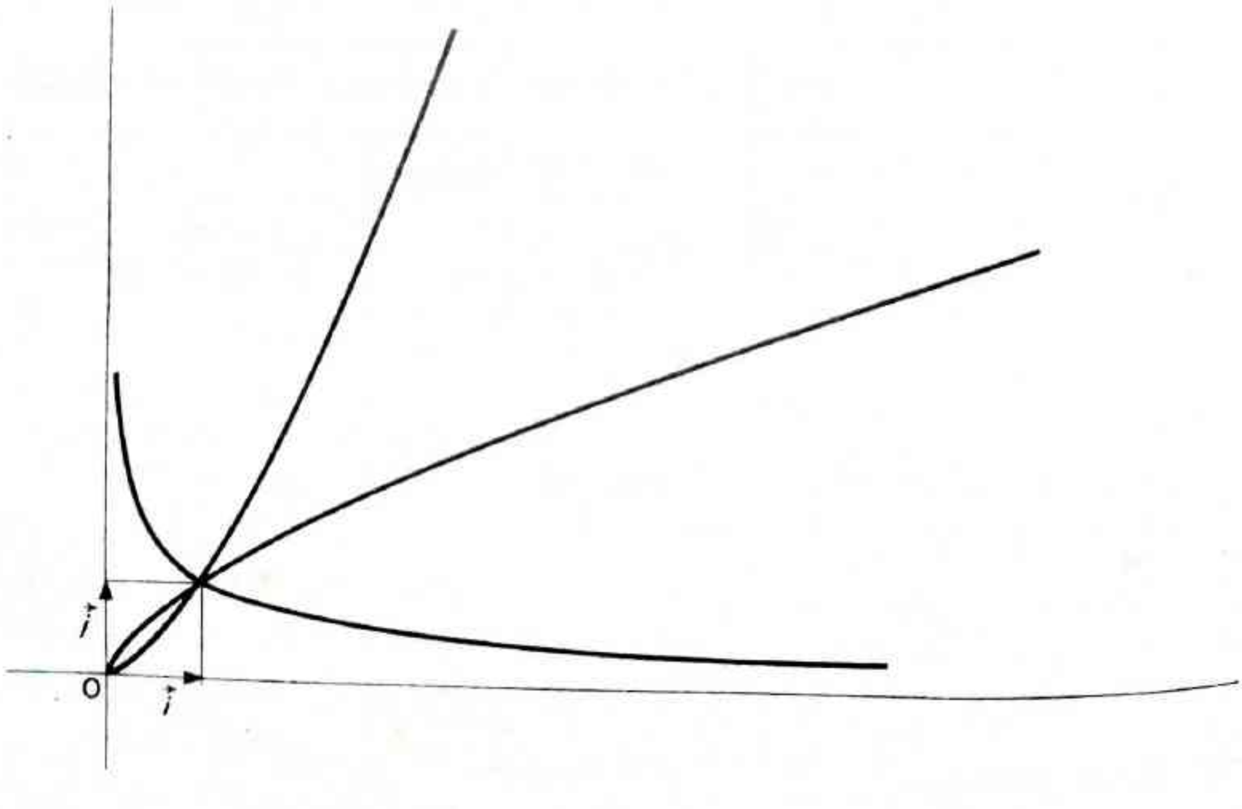
$\forall \alpha \in]1, +\infty[, \quad \lim\limits_{x \to +\infty} x^{\alpha-1} = +\infty.$

La courbe représentative de f_α admet donc une branche parabolique de direction Ox si on a : $\alpha \in]0, 1[$ (resp. de direction Oy si on a : $\alpha \in]1, +\infty[$).

• **<u>Supposons que l'on ait : $\alpha < 0$.</u>**

Des propositions : $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} f_\alpha(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} f_\alpha(x) = 0$, il résulte que les droites d'équations respectives : $x = 0$ et $y = 0$ sont asymptotes à la courbe représentative de f_α.

• On a donc les courbes représentatives suivantes dans un repère orthonormé : pour $\alpha = \dfrac{2}{3}$, $\alpha = \dfrac{3}{2}$ et $\alpha = -\dfrac{1}{2}$.



Calcul numérique.

Généralités.

3.4 Il résulte des propriétés P_2 et P_5 du paragraphe 1.2 et de l'étude faite dans le paragraphe 1.7 que toute fonction logarithmique est une bijection de $\mathbb{R}_+^*$ sur $\mathbb{R}$ qui transforme les produits en sommes et les élévations à une puissance en produits.
Techniquement, il est plus facile d'effectuer une addition (resp. un produit par un rationnel) qu'une multiplication (resp. une élévation à une puissance).
L'usage des logarithmes simplifie donc le calcul numérique.
Il existe deux applications principales des logarithmes au calcul numérique : les tables de logarithmes et les règles et cercles à calcul.
Chaque table, chaque règle a sa notice d'utilisation propre; nous conseillons au lecteur de les lire attentivement.
Dans les paragraphes suivants nous indiquons sommairement le principe de l'usage d'une table de logarithmes et d'une règle à calcul.

Usage des tables de logarithmes.

3.5 Il existe des tables qui donnent les logarithmes népériens, mais, pour le calcul numérique, on utilise en général les logarithmes décimaux.
Soit x un nombre réel strictement positif.

• On appelle **caractéristique** de $\log x$, l'entier rationnel $E(\log x)$; on appelle **mantisse de** $\log x$, le réel $\log x - E(\log x)$.
Des inégalités : $E(\log x) \leqslant \log x < E(\log x) + 1$, il résulte que l'on a :
$0 \leqslant \log x - E(\log x) < 1$.
Par suite, la mantisse s'écrit, dans le système décimal, sous la forme 0, ...

• **Pour déterminer la caractéristique** n **de** $\log x$, on fait l'observation suivante : puisque la fonction log est strictement croissante, on a l'équivalence :
$(n \leqslant \log x < n + 1) \iff (10^n \leqslant x < 10^{n+1})$.
Par suite, si x est supérieur à 1, l'entier rationnel n est égal au nombre de chiffres, diminué de 1, de la partie entière du réel x écrit dans le système décimal; si x est inférieur à 1, l'entier rationnel n est négatif et sa valeur absolue est égale au rang du premier chiffre non nul qui figure après la virgule dans l'écriture décimale de x.

• **Pour déterminer la mantisse de** $\log x$, on remarque d'abord que, si x et y sont deux réels strictement positifs et s'il existe un entier rationnel m qui satisfait à :

$y = 10^m x$, on a alors : $\begin{cases} \log y = m + \log x \\ E(\log y) = m + E(\log x) \end{cases}$

et par suite :
$\log y - E(\log y) = (m + \log x) - (m + E(\log x)) = \log x - E(\log x)$.
Les logarithmes de deux réels strictement positifs dont le rapport est une puissance de 10 ont donc la même mantisse.
Les tables donnent en général les cinq premières décimales des mantisses des logarithmes des entiers naturels successifs de 1 000 à 9 999; les logarithmes de ces entiers sont alors connus à 5.10^{-6} près.
Si x est le produit d'une puissance de 10 par un tel entier, on obtient la mantisse de $\log x$ par simple lecture de la table.

Si x n'est pas le produit d'une puissance de 10 par un tel entier, il existe un entier rationnel m et un entier x_1 compris entre 1 000 et 9 999 tel que l'on ait : $x_1 < 10^m x < x_1 + 1$.
Posons $y = 10^m x$; les réels x et y ont la même mantisse et il résulte de la croissance de la fonction log que l'on a : $\log x_1 < \log y < \log (x_1 + 1)$.
On démontre et nous admettons que l'erreur commise en déterminant $\log y$ par interpolation linéaire (voir cours de Première) est inférieure à $M \cdot \frac{1}{x_1 (x_1 + 1)}$.
On a : $M = \frac{1}{\operatorname{Log} 10} < 0{,}5, \quad x_1 \geqslant 10^3, \quad (x_1 + 1) > 10^3$
Par suite l'erreur commise est inférieure à $0{,}5.10^{-6} = 5.10^{-7}$.
On obtient donc bien par interpolation linéaire les cinq premières décimales de la mantisse de $\log y$ et par suite celles de $\log x$.

- Il est commode d'introduire le cologarithme de x.

On appelle **cologarithme de** x et on note colog x le réel $\log \frac{1}{x}$ égal à $- \log x$.

Soient respectivement c et m la caractéristique et la mantisse de $\log x$.
On a : $\operatorname{colog} x = - c - m$, et : $-1 < - m < 0$, et par suite :
$\operatorname{colog} \; x = (- c - 1) + (1 - m)$ et $0 < 1 - m < 1$.
La mantisse de colog x est donc $1 - m$ et sa caractéristique est $- c - 1$.

- **Dans le cas où la caractéristique** n **de log** x **est négative,** si $0{,}abcde$ est la mantisse de $\log x$, et si n' est la valeur absolue de n, on a :
$n' = - n, \quad n' > 0$ et $\log x = - n' + 0{,}abcde$. On note alors :
$\log x = \overline{n'}{,}abcde$ pour indiquer que le signe $-$ ne porte que sur la caractéristique.
- Soient x, y, z, t quatre réels strictement positifs et r, r' deux rationnels strictement positifs. Pour calculer le réel $A = \frac{x\,y^r}{z\,t^{r'}}$, il est souvent commode de calculer log A.

On a : $\log A = \log x + r \log y + \operatorname{colog} z + r' \operatorname{colog} t$.
On dispose en général les calculs de la manière suivante :

calculs auxiliaires	*calculs définitifs*
$\log y \;=$	$\log x \;=$
$\log z \;=$	$r \log y \;=$
$\log t \;=$	$\operatorname{colog} z \;=$
$\operatorname{colog} t =$	$r' \operatorname{colog} t =$
calcul de A.	$\log A =$
	$A =$

- Nous donnons quelques exemples de recherche de logarithmes et de calculs numériques faits à l'aide des logarithmes; nous avons utilisé la table de logarithmes à cinq décimales Bouvart et Ratinet. Pour plus de détails, nous conseillons au lecteur de lire la notice de cette table.

Exemples.

1. Calculons le logarithme décimal de $x = 0{,}0008417$ et celui de $y = 8417$.

La caractéristique de $\log x$ (resp. $\log y$) est $\overline{4}$ (resp. 3). On lit la partie décimale de la mantisse dans la table.

On a donc : $\log x = \overline{4}{,}92516$ et $\log y = 3{,}92516$.

2. Déterminons le logarithme décimal de $x = 32{,}305$.
Nous lisons dans la table le logarithme décimal de 32,30 et celui de 32,31. Nous utilisons alors la méthode d'interpolation linéaire. Il est d'usage de disposer les calculs de la manière suivante :

$$\begin{array}{ll} & \log 32{,}30 \;\;= 1{,}50920 \\ D = 14 & \underline{\qquad\quad 5 \qquad\qquad\quad 7} \\ & \log 32{,}305 = 1{,}50927. \end{array}$$

3. Déterminons une valeur approchée du réel x tel que : $\log x = \bar{3}{,}50420$. Par lecture de la table, nous avons : $\log 3{,}193 = 0{,}50420$. Nous avons donc, avec la meilleure précision permise par la table : $x = 0{,}0031930$, à 10^{-7} près.
4. Déterminons une valeur approchée du réel x dont le logarithme est 2,24175.
Par lecture de la table, nous avons : $\log 174{,}4 = 2{,}24155$.
Nous utilisons alors la méthode d'interpolation linéaire; il est d'usage de disposer les calculs de la manière suivante :

$$\begin{array}{ll} & \log 174{,}4 \;\;= 2{,}24155 \\ D = 25 & \underline{\qquad\quad 8 \qquad\qquad\quad 20} \\ & \log 174{,}48 = 2{,}24175. \end{array}$$

Nous avons donc, avec la meilleure précision permise par la table : $x = 174{,}48$, à 10^{-2} près.

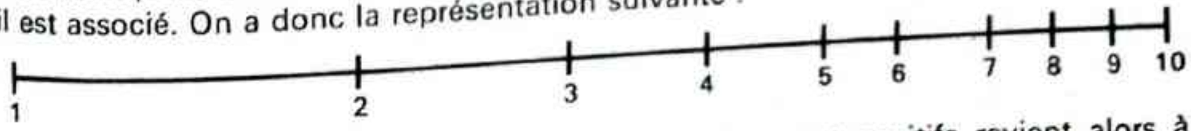
5. Déterminons une valeur approchée à 10^{-5} près du réel $A = \dfrac{\pi \sqrt[3]{241}}{327}$.

Calculs auxiliaires	*Calculs définitifs*
$\log 241 = 2{,}38202$	$\log \pi = 0{,}49715$
$\log 327 = 2{,}51455$	$\frac{1}{3} \log 241 = 0{,}79400$
	$\operatorname{colog} 327 = \bar{3}{,}48545$
$\log 0{,}05978 = \bar{2}{,}77656 \quad D = 7$	$\log A = \bar{2}{,}77660$
	$A = 0{,}05978.$

Une valeur approchée du réel A à 10^{-5} près est donc $A = 0{,}05978$. La meilleure précision permise par la table donne $A = 0{,}059787$.

Usage des règles à calcul.

3.6 En classe de Première, nous avons décrit une règle à calculs et nous en avons expliqué l'utilisation.
Dans ce paragraphe, nous indiquons le principe à partir duquel est construite une règle à calculs : les échelles qui y figurent sont des **échelles logarithmiques**.
On construit une échelle logarithmique de la manière suivante : sur une droite affine réelle munie d'un repère $(O, \vec{i})$, à tout nombre réel strictement positif x on associe le point d'abscisse $\log x$; on marque ce point sur la droite et le réel x auquel il est associé. On a donc la représentation suivante :



Multiplier (resp. diviser) deux nombres réels strictement positifs revient alors à additionner (resp. soustraire) deux longueurs de segments. Nous avons indiqué les différentes méthodes dans le chapitre 31 du tome 2 de Première.

EXERCICES

Fonctions logarithmiques.

◆ Dans les exercices suivants (nᵒˢ 1 à 9), résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation :

1 $2 \operatorname{Log} x = \operatorname{Log}\left(6 + \sqrt{3}\right) + \operatorname{Log}\left(3 + \sqrt{3 + \sqrt{3}}\right) + \operatorname{Log}\left(3 - \sqrt{3 + \sqrt{3}}\right).$

2 $\operatorname{Log}(x + 3) + \operatorname{Log}(x + 2) = \operatorname{Log}(x + 11).$

3 $\operatorname{Log}(x^2 + 5x + 6) = \operatorname{Log}(x + 11).$

4 $\operatorname{Log}(-x - 2) = \operatorname{Log}\left(\dfrac{-x - 11}{x + 3}\right).$

5 $\operatorname{Log}(x + 2) = \operatorname{Log}(-x - 11) - \operatorname{Log}(x + 3).$

6 $\dfrac{1}{2} \operatorname{Log} 2x = \operatorname{Log}(3 - x) - \operatorname{Log}\sqrt{x + 1}.$

7 $\operatorname{Log}\sqrt{2x - 3} = \operatorname{Log}(6 - x) - \dfrac{1}{2}\operatorname{Log} x.$

8 $\operatorname{Log}(x - 1) + \operatorname{Log}(x - 2) = \operatorname{Log}|4 - x|.$

9 $\log_2(x + 1) + \log_4 x = 1.$

10 Soit a un nombre réel strictement positif et différent de 1.
Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation : $\log_a x > \log_{a^3}(3x - 2).$

11 Résoudre dans $\mathbb{R}^2$ le système suivant :

$$\begin{cases} 2 \log_x y + 2 \log_y x = -5 \\ xy = e. \end{cases}$$

(Baccalauréat 1973.)

12 Résoudre dans $\mathbb{R}^2$ le système suivant :

$$\begin{cases} xy = 256 \\ 7(\log_x y + \log_y x) = 50. \end{cases}$$

13 Soit n un entier rationnel. Soient α un nombre réel strictement positif et k un nombre réel strictement positif différent de 1.

Soit A le réel $\displaystyle\int_{\alpha}^{k\alpha} x^n \, dx.$

1° Déterminer n de façon que A soit indépendant de α.
2° On donne à n la valeur déterminée dans le 1°. Déterminer k de façon que A soit égal à 4.

14 On considère un plan affine réel euclidien P muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$. Soit $\mathcal{C}$ la courbe représentative de la fonction Log dans P.
Montrer que la courbe représentative de la fonction $x \longmapsto \operatorname{Log} 3x$ se déduit de $\mathcal{C}$ par une transformation géométrique simple.

15 Soient un nombre réel a et la fonction f définie par :

$$\begin{cases} \forall x \in \mathbb{R}^*, & f(x) = x^2 \operatorname{Log}|x| - 1 \\ & f(0) = a. \end{cases}$$

1° Démontrer que l'on peut choisir a de façon que f soit continue sur $\mathbb{R}$.

2° On suppose a ainsi choisi; démontrer que la fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$, de fonction dérivée f' continue sur $\mathbb{R}$.

16 Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\begin{cases} \forall x \in]-\infty, -1[, & f(x) = 1 - x^2 \\ \forall x \in [-1, 1], & f(x) = \operatorname{Log}(2 - x^2) \\ \forall x \in]1, +\infty[, & f(x) = \sqrt{\dfrac{x-1}{x+1}}. \end{cases}$$

1° Étudier la continuité de la fonction f.

2° Étudier la dérivabilité de la fonction f, en particulier aux points -1 et 1.

17 Soient a et b deux nombres réels et f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\begin{cases} \forall x \in [e^2, +\infty[, & f(x) = \operatorname{Log} x \\ \forall x \in]-\infty, e^2[, & f(x) = ax + b. \end{cases}$$

1° Peut-on déterminer les réels a et b tels que la fonction f soit continue et dérivable sur $\mathbb{R}$?

2° On donne à a et à b les valeurs trouvées précédemment. Étudier la fonction f et tracer sa courbe représentative dans un repère orthonormé.

(Baccalauréat 1973.)

18 1° Déterminer les nombres réels a et b tels que la fonction :
F : $x \longmapsto x(a \operatorname{Log} x + b)$ soit une primitive sur $]0, +\infty[$ de la fonction :
f : $x \longmapsto -\operatorname{Log} x$.

2° Soit t un élément de $]0, 1[$. Soit $\mathcal{C}$ la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthonormé. Déterminer l'aire $S(t)$ de la partie du plan limitée par l'axe Ox, la courbe $\mathcal{C}$ et les droites d'équations respectives : $x = 1$ et $x = t$.
La fonction $t \longmapsto S(t)$ admet-elle une limite à droite en 0 ? Si oui, calculer cette limite.

20 Soit n un entier naturel non nul.

1° Déterminer la limite en $+\infty$ de la fonction $x \longmapsto \dfrac{\operatorname{Log} x}{x^n}$.

2° Déterminer la limite à droite en 0 de la fonction $x \longmapsto x^n \operatorname{Log} x$.

3° Déterminer la limite en $+\infty$ de la fonction $x \longmapsto \dfrac{\operatorname{Log} x}{\frac{1}{x^n}}$.

4° Déterminer la limite en 0 de la fonction $x \longmapsto \dfrac{\operatorname{Log}(1 + x)}{x^n}$.

21 Soit la fonction f : $x \longmapsto \operatorname{Log}(x^2)$.

1° Étudier la fonction f et tracer sa courbe représentative $\mathcal{C}$ dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

2° Déterminer l'équation de la tangente D à $\mathcal{C}$ au point d'abscisse e.

3° Vérifier que la fonction F : $x \longmapsto x \operatorname{Log}(x^2) - 2x$ est une primitive de la fonction f sur chacun des intervalles où f est définie.

4° Calculer l'aire de la partie du plan limitée par l'axe Ox, la courbe $\mathcal{C}$ et la tangente D.

22 1° Soit la fonction f définie par :
$$\begin{cases} \forall x \in]0, +\infty[, & f(x) = x \operatorname{Log} x \\ & f(0) = 0. \end{cases}$$
Étudier la fonction f et tracer sa courbe représentative $\mathcal{C}$ dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$. On déterminera en particulier les points d'intersection de $\mathcal{C}$ et de Ox.
2° Soit la fonction g définie par :
$$\begin{cases} \forall x \in]0, +\infty[, & g(x) = x^2 \operatorname{Log} x - \dfrac{x^2}{2} \\ & g(0) = 0. \end{cases}$$
La fonction g est-elle dérivable ? Si oui, sur quel intervalle ? Déterminer sa fonction dérivée g'.
3° Soit la fonction h définie par : $\forall x \in \mathbb{R}$, $h(x) = |f(x)|$. Soit $\mathcal{C}'$ la courbe représentative de la fonction h dans le repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$. Calculer l'aire de la boucle déterminée par les courbes $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$.

23 Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}_+$ par :
$$\begin{cases} \forall x \in]0, +\infty[& f(x) = \sqrt{x} \operatorname{Log} x^2 \\ & f(0) = 0. \end{cases}$$
1° Démontrer que l'on a : $\forall x \in]0, +\infty[$, $\quad f(x) = -4 \dfrac{\operatorname{Log} \dfrac{1}{\sqrt{x}}}{\dfrac{1}{\sqrt{x}}}$.

Étudier la continuité de f.
2° Étudier la fonction f et tracer sa courbe représentative dans un repère orthonormé.

24 Soit la fonction $f : x \longmapsto \operatorname{Log} \left| \dfrac{x+1}{x-1} \right|$.
1° Étudier la fonction f et tracer sa courbe représentative dans un repère orthonormé.
2° Soit a un nombre réel. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation : $f(x) = a$.

(Baccalauréat 1973.)

25 Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :
$$\begin{cases} \forall x \in \mathbb{R}^*, & f(x) = x \operatorname{Log} |x| \\ & f(0) = 0. \end{cases}$$
1° La fonction f est-elle continue au point 0 ? Est-elle dérivable en ce point ?
2° Étudier la fonction f et tracer sa courbe représentative $\mathcal{C}$ dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.
3° En utilisant une intégration par parties, déterminer une primitive de la fonction f.
Calculer l'aire de la partie du plan limitée par $\mathcal{C}$, par l'axe Ox et par les droites d'équations respectives : $x = 0$ et $x = 1$.

26 Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}_+$ par :
$$\begin{cases} \forall x \in]0, +\infty[, & f(x) = x \, |\operatorname{Log} x| \\ & f(0) = 0. \end{cases}$$
1° Étudier la continuité et la dérivabilité de la fonction f.
2° Étudier la fonction f et tracer sa courbe représentative $\mathcal{C}$ dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.
3° Soit t un réel de l'intervalle $]0, 1]$.
Calculer, en effectuant une intégration par parties, l'aire $A(t)$ de la partie du plan comprise entre $\mathcal{C}$, l'axe Ox et les droites d'équations respectives : $x = 1$ et $x = t$.
Déterminer la limite éventuelle à droite en 0 de la fonction $t \longmapsto A(t)$.

27 Étudier la fonction $f: x \longmapsto x + 1 + \text{Log}\,\frac{x+2}{x+1}$ et tracer sa courbe représentative $\mathcal{C}$ dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

28 Soit la fonction $f: x \longmapsto \frac{1 + \text{Log}\,x}{x}$.

1° Étudier la fonction f et tracer sa courbe représentative $\mathcal{C}$ dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

2° On désigne par M_1 le point d'intersection de $\mathcal{C}$ et de l'axe Ox, par M_2 le point de $\mathcal{C}$ où la tangente à $\mathcal{C}$ passe par O, par M_3 le point de $\mathcal{C}$ où la tangente est parallèle à Ox, par M_4 le point d'inflexion de $\mathcal{C}$. Soient x_1, x_2, x_3, x_4 les abscisses respectives des points M_1, M_2, M_3, M_4.

Que peut-on dire de la suite x_1, x_2, x_3, x_4 ?

29 Soit la fonction $f: x \longmapsto \text{Log}\,|\text{Log}\,x|$.

Étudier la fonction f et tracer sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

30 Soit la fonction $L_1: x \longmapsto \text{Log}\,x$.

Soient n un entier naturel strictement supérieur à 1 et la fonction

$L_n: x \longmapsto \text{Log}\left(L_{n-1}(x)\right)$.

La fonction L_2, par exemple, est donc la fonction $x \longmapsto \text{Log}\,(\text{Log}\,x)$.

1° Déterminer l'ensemble de définition de chacune des fonctions L_1, L_2, L_3 et plus généralement de L_n, pour tout entier n.

2° Étudier la dérivabilité de la fonction L_n et déterminer, si elle existe, sa fonction dérivée L'_n.

3° Démontrer la proposition suivante :

$$\forall k \in \mathbb{N}^* - \{1\}, \quad 0 < L_2(k+1) - L_2(k) < \frac{1}{k\,\text{Log}\,k}.$$

On pourra appliquer le théorème des accroissements finis à la fonction L_2 (cf. exercice n° 47 du chapitre 7).

4° On pose : $\forall n \in \mathbb{N}^* - \{1\}, \quad S_n = \frac{1}{2\,\text{Log}\,2} + \frac{1}{3\,\text{Log}\,3} + \dots + \frac{1}{n\,\text{Log}\,n}$.

Utiliser le 3° pour démontrer que la suite $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ admet pour limite $+\infty$.

31 Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\begin{cases} \forall x \in \mathbb{R}^*, & f(x) = x^3\,\text{Log}\,|x| \\ & f(0) = 0. \end{cases}$$

1° Étudier la fonction f, en particulier la continuité et la dérivabilité en 0. Tracer sa courbe représentative $\mathcal{C}$ dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

2° Calculer l'aire de la partie du plan limitée par l'axe Ox, la courbe $\mathcal{C}$ et les droites d'équations respectives : $x = \frac{1}{2}$ et $x = 2$.

3° Soit la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\begin{cases} \forall x \in \mathbb{R}^*, & g(x) = x^3\,\text{Log}\,\frac{1}{x^2} \\ & g(0) = 0. \end{cases}$$

Déduire de ce qui précède l'étude de g et tracer sa courbe représentative dans le repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

32 Soit la fonction $f : x \longmapsto \dfrac{x^2}{\text{Log } x^3}$.

Étudier la fonction f et tracer sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

Fonctions exponentielles.

♦ Dans les exercices suivants (nos 33 à 42), résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation :

33 $e^{2x-1} - \sqrt{e^{2x+2}} - 2e^3 = 0.$

34 $2e^{2x+1} + e^{x+1} = e^{1+\text{Log}2}$

35 $2^x + \dfrac{6}{2^x} = 5.$

36 $4^x - 3.2^{x+2} - 2^6 = 0.$

37 $6e^{5x+2} - 7\sqrt{e^{8x+4}} + e^{3x+2} = 0.$

38 $(x^2 - 1)\, e^{\text{Log}(x-2)} = \text{Log}\,(e^{x+1}).$

39 $e^{4x+2} - \dfrac{e^2}{e^{4x+2}} = e^2 - 1.$

40 $4e^{2x} + 15e^{-x} = 19.$

41 $7^{x+\frac{4}{3}} - 5^{3x} = 2\left(7^{x+\frac{1}{3}} + 5^{3x-1}\right).$

42 $2^{2x-1} + 3^x + 4^{x+\frac{1}{2}} - 9^{\frac{x}{2}+1} = 0.$

43 Résoudre dans $\mathbb{R}^2$ le système :
$$\begin{cases} 4^x\, 5^y = 5^{2x+1} \\ 12^x\, 9^y = 5^{2y+1}. \end{cases}$$

44 1° Soit m un nombre réel.
Déterminer, suivant le réel m, le nombre de solutions de l'équation :
$(m-1)\,e^x + me^{-x} = 2m.$

2° Résoudre cette équation dans le cas : $m = \dfrac{1}{4}$.

45 1° Même question que pour le n° 44 avec l'équation :
$e^{2x} + 4me^x - 2m + 2 = 0.$
2° Résoudre cette équation dans le cas : $m = -1.$

46 Soit a un nombre réel.

Résoudre dans $\mathbb{R}^2$ le système : $\begin{cases} e^x\, e^{2y} = a \\ 2xy = 1. \end{cases}$

(Baccalauréat 1973.)

47 Même question que pour le n° 46, avec : $\begin{cases} e^x e^y = a^2 \\ xy = 1. \end{cases}$

48 1° Étudier le sens de variation de la fonction $x \longmapsto e^x - x$.
En déduire la proposition suivante : $\forall x \in \mathbb{R}, \quad e^x > x$.
2° Démontrer, par récurrence sur l'entier naturel non nul n, que l'on a :
$\forall x \in \mathbb{R}, \quad e^x > \dfrac{x^n}{n!}$. Dev

3° Démontrer que, pour tout entier naturel non nul n, la fonction $x \longmapsto \dfrac{e^x}{x^n}$ admet en $+\infty$ une limite égale à $+\infty$.

• **49** Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $\begin{cases} \forall x \in \mathbb{R}^*, & f(x) = e^{-\frac{1}{x^2}}. \\ & f(0) = 0. \end{cases}$ Dev

1° Démontrer que f est continue sur $\mathbb{R}$.
2° Démontrer que f est dérivable en tout point x non nul. Calculer $f'(x)$.
3° A l'aide de la définition, démontrer que f est dérivable en 0.
4° Étudier la fonction f et tracer sa courbe représentative dans un repère orthonormé.
(Baccalauréat 1973.)

• **50** Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ de la manière suivante : Dev

$\begin{cases} \text{pour } |x| < 1, & f(x) = e^{\frac{1}{x^2-1}}. \\ \text{pour } |x| \geqslant 1, & f(x) = 0. \end{cases}$

1° Démontrer que f est continue en tout point de $\mathbb{R}$.
2° Démontrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}$. On étudiera la dérivabilité aux points 1 et -1 en revenant à la définition.
3° Tracer la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.
(Baccalauréat 1973.)

Dev

51 Soit la fonction $f: \; x \longmapsto x - 1 + e^{-x}$.
1° Étudier la fonction f et tracer sa courbe représentative $\mathcal{C}$ dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.
2° Soient m un réel positif et $S(m)$ l'aire de la partie du plan limitée par l'axe Oy, la courbe $\mathcal{C}$ et les droites d'équations respectives : $y = x - 1$ et $x = m$.
Calculer $S(m)$.
La fonction $m \longmapsto S(m)$ admet-elle une limite en $+\infty$?

Dev

52 Soit la fonction $f: \; x \longmapsto (1 - x)\, e^x$.
Étudier la fonction f et tracer sa courbe représentative $\mathcal{C}$ dans un repère orthonormé.

53 Soit la fonction $f: \; x \longmapsto \left(1 - \dfrac{1}{x}\right) e^{\frac{1}{x}}$. Dev
Étudier la fonction f et tracer sa courbe représentative dans un repère orthonormé.

* **54** Soit la fonction $f: \; x \longmapsto e^{\frac{1}{x-1}}$.
Étudier la fonction f et tracer sa courbe représentative dans un repère orthonormé.

55 Soit la fonction $f: \; x \longmapsto \dfrac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$. Dev
Étudier la fonction f et tracer sa courbe représentative dans un repère orthonormé.

* **56** Soit la fonction $f: x \longmapsto \sqrt{e^x - e^{2x}}$.

1° Quel est l'ensemble de définition de f ?

2° La fonction $x \longmapsto \frac{f(x)}{x}$ admet-elle une limite à droite en 0 ?

3° Étudier la fonction f et tracer sa courbe représentative $\mathcal{C}$ dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$. Quelle est la tangente à $\mathcal{C}$ en O ?

(Baccalauréat 1973.)

✻ **57** Soit la fonction $f: x \longmapsto xe^{|x+1|}$.

Étudier la fonction f et construire sa courbe représentative dans un repère orthonormé.

✻ **58** Soit la fonction $f: x \longmapsto e^{\frac{1}{\cos x}}$.

1° Déterminer l'ensemble de définition et l'ensemble d'étude de f.

2° Étudier la fonction f et tracer sa courbe représentative $\mathcal{C}$ dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$. La courbe $\mathcal{C}$ admet-elle une tangente au point $A\left(\frac{\pi}{2}, 0\right)$?

On pourra étudier si la fonction $h \longmapsto \operatorname{Log} \frac{f\left(\frac{\pi}{2} + h\right)}{h}$ admet une limite à droite en 0.

(Baccalauréat 1973.)

✻ **59** Soit la fonction $f: x \longmapsto |e^{2x} - e^x| - 2$.

1° La fonction f est-elle continue, dérivable en 0 ?

2° Étudier la fonction f et tracer sa courbe représentative $\mathcal{C}$ dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

3° Soit A le point d'intersection de $\mathcal{C}$ et de Oy. Soit λ un réel négatif.

Déterminer l'aire de la partie du plan limitée par les droites d'équations respectives $x = \lambda$ et $x = 0$, par la courbe $\mathcal{C}$ et par la droite passant par A et parallèle à Ox.

60 1° Soient n un entier rationnel et la fonction $g: x \longmapsto e^x(x - n)$.

La fonction g est-elle dérivable ? Si oui, déterminer sa fonction dérivée.

2° Soit la fonction $f: x \longmapsto e^x(x - E(x))$. (Nous rappelons que $E(x)$ désigne la partie entière du réel x). Étudier la fonction f et tracer sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

3° Soit k un entier naturel non nul. Calculer $\int_0^k f(x)\,dx$.

* **61** Soit λ un réel non nul. Soient la fonction $f_\lambda: x \longmapsto xe^{-\lambda x}$ et $\mathcal{C}_\lambda$ la courbe représentative de f_λ dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1° Démontrer que toutes les courbes $\mathcal{C}_\lambda$ ont un point commun unique et qu'elles y admettent la même tangente.

2° Étudier la fonction f_1 et tracer la courbe $\mathcal{C}_1$.

3° Étudier la fonction f_{-1} et tracer la courbe $\mathcal{C}_{-1}$.

4° Soit α un nombre réel strictement positif.

A l'aide d'une intégration par parties, calculer le réel $\int_0^\alpha f_1(x)dx$, que l'on note $S(\alpha)$.

La fonction $\alpha \longmapsto S(\alpha)$ admet-elle une limite en $+\infty$?

(Baccalauréat 1973.)

62 Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 1.
Soient la fonction $f_n : x \longmapsto x^n e^x$ et $\mathcal{C}_n$ la courbe représentative de la fonction f_n dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.
1° Démontrer que la fonction f_n admet en $-\infty$ une limite égale à 0.
On pourra calculer $\text{Log}\,(f_n(x))$.
2° Étudier la fonction f_n.
3° Tracer les courbes $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$.
4° Soit X un nombre réel. Calculer $J(X) = \int_0^X f_1(x)\,dx$.
La fonction $X \longmapsto J(X)$ admet-elle une limite en $-\infty$? (Baccalauréat 1973.)

Calcul de primitives.

63 Soit la fonction $f : x \longmapsto x + \dfrac{1}{x^2} - \dfrac{1}{x}$.
1° Étudier la fonction f et tracer sa courbe représentative $\mathcal{C}$ dans un repère orthonormé.
2° Déterminer l'aire de la partie du plan limitée par la courbe $\mathcal{C}$ et les droites d'équations respectives : $y = 2$, $x = e$, $x = 1$.

64 Soit la fonction $f : x \longmapsto \dfrac{2x}{x^2+1}$.
1° Étudier la fonction f et tracer sa courbe représentative $\mathcal{C}$ dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.
2° Calculer l'aire de la partie du plan limitée par la courbe $\mathcal{C}$, l'axe Ox et la droite d'équation : $x = 1$.

65 Soit la fonction $f : x \longmapsto x + 1 + \dfrac{4}{|x-1|}$.
1° Étudier la fonction f et tracer sa courbe représentative dans un repère orthonormé.
2° Calculer l'aire de la partie du plan limitée par la courbe $\mathcal{C}$, son asymptote oblique et les droites d'équations respectives : $x = 1 + e$ et $x = 1 + e^2$.

66 Soient la fonction $f : x \longmapsto \dfrac{1}{x(x+1)(x+2)}$ et D_f son ensemble de définition.
1° Déterminer trois réels a, b, c tels que l'on ait :
$\forall x \in D_f, \quad f(x) = \dfrac{a}{x} + \dfrac{b}{x+1} + \dfrac{c}{x+2}$.
2° Déterminer la primitive F de f qui s'annule en 1.
La fonction F admet-elle une limite en $+\infty$?

67 Soient la fonction $f : x \longmapsto \dfrac{\sin x}{\cos x + \sin x}$ et D_f l'ensemble de définition de f.
1° Démontrer qu'il existe deux réels A et B tels que l'on ait :
$\forall x \in D_f, \quad f(x) = A + B\left(\dfrac{-\sin x + \cos x}{\cos x + \sin x}\right)$.
En déduire les primitives de la fonction f.
2° Calculer $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)\,dx$.

68 Soient la fonction $f: x \longmapsto \dfrac{1}{x-1}$ et la fonction $g: x \longmapsto \dfrac{1}{x+1}$.

1° Étudier les fonctions f et g et tracer leurs courbes représentatives respectives $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$ dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

2° Soit λ un nombre réel supérieur à 2. Déterminer l'aire $\mathcal{A}(\lambda)$ de la partie du plan limitée par la courbe $\mathcal{C}_1$, la courbe $\mathcal{C}_2$ et les droites d'équations respectives : $x = 2$ et $x = \lambda$.

La fonction $\lambda \longmapsto \mathcal{A}(\lambda)$ admet-elle une limite en $+\infty$?

69 1° Démontrer qu'il existe deux nombres réels a et b tels que l'on ait :

$$\forall x \in \mathbb{R} - \{-1\}, \quad \frac{2x}{x+1} = a + \frac{b}{x+1}.$$

2° Soit t un nombre réel supérieur à 4. Calculer les intégrales suivantes :

$$I_1(t) = \int_4^t \frac{dx}{x-3} \quad \text{et} \quad I_2(t) = \int_4^t \frac{2x}{x+1}\, dx.$$

3° La fonction $t \longmapsto I_2(t)$ admet-elle une limite en $+\infty$?

70 Soit la fonction $f: x \longmapsto \dfrac{\operatorname{Log} x}{x}$.

1° Étudier la fonction f et construire sa courbe représentative $\mathcal{C}$ dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

2° Déterminer les primitives de la fonction f.

3° Calculer l'aire de la partie du plan limitée par la courbe $\mathcal{C}$, l'axe Ox et les droites d'équations respectives : $x = 1$ et $x = e^2$.

71 1° Soient les fonctions $g: x \longmapsto \displaystyle\int_2^x \frac{dt}{t \operatorname{Log} t}$ et $h: x \longmapsto \displaystyle\int_2^{x^2} \frac{dt}{t \operatorname{Log} t}$.

Les fonctions g et h sont-elles dérivables ? Si oui, sur quel intervalle ? Déterminer leurs fonctions dérivées g' et h'.

2° Que peut-on en déduire pour la fonction f définie sur $]1, +\infty[$, par :

$$f(x) = \int_x^{x^2} \frac{dt}{t \operatorname{Log} t} \ ?$$

3° Calculer l'intégrale $\displaystyle\int_x^{x^2} \frac{dt}{t \operatorname{Log} t}$ pour tout réel x supérieur à 1.

72 Soit n un entier naturel. Calculer, à l'aide d'une intégration par parties, l'intégrale $\displaystyle\int_1^e x^n \operatorname{Log} x\, dx$.

73 Soit n un entier naturel non nul. Soit f_n la fonction définie par :

$$\forall x \in]0, +\infty[, \quad f_n(x) = \int_1^x t(\operatorname{Log} t)^n\, dt.$$

1° Soit x un élément quelconque de $]0, +\infty[$.
Établir une relation de récurrence entre $f_n(x)$ et $f_{n-1}(x)$.

2° En déduire une expression du réel $f_n(x)$ pour tout x de $]0, +\infty[$.

3° La fonction f_n admet-elle une limite à droite en 0 ?

74 1° Calculer $\displaystyle\int_1^x 2t\, e^{t^2+1}\, dt$.

2° En déduire le calcul, à l'aide d'une intégration par parties, de l'intégrale $\displaystyle\int_1^x 2t^3 e^{t^2+1}\, dt$.

(Baccalauréat 1973.)

75 A l'aide d'intégrations par parties successives, calculer : $\int_0^1 x^3 e^{-\frac{x}{2}}\, dx$.

(Baccalauréat 1973.)

※ **76** On considère les deux intégrales :

$$A = \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-x} \sin x \, dx \quad \text{et} \quad B = \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-x} \cos x \, dx.$$

Déterminer les réels A et B; on pourra calculer $A + B$ et $B - A$.

77 Soit x un nombre réel.

Calculer l'intégrale $\int_0^x \frac{1}{4} e^t \sin t \, dt$, à l'aide d'intégrations par parties.

78 1° Soient a et b deux nombres réels.
Démontrer qu'il existe deux réels A et B tels que la fonction $x \longmapsto (Ax + B)e^x$ soit une primitive de la fonction $x \longmapsto (ax + b)e^x$.
En déduire les primitives des fonctions :
$x \longmapsto (x - 1)e^x$ et $x \longmapsto (2x - 3)e^x$.
2° Soient a, b, c trois nombres réels. Démontrer qu'il existe trois nombres réels A, B, C tels que la fonction $x \longmapsto (Ax^2 + Bx + C)e^x$ soit une primitive de la fonction $x \longmapsto (ax^2 + bx + c)e^x$.
En déduire les primitives des fonctions :
$x \longmapsto x^2 e^x$ et $x \longmapsto (x^2 + 2x - 1)e^x$.

79 1° Soient a, b, λ, μ quatre nombres réels.
Soit la fonction $f : x \longmapsto e^{\lambda x}(a \cos \mu x + b \sin \mu x)$.
La fonction f est-elle dérivable sur $\mathbb{R}$? Si oui, déterminer sa fonction dérivée.
2° Soit la fonction $g : x \longmapsto e^{-x}(\sin 2x - 5 \cos 2x)$. Utiliser le résultat du 1° pour déterminer la primitive de g qui prend la valeur 3 en 0.

Étude de fonctions.

80 Soit la fonction $f : x \longmapsto \text{Log}\,(e^x - 1)$.
1° Étudier la fonction f et tracer sa courbe représentative $\mathcal{C}$ dans un repère orthonormé.
2° La fonction f admet-elle une application réciproque ? Si oui, définir cette application réciproque et tracer sa courbe représentative dans le même repère orthonormé.

81 Soit la fonction $f : x \longmapsto x + \text{Log}\,(2 - e^x)$.
1° Étudier la fonction f et tracer sa courbe représentative $\mathcal{C}$ dans un repère orthonormé.
2° Déterminer l'ensemble des points du plan dont les coordonnées $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ sont solutions de l'inéquation : $e^{y-x} + e^x > 2$.

• **82** Soient la fonction $f : x \longmapsto \text{Log}\,|e^x - 1|$ et la fonction :
$g : x \longmapsto \text{Log}\,(e^x + 1)$.
1° Étudier la fonction f et tracer sa courbe représentative $\mathcal{C}$ dans un repère orthonormé.
2° Étudier la fonction g et tracer sa courbe représentative $\mathcal{C}'$ dans le même repère.
3° Démontrer que les courbes $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ sont symétriques par rapport à la droite d'équation : $y = x$.

✻ **83** Étudier la fonction $x \longmapsto e^{-x} \operatorname{Log} x$ et tracer sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

(Baccalauréat 1973.)

✻ **84** Soit la fonction f: $x \longmapsto x - \frac{1}{2} \operatorname{Log} |2e^x - 1|$.

1° Étudier la fonction f.

On pourra écrire : $2e^x - 1 = 2e^x \left(1 - \frac{1}{2} e^{-x}\right)$.

2° Tracer la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthonormé.

✻ **85** Soit la fonction f: $x \longmapsto e^{-x} \operatorname{Log}(1 + e^{2x})$.

1° Soit la fonction φ définie par :

$\forall t \in [0, +\infty[, \quad \varphi(t) = \dfrac{2t}{1+t} - \operatorname{Log}(1+t)$.

Démontrer qu'il existe un seul nombre réel a supérieur à 1 tel que l'on ait : $\varphi(a) = 0$.

2° Étudier les variations de la fonction f; on établira une relation entre $f'(x)$ et $\varphi(e^{2x})$.

3° Déterminer, si elles existent, les limites de la fonction f en $+\infty$ et en $-\infty$.

4° Tracer la courbe représentative de f dans un repère orthonormé.

86 Soient λ un nombre réel et f_λ la fonction $x \longmapsto \lambda 2^{-x} + 2^x$.

1° Étudier la fonction f_λ, suivant le réel λ.

2° Tracer, dans un même repère orthonormé, les courbes représentatives respectives $\mathcal{C}_{-1}$ $\mathcal{C}_0$ $\mathcal{C}_1$ des fonctions f_{-1} f_0 f_1.

3° Calculer l'aire de la partie du plan limitée par la courbe $\mathcal{C}_{-1}$, la courbe $\mathcal{C}_1$ et les droites d'équations respectives : $x = 0$ et $x = 1$.

87 Reprendre l'exercice n° 74 du chapitre 8.

On veut encadrer le nombre réel x_n pour tout entier naturel n supérieur à 2.

1° Comparer les nombres réels x_n et 1.

2° Démontrer que la différence $x_n - \frac{1}{2}$ a le même signe que la différence $x_n^n - \frac{1}{2^n}$.

3° Soit la fonction φ : $x \longmapsto 2^{x+1} - x + 2$.

Étudier la fonction φ et démontrer que l'on a : $\forall x \in]0, +\infty[, \quad \varphi(x) > 0$.

4° Démontrer que, pour tout entier naturel n supérieur à 4, le réel x_n appartient à l'intervalle $\left]\frac{1}{2}, 1\right[$.

✻ **88** Soit la fonction f: $x \longmapsto |x|^{\frac{1}{x-1}}$.

1° La fonction f est-elle continue ? Si oui, sur quels intervalles ?

2° La fonction f admet-elle une limite en 0 ? Si oui, calculer cette limite.

3° La fonction f admet-elle une limite en 1 ? Démontrer qu'il existe un prolongement par continuité de f sur $\mathbb{R}^*$. Soit F ce prolongement par continuité.

4° Étudier les limites éventuelles de f en $+\infty$ et en $-\infty$.

5° La fonction F est-elle dérivable ? sur quels intervalles ? Déterminer sa fonction dérivée F'.

6° Étudier la fonction f; on sera conduit à considérer la fonction :

$x \longmapsto \dfrac{x-1}{x} - \operatorname{Log} |x|$.

7° Tracer la courbe représentative de F dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

Calcul numérique.

89 Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation suivante :
$6(\log x)^2 - 19 \log x - 7 = 0.$
On déterminera chaque solution avec la meilleure précision permise par la table de logarithmes utilisée.

90 Même question que pour le n° 89 avec :
$4(\log x)^2 - \log x - 3 = 0.$

91 Même question que pour le n° 89 avec :

$$\cos^2 (\mathrm{Log}\, x) + \frac{\sqrt{3}}{2} \sin (\mathrm{Log}\, x^2) - \frac{1}{2} = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

92 Même question que pour le n° 89 avec :
$e^x - 3{,}75\, e^{-x} - 1{,}75 = 0.$

93 Même question que pour le n° 89 avec :

$$5^{\sin x} + \frac{2}{5^{\sin x}} = 3.$$

94 Soit s un nombre réel.
1° Déterminer les nombres réels x tels que l'on ait : $e^x - e^{-x} = 2s.$
2° On suppose que $s = 3$. Déterminer x avec la meilleure précision permise par la table utilisée.
3° Même question que pour le 2° avec $s = -2$.

95 Soient α et β deux nombres réels positifs.

1° Résoudre dans $\mathbb{R}^2$ le système : $\begin{cases} xy = \alpha \\ \dfrac{y}{x} = \beta. \end{cases}$ (1)

2° On suppose : $\alpha = 2{,}1514$ et $\beta = 0{,}513.$
Donner des encadrements à 10^{-3} près de chacune des solutions du système (1)
(Baccalauréat 1972.)

96 Soit la fonction $f :\ x \longmapsto e^{-x} \sin x.$
1° Démontrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et déterminer sa fonction dérivée f'.
2° Démontrer que les solutions de l'équation : $f'(x) = 0$ sont en progression arithmétique et que leurs images par f sont en progression géométrique de raison $- e^{-\pi}$.
3° Calculer la raison de cette progression géométrique, avec la meilleure précision permise par les tables de logarithmes à cinq décimales.
(Baccalauréat 1973.)

97 1° Étudier la fonction $f :\ x \longmapsto \dfrac{1}{x+1} - \dfrac{1}{x+3}$ et tracer sa courbe représentative $\mathcal{C}$ dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.
2° Soit m un nombre réel positif.
Déterminer l'aire $\mathcal{A}$ de la partie du plan limitée par la courbe $\mathcal{C}$, l'axe Ox et les droites d'équations respectives : $x = 0$ et $x = m$.
3° Déterminer m pour que cette aire soit égale à $\sqrt{2}$.

98 Calculer avec la meilleure précision permise par les tables l'intégrale :

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(\frac{1}{1+x} - \sin\left(2x + \frac{\pi}{3}\right)\right) dx.$$

99 Soient p et q deux entiers naturels non nuls.

1° Calculer en fonction de p et de q l'intégrale :

$$\int_0^{\frac{p}{q}} \left(\frac{1}{x+1} + \frac{x}{x^2+1} + \frac{x^2}{x^3+1}\right) dx.$$

2° Calculer, à 2.10^{-4} près, la valeur numérique du réel

$$\text{Log}\,(p+q) + \frac{1}{2}\,\text{Log}\,(p^2+q^2) + \frac{1}{3}\,\text{Log}\,(p^3+q^3) - 3\,\text{Log}\,q$$

pour $p = 3$ et $q = 4$.

3° Déduire des deux premières questions une valeur approchée de l'intégrale :

$$\int_0^{\frac{3}{4}} \left(\frac{1}{x+1} + \frac{x}{x^2+1} + \frac{x^2}{x^3+1}\right) dx.$$

100 1° On considère les deux intégrales :

$$\text{I} = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{\cos x}{\cos x + \sin x}\, dx \quad \text{et} \quad \text{J} = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sin x}{\cos x + \sin x}\, dx.$$

Calculer I + J et I − J. En déduire les valeurs respectives de I et de J.

2° Déterminer des valeurs approchées respectives à 10^{-2} près de I et de J.

(Baccalauréat 1973.)

101 Soit α un nombre réel strictement positif.

On pose : $\text{I}\,(\alpha) = \int_1^{\alpha} \cos\,(\text{Log}\,x)\, dx.$

1° Calculer $\text{I}(\alpha)$ à l'aide de deux intégrations par parties successives.

2° Déterminer une valeur approchée de $\text{I}(e^{\pi})$ avec la meilleure précision permise par les tables de logarithmes utilisées.

(Baccalauréat 1973.)