5.51 Soit un triangle ABC rectangle en A, les côtés ayant pour ongueurs a, b, c. On suppose que ce triangle représente une plaque homogène de masse M. Calculer les moments d'inertie de cette plaque par rapport aux droites (AB), (AC), (BC).

5.52 Soit Δ une droite quelconque du plan (ou de l'espace) et Δ_0 la parallèle à Δ passant par le centre de gravité G d'un corps (si le corps est formé de n points P_i de masse m_i, son centre de gravité ou centre d'inertie G est le point tel que $\sum_{i=1}^{n} m_i \overrightarrow{GP_i} = \vec{0}$). On désigne par a la distance des droites Δ et Δ_0, par M la masse du corps, I_Δ et I_{Δ_0} les moments d'inertie du corps par rapport à Δ et à Δ_0. Démontrer que l'on a

$$I_\Delta = I_{\Delta_0} + Ma^2$$

(théorème de Huygens). On aura des théorèmes analogues pour les moments d'inertie par rapport à un point ou un plan.

Application. Calculer le moment d'inertie d'un disque homogène par rapport à une tangente (on utilisera le résultat de l'exercice 5 du § 5.10 b).

5.53 Soit l'ellipse d'équation $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$. L'ensemble des points du plan limité par cette ellipse représente une plaque dont la masse spécifique superficielle μ en un point P quelconque est proportionnelle à la distance de P à l'axe Oy :

$$\mu = k\,|\,x\,| \qquad (k \text{ constante positive donnée}).$$

Calculer la masse de cette plaque.

5.54 Au cours de la traction d'une tige métallique, la force F est proportionnelle à l'allongement x :

$$F = kx \qquad (k \text{ constante positive donnée}).$$

Calculer le travail total W, lorsque l'allongement varie progressivement de 0 à x_1.

Sujet d'étude.

5.55 1° Soit une fonction f continue sur $[a\,,\,b]$ $(a < b)$ et positive sur ce segment (c'est-à-dire que $f(x) \geqslant 0$ pour tout x de $[a\,,\,b]$). On sait que $\int_a^b f(x)\,dx \geqslant 0$ (cf. § 5.4 a). Démontrer que si $f(x) > 0$ en un point au moins de $[a\,,\,b]$, on a $\int_a^b f(x)\,dx > 0$.

2° Démontrer que, pour toute fonction f continue et positive sur $[a\,,\,b]$:

$$\int_a^b f(x)\,dx = 0 \iff (f \text{ est la fonction nulle sur } [a\,,\,b]).$$

3° Soit f et g deux fonctions continues sur $[a\,,\,b]$ et λ un nombre réel quelconque. Mettre l'intégrale

$$\int_a^b [f(x) + \lambda g(x)]^2\,dx$$

sous la forme d'un polynôme en λ, ordonné suivant les puissances décroissantes.

En déduire l'*inégalité de Cauchy-Schwarz :*

$$\left[\int_a^b f(x)\,g(x)\,dx\right]^2 \leqslant \left[\int_a^b f^2(x)\,dx\right] \times \left[\int_a^b g^2(x)\,dx\right]$$

4° Montrer que l'application n de l'espace vectoriel des fonctions continues sur $[a\,,\,b]$ dans $\mathbb{R}_+$,

$$n : f \longmapsto n(f) = \sqrt{\int_a^b f^2(x)\,dx}$$

est une *norme*.

6 | Fonctions logarithmiques et exponentielles. Applications.

La première section de ce dernier chapitre d'analyse est consacré à l'étude des **fonctions logarithmiques** *qui sont des isomorphismes de $(\mathbb{R}_+^*, \times)$ sur $(\mathbb{R}, +)$ et à l'étude des* **fonctions exponentielles** *qui sont des isomorphismes de $(\mathbb{R}, +)$ sur $(\mathbb{R}_+^*, \times)$.*

Dans la section II, nous donnons quelques notions sur les **équations différentielles** *et leurs applications en Physique et dans d'autres domaines.*

Nous indiquons enfin l'utilisation de la **règle à calcul** *et de la* **table de logarithmes** *ainsi que quelques exemples de calcul numérique. Le principe de la règle à calcul et celui de la table de logarithmes sont fondés essentiellement sur l'isomorphisme de $(\mathbb{R}_+^*, \times)$ sur $(\mathbb{R}, +)$ qu'est la fonction logarithme de base 10.*

I. Fonctions logarithmiques et exponentielles

6. 1. ÉTUDE D'UN ENSEMBLE DE FONCTIONS

a) Problème.

Rappelons que si l'on a un ensemble E muni d'une loi interne $\top$ et un ensemble E′ muni d'une loi interne $\top'$, on appelle **homomorphisme** f de $(E, \top)$ dans $(E', \top')$ toute application f de E dans E′ telle que

$$(\forall\,(x_1, x_2) \in E \times E) \qquad f(x_1 \top x_2) = f(x_1) \top' f(x_2).$$

Cherchons toutes les fonctions numériques f définies sur $]0\,,+\infty[$ telles que :

1. Pour tout $x_1 > 0$ et tout $x_2 > 0$.

   (1) $$f(x_1 x_2) = f(x_1) + f(x_2).$$

   Une telle fonction est donc un homomorphisme de $(\mathbb{R}_+^*, \times)$ dans $(\mathbb{R}, +)$.
2. La fonction f soit *dérivable* sur $]0\,,+\infty[$.

Si f existe, supposons $x_1 > 0$ fixe et $x_2 = x$ variable décrivant $]0\,,+\infty[$.

La relation (1) s'écrit alors

$$f(x_1 x) = f(x_1) + f(x)$$

d'où par dérivation

$$x_1 f'(x_1 x) = f'(x),$$

pour $x = 1$ on a

$$x_1 f'(x_1) = f'(1)$$

$$f'(x_1) = \frac{f'(1)}{x_1}$$

et pour tout $x > 0$, on peut aussi écrire

$$f'(x) = \frac{f'(1)}{x}$$

$$f'(x) = \frac{k}{x}\ , \quad \text{en posant } k = f'(1).$$

La fonction f est donc une primitive de la fonction : $x \longmapsto \frac{k}{x}$ sur $]0, +\infty[$. Or la fonction : $x \longmapsto \frac{1}{x}$ est continue sur $]0, +\infty[$ donc (cf. § 5.3 b) intégrable sur tout segment inclus dans $]0, +\infty[$ et l'on peut écrire (cf. § 5.6 b) pour tout $x > 0$:

$$f(x) = \int_1^x \frac{k}{t}\, dt + C$$

(C constante réelle).

Si l'on fait $x_2 = 1$ dans la relation (1), on obtient pour tout $x_1 > 0$:

$$f(x_1) = f(x_1) + f(1)$$

d'où

$$f(1) = 0$$

par suite $C = 0$. Donc, pour tout $x > 0$, on a

$$f(x) = \int_1^x \frac{k}{t}\, dt$$

(2) $$f(x) = k \int_1^x \frac{1}{t}\, dt.$$

Réciproquement si l'on a une fonction f définie par (2) pour tout $x > 0$, k étant une constante réelle arbitraire, on peut écrire d'après (2), pour tout $x > 0$ (cf. § 5.6 b) :

(3) $$f'(x) = \frac{k}{x}$$

on a aussi, pour $x_1 > 0$ donné et pour tout $x > 0$, en remplaçant x par $x_1 x$ dans

(3) : $$f'(x_1 x) = \frac{k}{x_1 x}$$

d'où

(4) $$x_1 f'(x_1 x) = \frac{k}{x}$$

il résulte de (3) et (4) que les fonctions : $x \longmapsto f(x)$ et $x \longmapsto f(x_1 x)$ définies sur $]0, +\infty[$ ont la même dérivée pour tout $x > 0$ donc (cf. § 3.1 c) il existe un nombre réel C tel que pour tout $x > 0$ ($x_1 > 0$ est donné) :

$$f(x_1 x) = f(x) + C;$$

pour $x = 1$, on en déduit

$$f(x_1) = f(1) + C;$$

d'après (2), $f(1) = 0$ donc $C = f(x_1)$ et l'on a pour $x_1 > 0$ donné et pour tout $x > 0$:

$$f(x_1 x) = f(x_1) + f(x),$$

mais le raisonnement est vrai quel que soit le choix de $x_1 > 0$ donné, donc cette relation est encore vraie pour tout $x_1 > 0$ et tout $x > 0$ ou encore, en remplaçant x par x_2, pour tout $x_1 > 0$ et tout $x_2 > 0$, on a bien la relation (1).

Donc l'ensemble des fonctions cherchées est l'ensemble des fonctions :

$$x \longmapsto k \int_1^x \frac{1}{t}\, dt$$

définies sur $]0, +\infty[$, k étant une constante réelle arbitraire.

Pour chaque valeur de k, nous obtenons ainsi une fonction et une seule que nous désignerons par f_k.

b) Formules.

On vient de voir que pour tout $x_1 > 0$ et tout $x_2 > 0$

(1) $$\boxed{f_k(x_1 x_2) = f_k(x_1) + f_k(x_2)}$$

chacune des fonctions f_k est un homomorphisme de $(\mathbb{R}_+^*, \times)$ dans $(\mathbb{R}, +)$.

Plus généralement si $x_1, x_2, \ldots, x_n$ sont des nombres réels quelconques strictement positifs, démontrons par récurrence que :

(5) $$f_k(x_1 x_2 \ldots x_n) = f_k(x_1) + f_k(x_2) + \ldots + f_k(x_n).$$

L'égalité est vraie pour $n = 2$ d'après (1). Supposons que l'on ait :

$$f_k(x_1 x_2 \ldots x_{n-1}) = f_k(x_1) + f_k(x_2) + \ldots + f_k(x_{n-1})$$

alors

$$\begin{aligned} f_k(x_1 x_2 \ldots x_{n-1} x_n) &= f_k[(x_1 x_2 \ldots x_{n-1}) x_n] \\ &= f_k(x_1 x_2 \ldots x_{n-1}) + f_k(x_n) \\ &= [f_k(x_1) + f_k(x_2) + \ldots + f_k(x_{n-1})] + f_k(x_n) \end{aligned}$$

on a donc bien (5).

On a vu aussi que

$$\boxed{f_k(1) = 0}$$

ce qui montre que l'image par f_k de l'élément neutre de $(\mathbb{R}_+^*, \times)$ est l'élément neutre de $(\mathbb{R}, +)$.

Quel que soit $x > 0$,

$$1 = x \times \frac{1}{x}$$

$$f_k(1) = f_k(x) + f_k\left(\frac{1}{x}\right)$$

$$0 = f_k + f_k\left(\frac{1}{x}\right)$$

donc, quel que soit $x > 0$,

$$\boxed{f_k\left(\frac{1}{x}\right) = -f_k(x)}$$

ce qui montre que l'image par f_k de l'inverse d'un élément quelconque de $(\mathbb{R}_+^*, \times)$ est l'opposé dans $(\mathbb{R}, +)$ de l'image de cet élément.

Quels que soient $x_1 > 0$ et $x_2 > 0$,

$$\frac{x_1}{x_2} = x_1 \times \frac{1}{x_2}$$

$$f_k\left(\frac{x_1}{x_2}\right) = f_k(x_1) + f_k\left(\frac{1}{x_2}\right)$$

$$\boxed{f_k\left(\frac{x_1}{x_2}\right) = f_k(x_1) - f_k(x_2)}\ .$$

Si r est un nombre rationnel quelconque et $x > 0$ quelconque, calculons $f_k(x^r)$. Tout d'abord, si n est un entier naturel non nul quelconque, faisons $x_1 = x_2 = \ldots = x_n = x > 0$ dans (5) :

$$f_k(x\,x \ldots x) = f_k(x) + f_k(x) + \ldots + f_k(x)$$

donc :

$$f_k(x^n) = n f_k(x).$$

Si n est un entier naturel non nul quelconque et $x > 0$ quelconque, on sait que :

$$x = (\sqrt[n]{x})^n$$

d'où

$$f_k(x) = n f_k(\sqrt[n]{x})$$

donc

$$f_k(\sqrt[n]{x}) = \frac{1}{n} f_k(x).$$

Si p et q sont des entiers naturels non nuls quelconques, on peut aussi écrire pour tout $x > 0$:

$$\begin{aligned} f_k\left(x^{\frac{p}{q}}\right) &= f_k(\sqrt[q]{x^p}) \\ &= \frac{1}{q} f_k(x^p) \\ &= \frac{p}{q} f_k(x) \end{aligned}$$

Donc :

$$(\forall\, r \in \mathbb{Q}_+^*) \quad (\forall\, x \in \mathbb{R}_+^*) \qquad f_k(x^r) = r f_k(x).$$

Si $r \in \mathbb{Q}_-^*$, posons $r' = -r$. On a pour tout $x > 0$:

$$\begin{aligned} f_k(x^r) = f_k\left(\frac{1}{x^{r'}}\right) &= -f_k(x^{r'}) \\ &= -r' f_k(x) \\ &= r f_k(x). \end{aligned}$$

Si enfin $r = 0$, pour tout $x > 0$:

$$x^0 = 1$$

d'où

$$f_k(x^0) = f_k(1) = 0$$

on a encore

$$f_k(x^0) = 0\, f_k(x).$$

En résumé, on peut écrire :

$$(\forall\, r \in \mathbb{Q}) \quad (\forall\, x \in \mathbb{R}_+^*) \qquad \boxed{f_k(x^r) = r f_k(x)}\ .$$

6. 2 FONCTION LOGARITHME NÉPÉRIEN

a) Définition. Interprétation géométrique. Formules.

Étudions la fonction f_1 obtenue pour $k = 1$.

Définition.

On appelle **fonction logarithme népérien** la fonction : $x \longmapsto \int_1^x \frac{1}{t}\, dt$ définie sur $]0\,, +\infty[$ c'est-à-dire la primitive de la fonction : $x \longmapsto \frac{1}{x}$ sur $]0\,, +\infty[$ qui s'annule pour $x = 1$.

Le mot « népérien » provient du nom de Neper (ou Napier), mathématicien écossais (1550-1617) à qui l'ont doit l'invention des logarithmes. On désigne la fonction logarithme népérien par le symbole Log. Pour tout $x > 0$, on peut écrire :

$$\boxed{\operatorname{Log} x = \int_1^x \frac{1}{t}\, dt}$$

Dans le plan affine euclidien rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$, la courbe représentative Γ de la fonction : $x \longrightarrow \frac{1}{x}$ définie sur $\mathbb{R}^*$ est une hyperbole équilatère. Soit A et A′ les points d'abscisse 1 respectivement sur Γ et sur $x'x$, M et M′ les points d'abscisse $x > 0$ respectivement sur Γ et sur $x'x$ (fig. 1). Le nombre $\operatorname{Log} x = \int_1^x \frac{1}{t}\, dt$ est l'aire algébrique de la partie du plan A′M′MA, cette aire étant strictement positive ou strictement négative suivant que $x > 1$ ou que $0 < x < 1$ (cf. § 5.8 b).

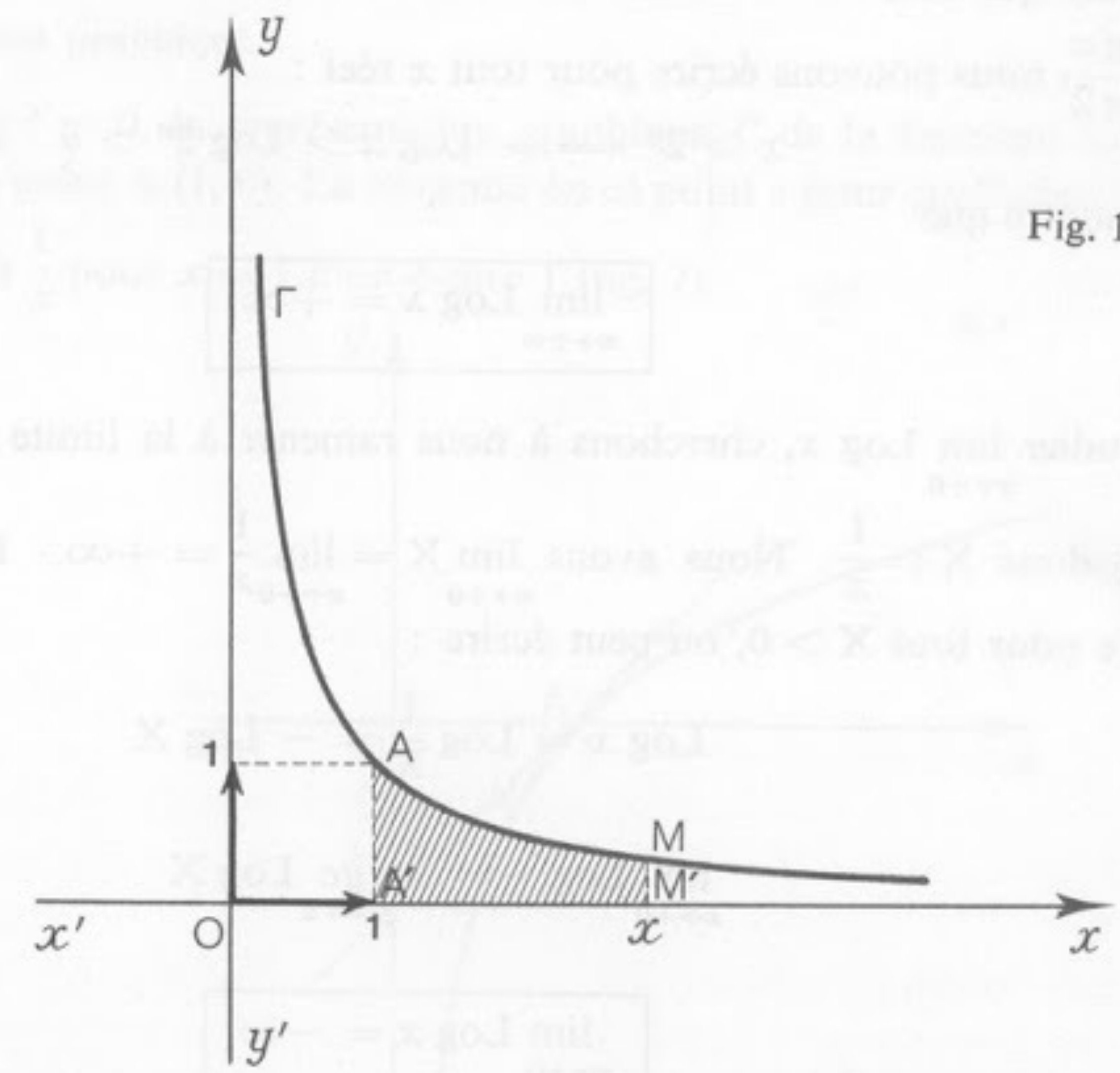

Fig. 1

Les formules précédentes s'écrivent pour tout x_1, x_2, x strictement positifs et pour tout r rationnel :

$$\operatorname{Log} x_1 x_2 = \operatorname{Log} x_1 + \operatorname{Log} x_2$$
$$\operatorname{Log} 1 = 0$$
$$\operatorname{Log} \frac{1}{x} = -\operatorname{Log} x$$
$$\operatorname{Log} \frac{x_1}{x_2} = \operatorname{Log} x_1 - \operatorname{Log} x_2$$
$$\operatorname{Log} x^r = r \operatorname{Log} x.$$

b) Isomorphisme de $(\mathbb{R}_+^*, \times)$ sur $(\mathbb{R}, +)$.

La fonction logarithme népérien est dérivable donc continue sur $]0, +\infty[$, sa dérivée en tout point $x > 0$ étant $\frac{1}{x} > 0$. Donc la fonction logarithme népérien est strictement croissante sur $]0, +\infty[$.

Étudions les limites de cette fonction quand x tend vers $+\infty$ et quand x tend vers 0 à droite. Montrons tout d'abord que $\lim\limits_{x \to +\infty} \operatorname{Log} x = +\infty$.

Quel que soit $\alpha > 0$ donné, pour avoir

(1) $$\operatorname{Log} x > \alpha,$$

cherchons un entier naturel n tel que $\operatorname{Log} 2^n > \alpha$, il suffira alors de prendre $x > 2^n$ car, la fonction étant strictement croissante sur $]0, +\infty[$, nous avons :

$$\operatorname{Log} x > \operatorname{Log} 2^n > \alpha$$

et (1) sera vérifiée.

Pour avoir $\operatorname{Log} 2^n > \alpha$, il suffit que $n \operatorname{Log} 2 > \operatorname{Log} \alpha$ ou encore, en divisant les deux nombres de cette dernière inégalité par $\operatorname{Log} 2 > 0$ (car $\operatorname{Log} 2 > \operatorname{Log} 1 = 0$), que $n > \frac{\operatorname{Log} \alpha}{\operatorname{Log} 2}$.

Donc quel que soit $\alpha > 0$ donné, si l'on choisit l'entier naturel n de manière que $n > \frac{\operatorname{Log} \alpha}{\operatorname{Log} 2}$, nous pouvons écrire pour tout x réel :

$$x > 2^n \Longrightarrow \operatorname{Log} x > \operatorname{Log} 2^n > \alpha$$

ce qui montre que

$$\boxed{\lim_{x \to +\infty} \operatorname{Log} x = +\infty}$$

Pour étudier $\lim\limits_{x \to +0} \operatorname{Log} x$, cherchons à nous ramener à la limite précédente en posant $x = \frac{1}{X}$ donc $X = \frac{1}{x}$. Nous avons $\lim\limits_{x \to +0} X = \lim\limits_{x \to +0} \frac{1}{x} = +\infty$. Pour tout $x > 0$ et par suite pour tout $X > 0$, on peut écrire :

$$\operatorname{Log} x = \operatorname{Log} \frac{1}{X} = -\operatorname{Log} X$$

d'où

$$\lim_{x \to +0} \operatorname{Log} x = -\lim_{X \to +\infty} \operatorname{Log} X$$

donc

$$\boxed{\lim_{x \to +0} \operatorname{Log} x = -\infty}$$

La fonction logarithme népérien est continue et strictement croissante sur $]0, +\infty[$, on a $\lim\limits_{x \to +0} \operatorname{Log} x = -\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \operatorname{Log} x = +\infty$, donc (cf. § 1.11) cette fonction est une bijection de $]0, +\infty[$ sur $]-\infty, +\infty[$.

D'autre part on sait (cf. § 6.1 a) qu'elle est un homomorphisme de $(\mathbb{R}_+^*, \times)$ dans $(\mathbb{R}, +)$. C'est donc un **isomorphisme** (voir tome I).

Nous pouvons donc énoncer :

Théorème.

La fonction logarithme népérien est un isomorphisme du groupe multiplicatif des nombres réels strictement positifs $(\mathbb{R}_+^*, \times)$ sur le groupe additif des nombres réels $(\mathbb{R}, +)$.

Le tableau de variation de cette fonction est :

x	0		1		$+\infty$
$\frac{1}{x}$	$\parallel$	$+$	1	$+$	
$\operatorname{Log} x$	$\parallel -\infty$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

On notera que pour tout x réel :

$$x = 1 \Longleftrightarrow \operatorname{Log} x = 0$$
$$x > 1 \Longleftrightarrow \operatorname{Log} x > 0$$
$$0 < x < 1 \Longleftrightarrow \operatorname{Log} x < 0.$$

c) Représentation graphique.

Puisque $\operatorname{Log} 1 = 0$, la représentation graphique Γ de la fonction logarithme népérien passe par le point A (1, 0). La tangente en ce point a pour coefficient directeur la valeur de la dérivée $\frac{1}{x}$ pour $x = 1$ c'est-à-dire 1 (fig. 2).

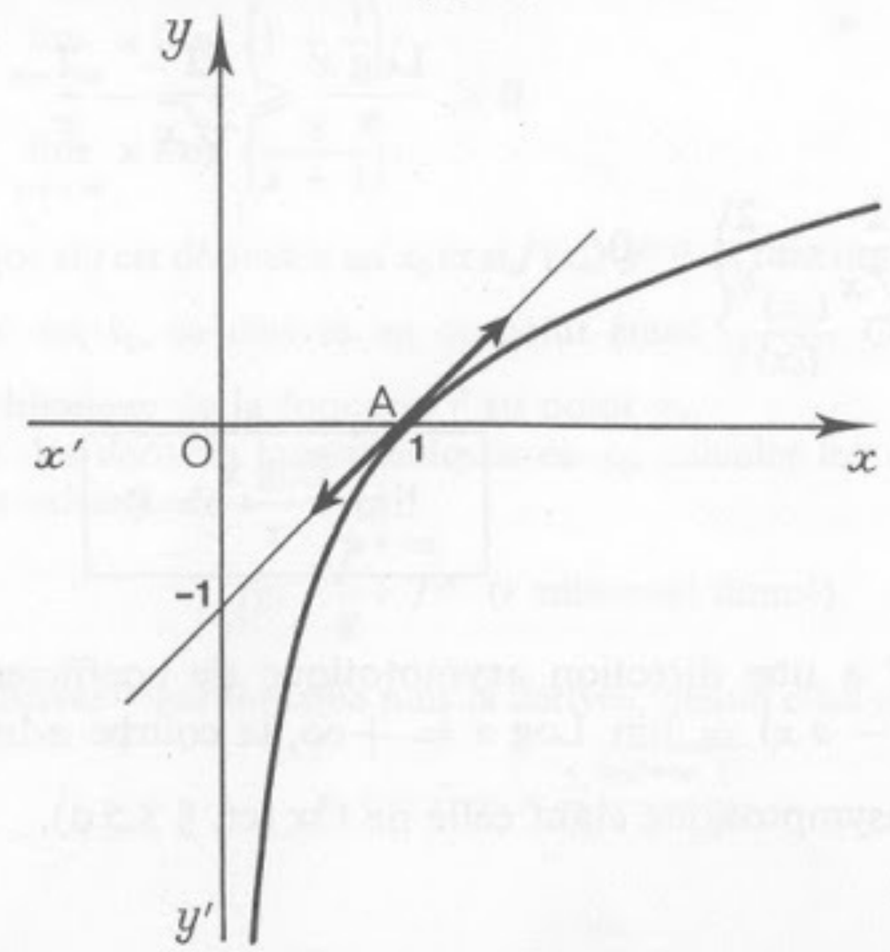

Fig. 2

On a vu que $\lim_{x \to +0} \text{Log } x = -\infty$ donc $y'y$ est une asymptote à Γ. On a vu que $\lim_{x \to +\infty} \text{Log } x = +\infty$, cherchons s'il y a une asymptote d'équation de la forme $y = ax + b$. On est amené à étudier $\lim_{x \to +\infty} \dfrac{\text{Log } x}{x}$ (cf. § 3.5 c).

Nous avons $\lim_{x \to +\infty} \text{Log } x = +\infty$ et $\lim_{x \to +\infty} x = +\infty$, on ne peut en déduire immédiatement la limite de la fonction : $x \longmapsto \dfrac{\text{Log } x}{x}$ quand x tend vers $+\infty$.

Pour $x \geqslant 1$, on a $\dfrac{\text{Log } x}{x} \geqslant 0$, montrons que $\lim_{x \to +\infty} \dfrac{\text{Log } x}{x} = 0$ en majorant, pour $x \geqslant 1$, $\dfrac{\text{Log } x}{x}$ par la valeur $\varphi(x)$ d'une fonction φ ayant pour limite 0 quand x tend vers $+\infty$.

A cet effet, on sait que $\text{Log } x = \displaystyle\int_1^x \frac{1}{t}\, dt$.

Quel que soit $t \geqslant 1$, on a

$$\sqrt{t} \geqslant 1$$

d'où

$$(\sqrt{t})^2 \geqslant \sqrt{t}$$

$$t \geqslant \sqrt{t}$$

$$\frac{1}{t} \leqslant \frac{1}{\sqrt{t}}$$

donc (cf. § 5.4 b) quel que soit $x \geqslant 1$

$$\int_1^x \frac{1}{t}\, dt \leqslant \int_1^x \frac{1}{\sqrt{t}}\, dt$$

c'est-à-dire

$$\text{Log } x \leqslant [2\sqrt{t}]_1^x = 2\sqrt{x} - 2$$

donc quel que soit $x \geqslant 1$

$$0 \leqslant \frac{\text{Log } x}{x} \leqslant \frac{2}{\sqrt{x}} - \frac{2}{x}$$

on a $\lim_{x \to +\infty} \left(\dfrac{2}{\sqrt{x}} - \dfrac{2}{x}\right) = 0$

donc

$$\boxed{\lim_{x \to +\infty} \frac{\text{Log } x}{x} = 0}$$

La courbe Γ a une direction asymptotique de coefficient directeur $a = 0$. Puisque $\lim_{x \to +\infty} (\text{Log } x - a\,x) = \lim_{x \to +\infty} \text{Log } x = +\infty$, la courbe admet une branche parabolique, la direction asymptotique étant celle de Ox (cf. § 3.5 d).

d) Application.

Étudions $\lim_{x \to +0} x \text{ Log } x$. Nous avons $\lim_{x \to +0} x = 0$ et $\lim_{x \to +0} \text{Log } x = -\infty$, on ne peut en déduire immédiatement la limite de la fonction : $x \longmapsto x \text{ Log } x$ quand x tend vers 0 à droite. Cherchons à nous ramener au cas précédent en posant $x = \dfrac{1}{X}$ donc $X = \dfrac{1}{x}$. Nous avons $\lim_{x \to +0} X = \lim_{x \to +0} \dfrac{1}{x} = +\infty$. Pour tout $x > 0$ et par suite pour tout $X > 0$, on peut écrire :

$$x \text{ Log } x = \frac{1}{X} \text{ Log } \frac{1}{X} = -\frac{\text{Log X}}{X}$$

d'où

$$\lim_{x \to +0} x \text{ Log } x = -\lim_{X \to +\infty} \frac{\text{Log X}}{X}$$

donc

$$\boxed{\lim_{x \to +0} x \text{ Log } x = 0}$$

EXERCICES

Chercher si les fonctions suivantes ont une limite et donner, s'il y a lieu, la valeur de cette limite :

1. $\lim_{x \to +\infty} \dfrac{\text{Log } x}{x^{\frac{p}{q}}}$ $\quad (p \in \mathbb{N}^*,\ q \in \mathbb{N}^*)$.

2. $\lim_{x \to +0} x^{\frac{p}{q}} \text{ Log } x$ $\quad (p \in \mathbb{N}^*,\ q \in \mathbb{N}^*)$.

3. $\lim_{x \to +\infty} \dfrac{(\text{Log } x)^3}{x^2}$.

4. Former le taux d'accroissement de la fonction Log entre 1 et $1 + h$. En déduire $\lim_{h \to 0} \dfrac{\text{Log } (1 + h)}{h}$.

   En déduire : $\lim_{x \to +\infty} x \text{ Log } \left(1 + \dfrac{1}{x}\right)$.

   $\lim_{x \to +\infty} x \text{ Log } \left(\dfrac{x}{x + 1}\right)$.

5. Démontrer que si f est dérivable en x_0 et si $f(x_0) \neq 0$, la fonction : $x \longmapsto \text{Log } |f(x)|$ est dérivable en x_0, sa dérivée en ce point étant $\dfrac{f'(x_0)}{f(x_0)}$. Ce nombre s'appelle la **dérivée logarithmique** de la fonction f au point x_0.

   Si f et g ont des dérivées logarithmiques en x_0, calculer les dérivées logarithmiques en x_0, si elles existent, de :

   $$fg, \quad \frac{f}{g}, \quad f^r \quad (r \text{ rationnel donné}).$$

   Calculer la dérivée logarithmique puis la dérivée, quand elles existent, de la fonction

   $$x \longmapsto x \frac{\sqrt{x^2 - 1}}{(x^2 + 1)^3}.$$

6. Si f est dérivable et ne s'annule pas sur un intervalle I, une primitive quelconque, sur I, de la fonction $g : x \longmapsto \dfrac{f'(x)}{f(x)}$ est la fonction $G : x \longmapsto \text{Log}\,|f(x)| + C$, C étant une constante réelle arbitraire.
Application. Chercher les primitives, en précisant les ensembles de définition, des fonctions g telles que :

$g(x) = \dfrac{1}{x-1}$, $\quad g(x) = \dfrac{x^3 + x}{x^4 + 2x^2 + 3}$,

$g(x) = \dfrac{x^3 - x^2 + 1}{(x-1)^2}$ $\left[\text{qu'on écrira sous la forme } ax + b + \dfrac{c}{x-1} + \dfrac{d}{(x-1)^2}\right]$.

$g(x) = \text{tg}\, x$, $\quad g(x) = \text{cotg}\, x$.

6. 3. FONCTION LOGARITHME DE BASE a

a) Définitions. Formules.

Étudions maintenant les fonctions de la forme (cf. § 6.1 a)

$$f_k : x \longmapsto k \int_1^x \frac{1}{t}\, dt = k \,\text{Log}\, x$$

(k constante réelle arbitraire).

Si l'on se donne f_k donc k, cherchons dans $\mathbb{R}_+^*$ les solutions de l'équation :

(1) $\qquad f_k(x) = 1.$

Pour tout $x > 0$,

$$(1) \iff k \,\text{Log}\, x = 1$$

si $k = 0$, (1) est impossible

si $k \neq 0$, $\;(1) \iff \text{Log}\, x = \dfrac{1}{k}$

Cette dernière équation admet une solution unique dans $\mathbb{R}_+^*$, puisque la fonction : $x \longmapsto \text{Log}\, x$ est une bijection de $]0, +\infty[$ sur $]-\infty, +\infty[$ et, puisque $\dfrac{1}{k} \neq 0$, cette solution est différente de 1.

Inversement si l'on se donne un nombre a strictement positif et différent de 1, soit $k = \dfrac{1}{\text{Log}\, a}$, il existe une fonction et une seule définie sur $]0, +\infty[$

$$f_k : x \longmapsto k \,\text{Log}\, x = \frac{\text{Log}\, x}{\text{Log}\, a}$$

et telle que $f_k(a) = 1$. On notera que $k = \dfrac{1}{\text{Log}\, a} \neq 0$.

Conclusion : au lieu de définir une fonction f_k par la donnée du nombre réel k, on peut la définir par la donnée du nombre réel a, strictement positif et différent de 1, d'image 1 par f_k. Seule la fonction f_0 correspondant à $k = 0$ n'est pas obtenue ainsi. La fonction f_0 est la fonction nulle : $x \longmapsto 0$ définie sur $]0, +\infty[$, nous exclurons ce cas.

Définition.

Étant donné un nombre réel a strictement positif et différent de 1, on appelle **fonction logarithme de base** a la fonction : $x \longmapsto \dfrac{\text{Log}\, x}{\text{Log}\, a}$ définie sur $]0, +\infty[$.

On la désigne par le symbole $\log_a$. Pour tout $x > 0$, on a

$$\boxed{\log_a x = \frac{\text{Log}\, x}{\text{Log}\, a}}$$

le nombre $\log_a x$ se lit « logarithme de base a de x » et on notera que

$$\boxed{\log_a a = 1},$$

dans la base considérée le logarithme de la base est toujours égal à 1.

En particulier, la base de la fonction logarithme népérien est le nombre que l'on désigne par e tel que $\text{Log}\, e = 1$.

Rappelons que la fonction logarithme népérien est une bijection de $]0, +\infty[$ sur $]-\infty, +\infty[$ donc ce nombre e existe et il est unique.

Définition.

Le nombre e est le nombre réel tel que $\text{Log}\, e = 1$.

Puisque $\text{Log}\, e > 0$, on a $e > 1$ (cf. § 6.2 b). On démontre qu'une valeur approchée, à 10^{-5} près par défaut, de e est 2,718 28.

Un autre cas particulier important est celui correspondant à la base $a = 10$.

La fonction obtenue s'appelle la **fonction logarithme de base 10** que l'on représente simplement par log. Pour tout $x > 0$, on a :

$$\boxed{\log x = \frac{\text{Log}\, x}{\text{Log}\, 10} = \text{M}\,\text{Log}\, x},$$

en posant $\text{M} = \dfrac{1}{\text{Log}\, 10}$. La valeur approchée de M à 5.10^{-6} près est 0,434 29. Le nombre $\log x$ s'appelle le **logarithme décimal** de x. Il existe des tables donnant des logarithmes décimaux, elles sont utilisées dans les calculs numériques. Nous en verrons l'usage plus loin.

Avec ces nouvelles notations, les formules données au § 6.1 b) deviennent dans une base quelconque a strictement positive et différente de 1, pour tout x_1, x_2, x strictement positifs et pour tout r rationnel :

$$\log_a x_1 x_2 = \log_a x_1 + \log_a x_2$$
$$\log_a 1 = 0$$
$$\log_a \frac{1}{x} = -\log_a x$$
$$\log_a \frac{x_1}{x_2} = \log_a x_1 - \log_a x_2$$
$$\log_a x^r = r \log_a x.$$

EXERCICES

1. Les nombres a et b étant strictement positifs et différents de 1, démontrer que pour tout $x > 0$:

$$\log_a x = \log_a b \times \log_b x.$$

2. Démontrer que, quels que soient $a, b, c, d, \ldots.\, l$ strictement positifs et différents de 1, on a

$$\log_a b \times \log_b c \times \log_c d \times \ldots \times \log_l a = 1.$$

3. Comparer

$$\log_a x \quad \text{et} \quad \log_{\frac{1}{a}} \frac{1}{x}.$$

4. Résoudre dans $\mathbb{R}$

$$\log (2x - 5) + \log (3x + 7) = 4 \log 2.$$

5. Simplifier

$$\frac{\log_2 16 \times \log_3 \sqrt{27}}{\log_2 8}.$$

b) Étude de la fonction logarithme de base *a*.

On sait que la fonction logarithme népérien est continue et strictement croissante sur $]0, +\infty[$ donc la fonction

$$\log_a : \quad x \longmapsto \log_a x = k \operatorname{Log} x = \frac{\operatorname{Log} x}{\operatorname{Log} a}$$

est continue sur $]0, +\infty[$ comme étant le produit d'une fonction continue par une constante et elle est (cf. § 3.1 b) strictement croissante ou strictement décroissante sur $]0, +\infty[$ suivant que $\operatorname{Log} a > 0$ ou $\operatorname{Log} a < 0$ c'est-à-dire suivant que $a > 1$ ou $0 < a < 1$.

Pour $a > 1$, $\quad \lim\limits_{x \to +0} \log_a x = \dfrac{1}{\operatorname{Log} a} \lim\limits_{x \to +0} \operatorname{Log} x = -\infty$

$\lim\limits_{x \to +\infty} \log_a x = \dfrac{1}{\operatorname{Log} a} \lim\limits_{x \to +\infty} \operatorname{Log} x = +\infty.$

Pour $0 < a < 1$, $\quad \lim\limits_{x \to +0} \log_a x = +\infty$

$\lim\limits_{x \to +\infty} \log_a x = -\infty$

d'où le tableau de variation :

$a > 1$

x	0	1	a	$+\infty$
$\log_a x$	$-\infty$ ↗	0 ↗	1 ↗	$+\infty$

$0 < a < 1$

x	0	a	1	$+\infty$
$\log_a x$	$+\infty$ ↘	1 ↘	0 ↘	$-\infty$

Il en résulte (cf. § 1.11) que la fonction $\log_a$ est une bijection de $]0, +\infty[$ sur $]-\infty, +\infty[$. Comme on a pour tout $x_1 > 0$ et tout $x_2 > 0$:

$$\log_a x_1 x_2 = \log_a x_1 + \log_a x_2,$$

la fonction $\log_a$ est encore (cf. § 6.2 b), comme la fonction logarithme népérien, un **isomorphisme** de $(\mathbb{R}_+^*, \times)$ sur $(\mathbb{R}, +)$.

La dérivée de la fonction $\log_a : \; x \longmapsto \log_a x = \dfrac{\operatorname{Log} x}{\operatorname{Log} a}$ en tout point $x > 0$ est

$$(\log_a x)' = \frac{(\operatorname{Log} x)'}{\operatorname{Log} a} = \frac{1}{x \operatorname{Log} a}.$$

Donc que que soit a donné strictement positif et différent de 1 et en tout point x réel > 0

$$\boxed{(\log_a x)' = \frac{1}{x \operatorname{Log} a}}$$

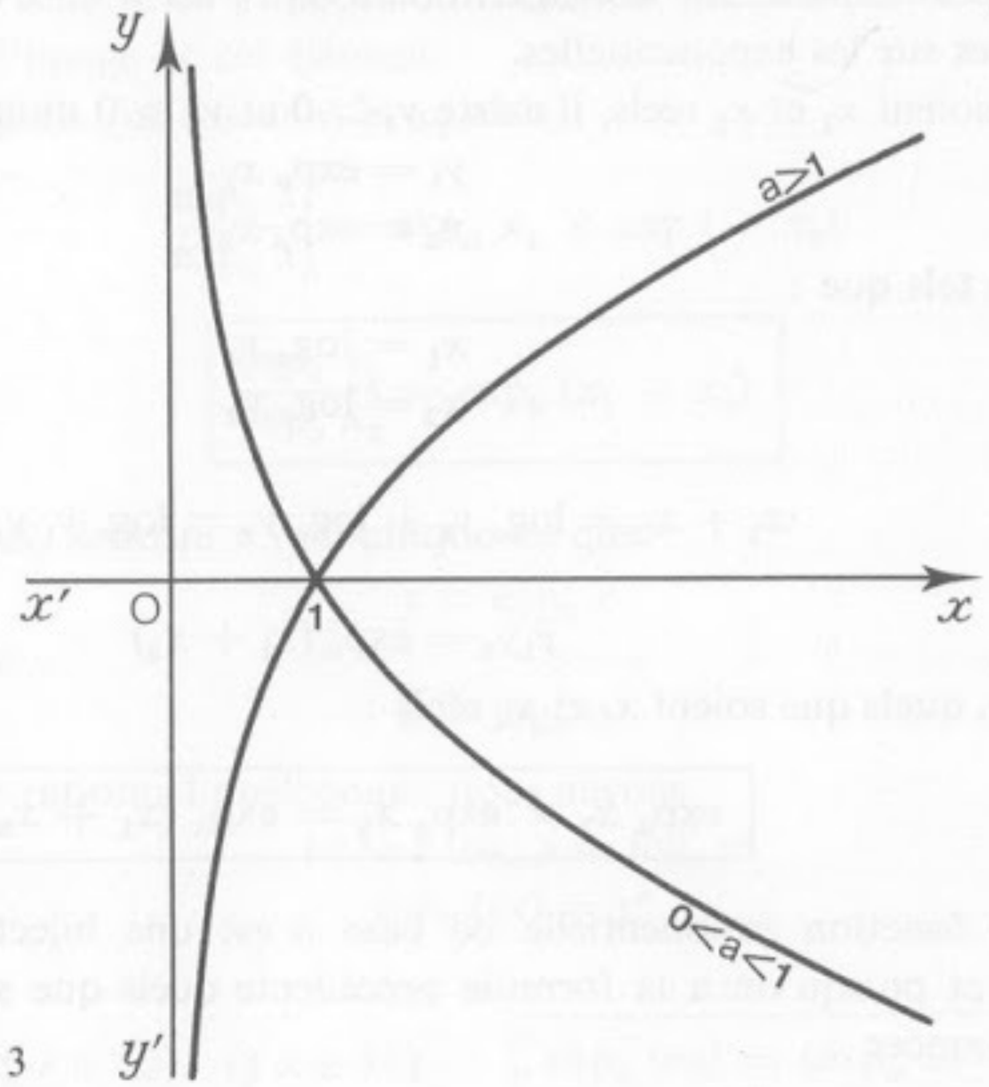

Fig. 3

La représentation graphique Γ_a de la fonction $\log_a$ est indiquée à la figure 3.

EXERCICE

6. Quelle est la transformation qui associe à Γ_a la courbe $\Gamma_{a'}$? (considérer les points de Γ_a et $\Gamma_{a'}$ de même abscisse).
Cas particulier des courbes Γ_a et $\Gamma_{\frac{1}{a}}$.

6. 4. FONCTION EXPONENTIELLE DE BASE *a*

a) Définition. Formules.

Si $a > 1$, on a vu que la fonction $\log_a$ est continue et strictement croissante sur $]0, +\infty[$, $\lim\limits_{x \to +0} \log_a x = -\infty$, $\lim\limits_{x \to +\infty} \log_a x = +\infty$ donc (cf. § 1.11) elle est une bijection de $]0, +\infty[$ sur $]-\infty, +\infty[$ et elle admet une fonction réciproque qui est une bijection continue et strictement croissante de $]-\infty, +\infty[$ sur $]0, +\infty[$.
Si $0 < a < 1$, la fonction $\log_a$ est continue et strictement décroissante sur $]0, +\infty[$, $\lim\limits_{x \to +0} \log_a x = +\infty$, $\lim\limits_{x \to +\infty} \log_a x = -\infty$ donc elle est une bijection de $]0, +\infty[$ sur $]-\infty, +\infty[$ et elle admet une fonction réciproque qui est une bijection continue et strictement décroissante de $]-\infty, +\infty[$ sur $]0, +\infty[$.

Définition.

Étant donné un nombre réel *a* strictement positif et différent de 1, on appelle **fonction exponentielle de base *a*** la fonction réciproque de la fonction logarithme de base *a*.

Nous désignerons la fonction exponentielle de base a par le symbole $\exp_a$. On a donc :

(1) $$(\forall x \in \mathbb{R}) \quad (\forall y \in \mathbb{R}_+^*) \quad \boxed{y = \exp_a x \iff x = \log_a y}.$$

le nombre $\exp_a x$ se lit « exponentielle de base a de x ».

Des formules données sur les logarithmes (cf. § 6.1 b et § 6.2 a) nous allons déduire des formules sur les exponentielles.

Quels que soient x_1 et x_2 réels, il existe $y_1 > 0$ et $y_2 > 0$ uniques tels que :

$$y_1 = \exp_a x_1$$
$$y_2 = \exp_a x_2$$

c'est-à-dire tels que :

$$x_1 = \log_a y_1$$
$$x_2 = \log_a y_2$$

or

$$x_1 + x_2 = \log_a y_1 + \log_a y_2 = \log_a y_1 y_2$$

donc

$$y_1 y_2 = \exp_a (x_1 + x_2)$$

c'est-à-dire, quels que soient x_1 et x_2 réels :

$$\boxed{\exp_a x_1 \times \exp_a x_2 = \exp_a (x_1 + x_2)}.$$

Puisque la fonction exponentielle de base a est une bijection de $]-\infty, +\infty[$ sur $]0, +\infty[$ et puisqu'on a la formule précédente quels que soient x_1 et x_2 réels, nous pouvons énoncer :

Théorème.

La fonction exponentielle de base a est un isomorphisme du groupe additif des nombres réels $(\mathbb{R}, +)$ sur le groupe multiplicatif des nombres réels strictement positifs $(\mathbb{R}_+^*, \times)$.

Plus généralement on démontrera de la même façon que quels que soient $x_1, x_2, \ldots, x_n$ réels :

$$\exp_a x_1 \times \exp_a x_2 \times \ldots \times \exp_a x_n = \exp_a (x_1 + x_2 + \ldots + x_n).$$

Il résulte de l'équivalence (1) que puisque $\log_a a = 1$, on a donc

$$\boxed{\exp_a 1 = a}$$

et puisque $\log_a 1 = 0$, on a donc

$$\boxed{\exp_a 0 = 1}$$

ce qui montre que l'image par cet isomorphisme de l'élément neutre de $(\mathbb{R}, +)$ est l'élément neutre de $(\mathbb{R}_+^*, \times)$.

Quel que soit x réel, il existe $y > 0$ unique tel que

$$y = \exp_a x$$

c'est-à-dire tel que

$$x = \log_a y$$

or

$$-x = -\log_a y = \log_a \frac{1}{y}$$

donc

$$\exp_a (-x) = \frac{1}{y}$$

c'est-à-dire, quel que soit x réel :

$$\boxed{\exp_a (-x) = \frac{1}{\exp_a x}}$$

ce qui montre que l'image de l'opposé d'un élément quelconque de $(\mathbb{R}, +)$ est l'inverse dans $(\mathbb{R}_+^*, \times)$ de l'image de cet élément.

Il en résulte que, quels que soient x_1 et x_2 réels,

$$\frac{\exp_a x_1}{\exp_a x_2} = \exp_a x_1 \times \exp (-x_2)$$

$$\boxed{\frac{\exp_a x_1}{\exp_a x_2} = \exp_a (x_1 - x_2)}.$$

Quel que soit x réel, il existe $y > 0$ unique tel que

$$y = \exp_a x$$

c'est-à-dire tel que

$$x = \log_a y,$$

si r est un nombre rationnel quelconque nous aurons

$$rx = r \log_a y = \log_a y^r$$

donc

$$\exp_a (rx) = y^r$$

c'est-à-dire

$$(\forall r \in \mathbb{Q}) \quad (\forall x \in \mathbb{R}) \quad \boxed{\exp_a (rx) = (\exp_a x)^r}.$$

b) Nouvelles notations. Conséquences.

1. Pour $x = 1$, cette dernière formule s'écrit, quel que soit r rationnel :

$$\exp_a r = (\exp_a 1)^r$$

on a vu que $\exp_a 1 = a$ donc, quel que soit r rationnel :

$$\exp_a r = a^r.$$

Nous sommes alors amenés à poser, *par convention*, pour tout a strictement positif et différent de 1 et pour tout x réel :

$$\boxed{\exp_a x = a^x}.$$

Les formules précédentes s'écrivent alors pour tout nombre a strictement positif et différent de 1, pour tout x_1, x_2, x réels, pour tout r rationnel :

$$a^{x_1} a^{x_2} = a^{x_1 + x_2}$$

$$a^1 = a, \qquad a^0 = 1$$

$$a^{-x} = \frac{1}{a^x}, \qquad \frac{a^{x_1}}{a^{x_2}} = a^{x_1 - x_2}$$

$$(a^x)^r = a^{rx}$$

REMARQUE

1. Pour tout r rationnel, on sait que $1^r = 1$ donc, par convention, pour tout x réel on écrira

$$1^x = 1$$

et les formules précédentes sont encore vraies pour $a = 1$.

2. Les formules que l'on vient de trouver sont les mêmes que celles relatives aux puissances d'exposants entiers ou rationnels. Cherchons encore de nouvelles extensions de ces formules.

On sait que, pour tout a strictement positif et différent de 1, pour tout x réel et pour tout $y > 0$:

$$\begin{aligned} y = \exp_a x &\Longleftrightarrow x = \log_a y \\ &\Longleftrightarrow x = \frac{\mathrm{Log}\, y}{\mathrm{Log}\, a} \\ &\Longleftrightarrow \mathrm{Log}\, y = x\, \mathrm{Log}\, a \end{aligned}$$

donc en remplaçant y par $\exp_a x = a^x$, on a pour tout a strictement positif et différent de 1 et pour tout x réel (et non plus seulement rationnel) :

(2) $$\boxed{\mathrm{Log}\, a^x = x\, \mathrm{Log}\, a}$$

ou encore

(3) $$\boxed{a^x = e^{x\, \mathrm{Log}\, a}}.$$

REMARQUES

2. Ces deux formules sont encore vraies pour $a = 1$ puisque $1^x = 1$ pour tout x réel (cf. remarque 1 précédente).

3. Soit la fonction logarithme de base a, pour tout $x > 0$ et tout α *réel* on peut écrire :

$$\log_a x^\alpha = \frac{\mathrm{Log}\, x^\alpha}{\mathrm{Log}\, a} = \alpha \frac{\mathrm{Log}\, x}{\mathrm{Log}\, a} \quad \text{d'après (2),}$$

donc pour tout $x > 0$ et tout α réel (et non plus seulement rationnel) :

$$\log_a x^\alpha = \alpha \log_a x.$$

On démontre alors les formules sur les puissances, quels que soient $a > 0$, $b > 0$, x_1, x_2, x réels :

$$\begin{aligned} (a^{x_1})^{x_2} &= a^{x_1 x_2} \\ (ab)^x &= a^x b^x \\ \left(\frac{a}{b}\right)^x &= \frac{a^x}{b^x}, \end{aligned}$$

on montrera, pour cela, que les logarithmes népériens des deux membres de chacune de ces égalités sont égaux.

EXERCICES

Simplifier les expressions suivantes :

1. $e^{5\, \mathrm{Log}\, 3}$. **2.** $e^{-3\, \mathrm{Log}\, 2}$.

3. $e^{2\, \mathrm{Log}\, 3}\, \mathrm{Log}\, \sqrt[3]{e}$. **4.** $\log_a [\log_a a^{(a^x)}]$.

c) Étude de la fonction exponentielle de base a.

Supposons $a > 0$ et $a \neq 1$. La fonction $\log_a$ étant continue et strictement monotone sur $]0, +\infty[$, on a vu (cf. § 6.5 a) qu'elle admet une fonction réciproque qui est la fonction exponentielle de base a continue et strictement monotone sur $]-\infty, +\infty[$.

Du tableau de variation de la fonction $\log_a$, on peut déduire celui de la fonction $\exp_a$ (cf. § 1.11) :

si $a > 1$

x	0		1		a		$+\infty$
$\log_a x$	$-\infty$	↗	0	↗	1	↗	$+\infty$

d'où

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
a^x	0	↗	1	↗	a	↗	$+\infty$

si $0 < a < 1$

x	0		a		1		$+\infty$
$\log_a x$	$+\infty$	↘	1	↘	0	↘	$-\infty$

d'où

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
a^x	$+\infty$	↘	1	↘	a	↘	0

Pour tout x réel et tout $y > 0$:

$$\begin{aligned} y = a^x &\Longleftrightarrow x = \log_a y \\ &\Longleftrightarrow x = \frac{\mathrm{Log}\, y}{\mathrm{Log}\, a} \end{aligned}$$

la dérivée de la fonction : $y \longmapsto \dfrac{\mathrm{Log}\, y}{\mathrm{Log}\, a}$ au point $y > 0$ est $\dfrac{1}{y\, \mathrm{Log}\, a}$ (cf. § 6.4 b) donc la dérivée de la fonction réciproque : $x \longmapsto a^x$ au point correspondant est

$$\frac{1}{\dfrac{1}{y\, \mathrm{Log}\, a}} = y\, \mathrm{Log}\, a = a^x\, \mathrm{Log}\, a.$$

Remarquons que si $a = 1$ la dérivée de : $x \longmapsto 1^x = 1$ au point x réel quelconque est aussi $0 = 1^x\, \mathrm{Log}\, 1$. Donc quels que soient $a > 0$ *donné* et x *variable* réelle :

$$\boxed{(a^x)' = a^x\, \mathrm{Log}\, a}$$

En particulier si $a = e$, la fonction exponentielle de base e s'appelle simplement » **la fonction exponentielle** » sans précision de la base (évidemment on précisera la base s'il peut y avoir ambiguïté).

Sa dérivée en tout point x réel est

$$\boxed{(e^x)' = e^x}$$

donc **la fonction exponentielle est égale à sa fonction dérivée.**

Dans un *même repère orthonormé*, la représentation graphique C_a de la fonction $\exp_a$ se déduit (cf. § 1 1.7 d) de celle de sa fonction réciproque $\log_a$ par symétrie par rapport à la première bissectrice du repère (fig. 4).

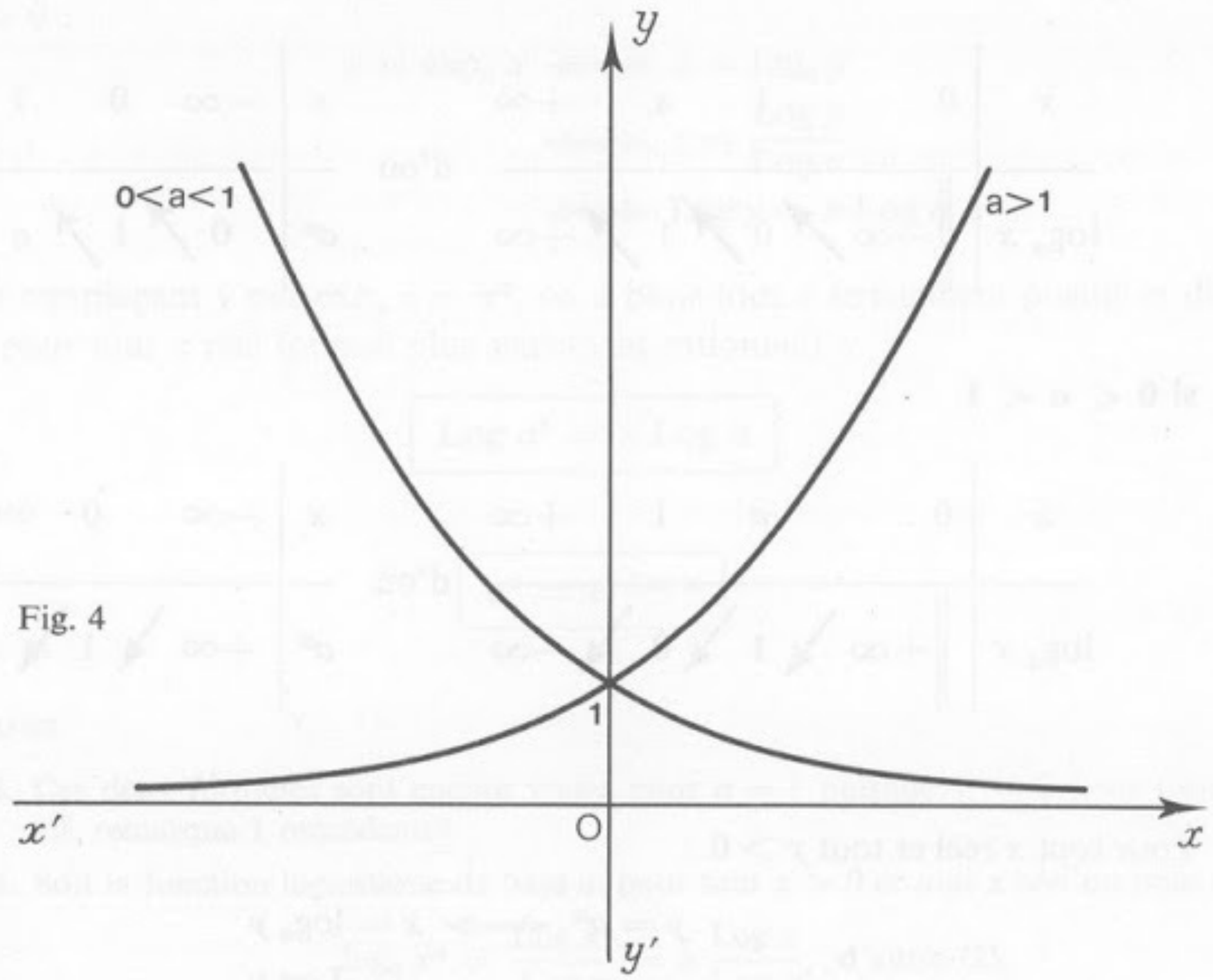

Fig. 4

EXERCICE

5. Quelle est la transformation qui associe à C_a la courbe C_a' ? (considérer les points de C_a et C_a, de même ordonnée). Cas particulier des courbes C_a et $C_{\frac{1}{a}}$.

Puisque la représentation graphique de la fonction logarithme népérien admet une branche parabolique, la direction asymptotique étant celle de Ox (cf. § 6.2 c), en raison de la symétrie par rapport à la première bissectrice du repère la représentation graphique de la fonction exponentielle admet une branche parabolique, la direction asymptotique étant celle de Oy.

Donnons une démonstration plus rigoureuse de ce résultat.

Étudions $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x}$. Nous avons $\lim\limits_{x\to+\infty} e^x = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} x = +\infty$, on ne peut en déduire immédiatement la limite de la fonction : $x \longmapsto \frac{e^x}{x}$ quand x tend vers $+\infty$.

Cherchons à nous ramener à une fonction connue en posant $x = \text{Log X}$ donc $X = e^x$. Nous avons $\lim\limits_{x\to+\infty} X = \lim\limits_{x\to+\infty} e^x = +\infty$. Pour tout x réel et par suite pour tout $X > 0$, on peut écrire :

$$\frac{e^x}{x} = \frac{X}{\text{Log X}}$$

on sait (cf. § 6.2. c) que $\lim\limits_{X\to+\infty} \frac{\text{Log X}}{X} = 0$, d'autre part pour $X > 1$ on a $\frac{\text{Log X}}{X} > 0$

donc $\lim\limits_{X\to+\infty} \frac{X}{\text{Log X}} = +\infty$.

D'où
$$\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x} = \lim_{X\to+\infty} \frac{X}{\text{Log X}}$$

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty}$$

ce qui montre que la courbe représentant la fonction exponentielle a bien une branche parabolique, la direction asymptotique étant celle de Oy.

Nous allons en déduire $\lim\limits_{x\to-\infty} x\,e^x$. Nous avons $\lim\limits_{x\to-\infty} x = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x = 0$, on ne peut en déduire immédiatement la limite de : $x \longmapsto xe^x$ quand x tend vers $-\infty$. Cherchons à nous ramener au cas précédent en posant $x = -X$. Nous avons $\lim\limits_{x\to-\infty} X = \lim\limits_{x\to-\infty} (-x) = +\infty$. Pour tout x réel et tout X réel :

$$xe^x = -Xe^{-X} = -\frac{X}{e^X}$$

d'où

$$\lim_{x\to-\infty} xe^x = -\lim_{X\to+\infty} \frac{X}{e^X}$$

donc

$$\boxed{\lim_{x\to-\infty} xe^x = 0}.$$

EXERCICES

Chercher si les fonctions suivantes ont une limite et donner, s'il y a lieu, la valeur de cette limite :

6. $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x^{\frac{p}{q}}}$ $\quad (p \in \mathbb{N}^*, q \in \mathbb{N}^*)$ $\left(\text{on posera } e^x = X^{\frac{p}{q}}\right)$.

7. $\lim\limits_{x\to-\infty} |x|^{\frac{p}{q}} e^x$ $\quad (p \in \mathbb{N}^*, q \in \mathbb{N}^*)$.

8. Former le taux d'accroissement de la fonction exponentielle entre 0 et h. En déduire $\lim\limits_{h\to 0} \frac{e^h - 1}{h}$.

En déduire $\lim\limits_{x\to 0} \frac{e^{\sin x} - 1}{x}$.

9. Si f est dérivable sur un intervalle I, une primitive quelconque, sur I, de la fonction $g : x \longmapsto e^{f(x)} \times f'(x)$ est la fonction $G : x \longmapsto e^{f(x)} + C$, C étant une constante réelle arbitraire.

Application. Chercher les primitives, en précisant les ensembles de définition, des fonctions g telles que :

$$g(x) = \frac{e^{\operatorname{tg} x}}{\cos^2 x}, \quad g(x) = (x^3 + 1)\, e^{x^4+4x+1}$$

$$g(x) = \frac{1}{x^2}\, e^{\frac{1}{x}}, \quad g(x) = (\sin 2x)\, e^{\cos^2 x}.$$

6. 5. NOMBRE e^{ix} ($x \in \mathbb{R}$). FONCTION COMPLEXE D'UNE VARIABLE RÉELLE

a) Définition. Formules.

Nous avons défini le symbole a^x pour a réel strictement positif et x réel et nous avons montré que les formules sur les puissances d'exposants entiers ou rationnels s'étendent aux nombres de la forme a^x (cf. § 6.5 b). On peut se demander alors si l'on peut définir un symbole tel que e^z ou a^z avec z complexe. Conformément au programme, nous nous bornerons à définir le symbole e^{ix} pour x réel.

Soit un nombre complexe quelconque de module 1. On peut l'écrire sous la forme $\cos x + i \sin x$, x étant un nombre réel quelconque. Par définition, nous poserons :

$$(1) \qquad (\forall x \in \mathbb{R}) \qquad \boxed{e^{ix} = \cos x + i \sin x} \cdot$$

La formule (1) est bien vérifiée pour $x = 0$ car $e^{i \times 0} = e^0 = 1$ et $\cos 0 + i \sin 0 = 1$.

On sait qu'il existe un homomorphisme surjectif de $(\mathbb{R}, +)$ sur le groupe multiplicatif des nombres complexes de module 1 (voir tome 1). Quels que soient x et x' réels on a :

$$(\cos x + i \sin x)(\cos x' + i \sin x') = \cos (x + x') + i \sin (x + x')$$

cette égalité peut s'écrire avec la définition (1) :

$$e^{ix} e^{ix'} = e^{i(x+x')};$$

quel que soit x réel, on sait que :

$$\frac{1}{\cos x + i \sin x} = \cos x - i \sin x$$

ce qui peut s'écrire d'après (1) :

$$\frac{1}{e^{ix}} = e^{-ix};$$

quels que soient x et x' réels :

$$\frac{\cos x + i \sin x}{\cos x' + i \sin x'} = \cos (x - x') + i \sin (x - x')$$

ce qui s'écrit d'après (1) :

$$\frac{e^{ix}}{e^{ix'}} = e^{i(x-x')}.$$

Quels que soient x réel et n entier relatif, la formule de Moivre :

$$(\cos x + i \sin x)^n = \cos nx + i \sin nx$$

peut s'écrire d'après (1) :

$$(e^{ix})^n = e^{inx}.$$

Tout nombre complexe écrit sous forme trigonométrique $z = r (\cos \alpha + i \sin \alpha)$ peut s'écrire sous la forme :

$$z = re^{i\alpha}$$

appelée **forme exponentielle** d'un nombre complexe. Cette forme exponentielle est commode, car nous voyons que les formules trouvées précédemment ne sont autres que les formules connues, et d'un emploi pratique, sur les puissances.

EXERCICES

1. Démontrer que l'on a, pour tout x réel, les **formules d'Euler :**

$$\cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}, \qquad \sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}.$$

En déduire la linéarisation de $\cos^4 x$ et $\sin^4 x$

$$\left[\text{les mettre sous la forme } \sum (a_k \cos kx + b_k \sin kx)\right].$$

2. Simplifier :

$$\frac{\cos \alpha + i \sin \alpha + \cos \beta + i \sin \beta}{1 + \cos (\alpha + \beta) + i \sin (\alpha + \beta)}$$

(α et β réels).

b) Fonction complexe d'une variable réelle.

Une fonction complexe d'une variable réelle est une application de $\mathbb{R}$ (ou une partie de $\mathbb{R}$) dans $\mathbb{C}$.

Si F est une application de D ($D \subset \mathbb{R}$) dans $\mathbb{C}$, à tout nombre x de D correspond un nombre complexe $F(x) = f(x) + ig(x)$; les fonctions : $x \longmapsto f(x)$ et $x \longmapsto g(x)$ sont des fonctions numériques définies sur D.

Réciproquement la donnée de f et g, fonctions numériques définies sur D ($D \subset \mathbb{R}$), détermine une application de D dans $\mathbb{C}$:

$$x \longrightarrow F(x) = f(x) + ig(x).$$

On sait (voir tome 1) que $\mathbb{C}$ est un espace vectoriel de dimension 2 sur le corps des réels et qu'il est commode de le munir de la norme euclidienne qui associe à tout nombre complexe $z = a + ib$ le nombre $\sqrt{a^2 + b^2}$ qui n'est autre que le module de z. Donc toute *fonction complexe d'une variable réelle est une fonction vectorielle et tout ce qui a été dit sur la continuité, les limites, les dérivées de fonctions vectorielles s'applique aux fonctions complexes d'une variable réelle.*

Exemple.

Soit $F : x \longmapsto f(x) + ig(x)$ définie sur D ($D \subset \mathbb{R}$), les nombres $f(x)$ et $g(x)$ sont les coordonnées du vecteur $F(x)$ dans la base formée par les nombres complexes 1 et i.

La fonction F est dérivable au point x de D si et seulement si f et g sont dérivables en x (cf. § 4.6 a) et en ce point :

$$F'(x) = f'(x) + ig'(x).$$

Soit, par exemple, la fonction complexe définie sur $\mathbb{R}$

$$F : x \longmapsto e^{i\omega x} = \cos \omega x + i \sin \omega x,$$

ω étant une constante réelle. En tout point x de $\mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} F'(x) &= -\omega \sin \omega x + i\omega \cos \omega x \\ &= \omega \left[\cos \left(\omega x + \frac{\pi}{2}\right) + i \sin \left(\omega x + \frac{\pi}{2}\right)\right] \\ &= \omega e^{i\omega x} \times e^{i\frac{\pi}{2}} \\ &= i\omega e^{i\omega x}. \end{aligned}$$

Donc en tout point x réel :

$$(e^{i\omega x})' = i\omega e^{i\omega x}$$

dérivée analogue à $(e^{ax})' = ae^{ax}$ lorsque a est réel donné et x variable réelle.
Si l'on pose $y = e^{i\omega x}$, on peut écrire pour tout x réel :

$$y' = i\omega e^{i\omega x}$$
$$y'' = i\omega \times i\omega \times e^{i\omega x}$$
$$y'' = -\omega^2 y.$$

II. Applications

6. 6. APPLICATION A LA RÉSOLUTION DE CERTAINES ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES

a) Équation différentielle : $y' = ay$ (a réel donné).

On sait que la dérivée de la fonction numérique de la variable réelle : $x \longmapsto y = e^{ax}$ (a réel donné) en tout point x réel est $y' = ae^{ax}$ donc, pour tout x réel, $y' = ay$.
Plus généralement, cherchons toutes les fonctions numériques f de la variable réelle : $x \longmapsto y = f(x)$ dérivables sur $\mathbb{R}$ et telles que, pour tout x réel, on ait

(1) $$\boxed{y' = ay}.$$

Si f existe, nous dirons qu'elle est une **solution de l'équation différentielle** (1).
Nous avons trouvé une solution $f_1 : x \longmapsto e^{ax}$.
Pour toute fonction numérique f dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout x réel, on peut poser

$$y = f(x) = g(x)\, e^{ax},$$

la fonction $g : x \longmapsto g(x) = \dfrac{f(x)}{e^{ax}} = f(x)\, e^{-ax}$ étant dérivable pour tout x réel puisque f et f_1 sont dérivables pour tout x réel et puisque e^{ax} n'est jamais nul.
Pour tout x réel,

$$y' = g'(x)\, e^{ax} + ag(x)\, e^{ax}$$

et pour tout x réel nous aurons

$$y' = ay \iff g'(x)\, e^{ax} + ag(x)\, e^{ax} = ag(x)\, e^{ax}$$
$$\iff g'(x) = 0$$

et nous aurons $g'(x) = 0$ pour tout x réel si et seulement s'il existe une constante réelle λ telle que $g(x) = \lambda$ pour tout x réel. L'ensemble des fonctions numériques de la variable réelle, solutions de l'équation différentielle (1), est l'ensemble des fonctions f définies sur $\mathbb{R}$ par

$$\boxed{f(x) = \lambda\, e^{ax}} \quad (\lambda \text{ constante réelle arbitraire}).$$

REMARQUE

1. On vérifiera que l'ensemble des solutions, muni de l'addition des fonctions numériques d'une variable réelle et de la multiplication par un nombre réel, est une droite vectorielle (c'est-à-dire un espace vectoriel de dimension 1) sur $\mathbb{R}$.

b) Applications.

Il existe de nombreux phénomènes (physiques, chimiques, biologiques, économiques) obéissant à une **loi exponentielle** c'est-à-dire que la mesure d'un tel phénomène est une fonction d'une variable vérifiant une équation différentielle du type $y' = ay$.
Pratiquement $y' = ay$ se traduit par $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} \simeq ay$ c'est-à-dire que si la variable prend des valeurs $x_1, x_2, \ldots, x_n, x_{n+1}$ et la fonction les valeurs correspondantes $y_1, y_2, \ldots, y_n, y_{n+1}$, on a :

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_{i+1} - y_i}{x_{i+1} - x_i} \simeq ay_i \text{ lorsque l'entier } i \text{ varie de 1 à } n.$$

Nous donnons quelques exemples de phénomènes obéissant à une loi exponentielle :

variable	phénomène étudié
altitude	pression atmosphérique
temps	différence des températures d'un corps et du milieu ambiant (loi du refroidissement de Newton)
temps	nombre de bactéries d'une culture
temps	nombre d'atomes de radium d'une substance radioactive qui se désintègrent naturellement
temps	valeur acquise d'un capital placé à intérêts composés.

c) Équation différentielle : $y'' = -\omega^2 y$ (ω réel donné).

On sait que la fonction complexe de la variable réelle : $x \longmapsto y = e^{i\omega x}$ (ω réel donné) a, en tout point x réel, pour dérivée : $y' = i\omega e^{i\omega x}$ et pour dérivée seconde : $y'' = i\omega \times i\omega \times e^{i\omega x} = -\omega^2 e^{i\omega x}$ donc, pour tout x réel, $y'' = -\omega^2 y$.
Plus généralement, cherchons toutes les fonctions *complexes* F de la variable réelle : $x \longmapsto y = F(x) = f(x) + ig(x)$ dérivables deux fois sur $\mathbb{R}$ et telles que, pour tout x réel, on ait

(2) $$\boxed{y'' = -\omega^2 y}.$$

Si F existe, nous dirons qu'elle est une solution de l'équation différentielle (2).
On peut remarquer que $(\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{C}), +, .)$, ensemble des fonctions complexes définies sur $\mathbb{R}$ muni de l'additions de ces fonction et de la multiplication par un nombre complexe, est un espace vectoriel sur $\mathbb{C}$ (on montrera qu'il possède les propriétés de définition d'un espace vectoriel).
Soit S l'ensemble des fonctions complexes de la variable réelle, solutions de (2). L'ensemble S n'est pas vide car la fonction nulle : $x \longmapsto 0$ définie sur $\mathbb{R}$ est une solution.
Pour tout couple (F_1, F_2) de solutions et tout couple (λ, μ) de nombres complexes, quel que soit x réel :

$$[\lambda F_1(x) + \mu F_2(x)]'' = \lambda F_1''(x) + \mu F_2''(x)$$
$$= \lambda[-\omega^2 F_1(x)] + \mu[-\omega^2 F_2(x)]$$
$$= -\omega^2 [\lambda F_1(x) + \mu F_2(x)]$$

donc $\lambda F_1 + \mu F_2$ est une solution de (2). Par suite (voir cours de Première), on peut affirmer que $(S, +, .)$ est un sous-espace vectoriel de $(\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{C}), +, .)$.

Recherche des solutions. Nous avons trouvé une solution $F_1 : x \longmapsto e^{i\omega x}$. On vérifie qu'une autre solution est $F_2 : x \longmapsto e^{-i\omega x}$, cette solution est distincte de la première si et seulement si $\omega \neq 0$. Nous supposerons, dans la suite, $\omega \neq 0$ (vous chercherez les solutions de (2) dans le cas où $\omega = 0$).

Puisque $(S, +, .)$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{C}$, les fonctions complexes de la variable réelle : $x \longmapsto \lambda e^{i\omega x} + \mu e^{-i\omega x}$, λ et μ étant des constantes complexes arbitraires, sont *des* solutions de l'équation différentielle (2). On démontre que ce sont les *seules*.

En effet, procédons comme dans *a*). Pour toute fonction complexe

$$F : x \longmapsto y = F(x)$$

dérivable deux fois sur $\mathbb{R}$ et pour tout x réel, on peut poser : $y = G(x)e^{i\omega x}$, G étant une fonction complexe dérivable deux fois sur $\mathbb{R}$ que nous allons déterminer. Pour tout x réel :

$$y' = e^{i\omega x}[G'(x) + i\omega\, G(x)]$$
$$y'' = e^{i\omega x}[G''(x) + 2i\omega\, G'(x) - \omega^2 G(x)]$$

et nous aurons, pour tout x réel,

$$y'' = -\omega^2 y \iff G''(x) = -2i\omega\, G'(x).$$

Donc F est solution de (2) si et seulement si G' est solution de l'équation différentielle :

(3) $$y_1' = -2i\omega y_1$$

qui est de la forme $y_1' = ay_1$ étudiée en a) mais ici $a = -2i\omega$ n'est plus réel. Cependant le raisonnement fait en a) est inchangé et les fonctions complexes de la variable réelle, solutions de (3), sont les fonctions : $x \longmapsto ke^{-2i\omega x}$ (k constante complexe arbitraire).

G (x) est de la forme $\alpha(x) + i\beta(x)$, les fonctions numériques α et β étant dérivables deux fois sur $\mathbb{R}$. Nous aurons $G'(x) = ke^{-2i\omega x}$ pour tout x réel si et seulement si pour tout x réel :

$$\alpha'(x) + i\beta'(x) = k(\cos 2\omega x - i \sin 2\omega x)$$

c'est-à-dire, pour tout x réel, $\begin{cases} \alpha'(x) = k\cos 2\omega x \\ \beta'(x) = -k \sin 2\omega x \end{cases}$

c'est-à-dire, pour tout x réel, $\begin{cases} \alpha(x) = \dfrac{k}{2\omega}\sin 2\omega x + C_1 \\ \beta(x) = \dfrac{k}{2\omega}\cos 2\omega x + C_2 \end{cases}$

(C_1 et C_2 constantes réelles arbitraires)
c'est-à-dire, pour tout x réel :

$$G(x) = \frac{k}{2\omega}(\sin 2\omega x + i\cos 2\omega x) + C_1 + iC_2$$
$$= \frac{ki}{2\omega}(\cos 2\omega x - i \sin 2\omega x) + C_1 + iC_2$$
$$= \frac{ki}{2\omega}e^{-2i\omega x} + C_1 + iC_2.$$

Donc F est solution de (2) si et seulement si, pour tout x réel :

$$F(x) = \left(\frac{ki}{2\omega}e^{-2i\omega x} + C_1 + iC_2\right)e^{i\omega x}$$

(4) $$\boxed{F(x) = \lambda e^{i\omega x} + \mu e^{-i\omega x}}$$

$\left(\lambda = C_1 + iC_2 \text{ et } \mu = \dfrac{ki}{2\omega} \text{ étant des constantes complexes arbitraires}\right)$.

Les fonctions complexes $F_1 : x \longmapsto e^{i\omega x}$ et $F_2 : x \longmapsto e^{-i\omega x}$ sont linéairement indépendantes car si $\lambda e^{i\omega x} + \mu e^{-i\omega x} = 0$ pour tout x réel, on a en particulier

pour $x = 0$, $\quad \lambda + \mu = 0$
pour $x = 1$, $\quad \lambda e^{i\omega} + \mu e^{-i\omega} = 0$

d'où

$$\lambda(e^{i\omega} - e^{-i\omega}) = 0$$
$$\lambda(e^{2i\omega} - 1) = 0$$

comme $\omega \neq 0$, on a $e^{2i\omega} \neq 1$, donc $\lambda = 0$, par suite $\mu = 0$.

Conclusion : l'ensemble des fonctions complexes de la variable réelle, solutions de l'équation différentielle (2), muni de l'addition de ces fonctions et de la multiplication par un nombre complexe, est un espace vectoriel sur $\mathbb{C}$, de dimension 2.

On trouve deux solutions simples en faisant dans (4) :

$\lambda = \mu = \dfrac{1}{2}$, on trouve la solution $F_3 : x \longmapsto \cos \omega x$

$\lambda = -\mu = \dfrac{1}{2i}$, — — $F_4 : x \longmapsto \sin \omega x$

(on vérifie, d'ailleurs, directement que F_3 et F_4 sont bien solutions de l'équation différentielle (2)). Comme ces solutions sont aussi linéairement indépendantes (si $A\cos\omega x + B\sin\omega x = 0$ pour tout x réel, en particulier pour $x = 0$ on déduit $A = 0$ et pour $x = \dfrac{\pi}{2\omega}$ on déduit $B = 0$), elles forment une base de l'espace vectoriel des solutions. L'ensemble des fonctions *complexes* de la variable réelle, solutions de (2), est l'ensemble des fonctions F définies sur $\mathbb{R}$ par

(5) $$\boxed{F(x) = A\cos\omega x + B\sin\omega x}$$

(A et B constantes *complexes* arbitraires).

Cherchons toutes les solutions qui sont des fonctions *numériques* de la variable réelle. Posons $A = a + ia'$, $B = b + ib'$ (a, a', b, b' réels quelconques).

Pour tout x réel, pour toute solution F, on peut écrire F (x) sous la forme :

$$F(x) = (a + ia')\cos\omega x + (b + ib')\sin\omega x,$$

la fonction F sera une fonction numérique de la variable réelle si et seulement si pour tout x réel : $a'\cos\omega x + b'\sin\omega x = 0$ ce qui n'a lieu, comme on l'a vu, que pour $a' = b' = 0$.

Conclusion : l'ensemble des fonctions *numériques* de la variable réelle, solutions de (2), est l'ensemble des fonctions F définies sur $\mathbb{R}$ par (5), A et B étant des constantes *réelles* arbitraires.

REMARQUES

2. On vérifiera que cet ensemble, muni de l'addition des fonctions numériques d'une variable réelle et de la multiplication par un nombre réel est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ de dimension 2.

3. Lorsque A et B sont réels, on peut écrire (5) sous la forme suivante, pour tout x réel (voir cours de Première) :

$$\boxed{F(x) = K\cos(\omega x + \varphi)}$$

(ou $F(x) = K\sin(\omega x + \varphi)$) et toutes les fonctions numériques de la variable réelle, solutions de l'équation différentielle (2), s'obtiennent en donnant à K et à φ des valeurs constantes, réelles, arbitraires.

4. Conformément au programme et en vue de ses nombreuses applications en Physique, nous avons cherché les solutions de l'équation différentielle : $y'' = -\omega^2 y$ (ω réel donné non nul). On verra (les démonstrations sont identiques) que les solutions de l'équation différentielle : $y'' = \omega^2 y$ (ω réel donné non nul) sont les fonctions :

$$x \longmapsto \lambda e^{\omega x} + \mu e^{-\omega x},$$

lorsque λ et μ sont des constantes complexes arbitraires on obtient toutes les fonctions complexes de la variable réelle solutions et lorsque λ et μ sont des constantes réelles arbitraires on obtient toutes les fonctions numériques de la variable réelle solutions.

d) Propriété caractéristique d'un phénomène vibratoire simple (ou sinusoïdal).

On a vu en classe de Première qu'un point d'abscisse x sur un axe de repère $(O, \vec{i})$ a un mouvement rectiligne vibratoire simple pendant l'intervalle de temps I si et seulement si sa loi horaire $f : t \longmapsto x = f(t)$ est définie sur I par

(6) $$\boxed{x = A \cos \omega t + B \sin \omega t + C}$$

(A, B, C, ω étant des constantes réelles, A et B non tous deux nuls et $\omega \neq 0$). ω s'appelle la **pulsation.**

De même, dans le plan affine euclidien orienté rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ de sens positif, le mouvement d'un point M sur un cercle de centre O est un mouvement circulaire vibratoire simple dans l'intervalle de temps I si et seulement si sa loi horaire φ : $t \longmapsto \theta = \varphi(t)$, θ étant une détermination de l'angle polaire de $\overrightarrow{OM}$, est définie encore sur I par une relation de la forme (6) (remplacer x par θ).

Plus généralement chaque fois qu'un phénomène de Physique ou de Mécanique est déterminé dans l'intervalle de temps I par la donnée d'une fonction $f : t \longmapsto x = f(t)$ définie par (6), on dit que c'est un **phénomène vibratoire simple (ou sinusoïdal).**

En posant $x - C = x_1$, on peut écrire pour tout t de I :

(7) $$x_1 = A \cos \omega t + B \sin \omega t$$

et on vérifie que pour tout t de I :

(8) $$\boxed{x_1'' = -\omega^2 x_1} \quad (\omega \text{ réel donné non nul}).$$

Réciproquement on vient de voir au sous-paragraphe *c)* précédent que toute solution de l'équation différentielle (8) peut être définie par (7) donc tout phénomène vibratoire simple de pulsation ω est caractérisé par la relation (8) dans un intervalle de temps.

EXERCICES

1. Trouver les fonctions numériques de la variable réelle, solutions de l'équation différentielle :

(1) $$y' = 2y.$$

Même question avec :

(2) $$y' = 2y + x$$

(on cherchera, pour cela, une fonction polynôme : $x \longmapsto y_1 = P(x)$ solution de (2) et on déduira toutes les solutions de (2) en posant $y = y_1 + Y$).

2. Trouver la solution de l'équation différentielle :

$$y'' + 4y = 0$$

sachant que pour $x = \frac{\pi}{4}$, on a $y = y' = 1$.

3. Trouver les fonctions numériques de la variable réelle, solutions de l'équation différentielle :

(1) $$y'' + 9y = 0.$$

Même question avec :

(2) $$y'' + 9y = 5x + 1.$$

(On cherchera, pour cela, une fonction polynôme : $x \longmapsto y_1 = P(x)$ solution de (2) et on déduira toutes les solutions de (2) en posant $y = y_1 + Y$).

4. Trouver les fonctions numériques de la variable réelle, solutions de l'équation différentielle :

$$(x^3 + 2x - 1)\, y' = 3x + 2.$$

5. Même question avec :

$$y'' = x^4 + x^2 - 2x + 3.$$

Trouver la solution telle que, pour $x = 0$, on ait : $y = 2$ et $y' = 1$.

6. 7. UTILISATION D'UNE RÈGLE A CALCUL

On sait que la fonction logarithme de base 10 est un isomorphisme de $(\mathbb{R}_+^*, \times)$ sur $(\mathbb{R}, +)$. *Le principe de la règle à calcul repose essentiellement sur l'existence de cet isomorphisme.* Dans tout ce qui suit, nous supposerons les nombres donnés strictement positifs.

a) Présentation.

La règle à calcul comprend trois parties (fig. 5) :

— le corps de la règle, fixe
— la réglette mobile
— le curseur possédant un trait central pour la lecture.

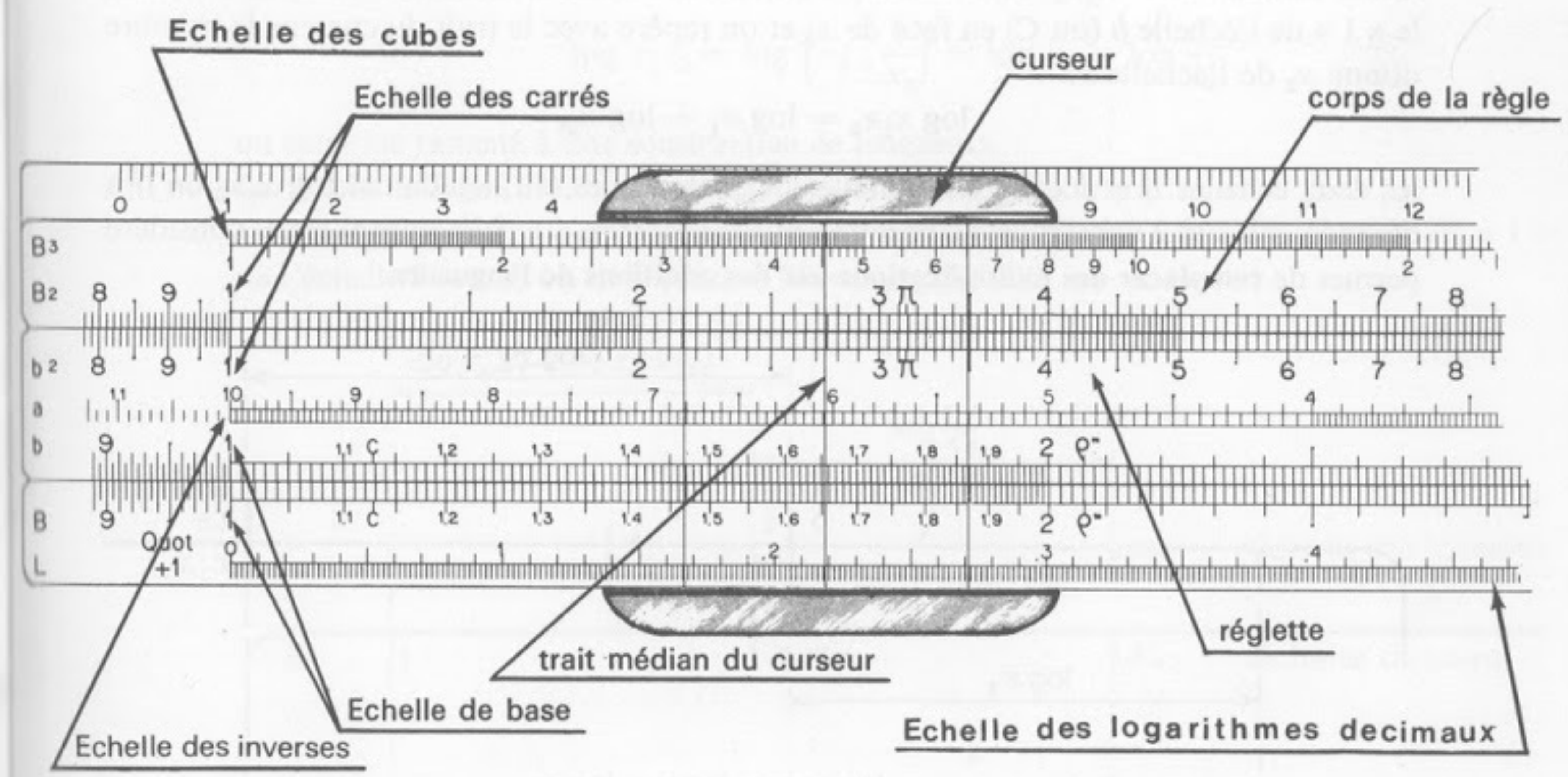

Fig. 5

Il existe dans certains modèles d'autres lettres que celles indiquées à la figure 5 pour désigner les diverses échelles. Par exemple

au lieu de	B^3	il y a	K	(échelle des cubes)
—	B^2	—	A	(— — carrés)
—	b^2	—	B	(— — carrés)
—	a	—	CI	(— — inverses)
—	b	—	C	(— de base)
—	B	—	D	(— de base)
—	L	—	L	(— logarithmes décimaux).

Il existe encore d'autres notations. *Observez bien le modèle que vous possédez.*

b) Échelle logarithmique. Multiplication.

Sur un axe $x'x$ muni d'un repère, portons les points d'abscisses :

$$\log 1 = 0, \quad \log 2 \simeq 0{,}301\,0, \quad \log 3 \simeq 0{,}477\,1, \quad \ldots, \quad \log 10 = 1.$$

Si au lieu de marquer les abscisses :

$$0 \qquad 0{,}301\,0 \qquad 0{,}477\,1 \qquad \ldots \qquad 1$$

on marque simplement les nombres :

$$1 \qquad 2 \qquad 3 \qquad \ldots \qquad 10,$$

on obtient ce qu'on appelle une **échelle logarithmique** (fig. 6).

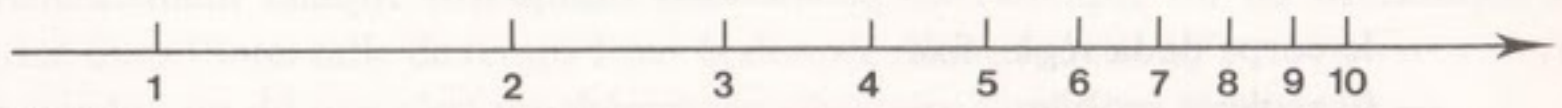

Fig. 6

Soit à calculer $N = x_1x_2$. Sur l'échelle B (ou D) on repère le nombre donné x_1. On place le « 1 » de l'échelle b (ou C) en face de x_1 et on repère avec le trait du curseur le nombre donné x_2 de l'échelle b.

$$\log x_1x_2 = \log x_1 + \log x_2,$$

les deux échelles B et b étant des échelles logarithmiques, au lieu de lire $\log x_1x_2$ on lira directement sur l'échelle B le nombre $N = x_1x_2$ (fig. 7). L'isomorphisme considéré permet de **remplacer des multiplications par des additions de longueurs.**

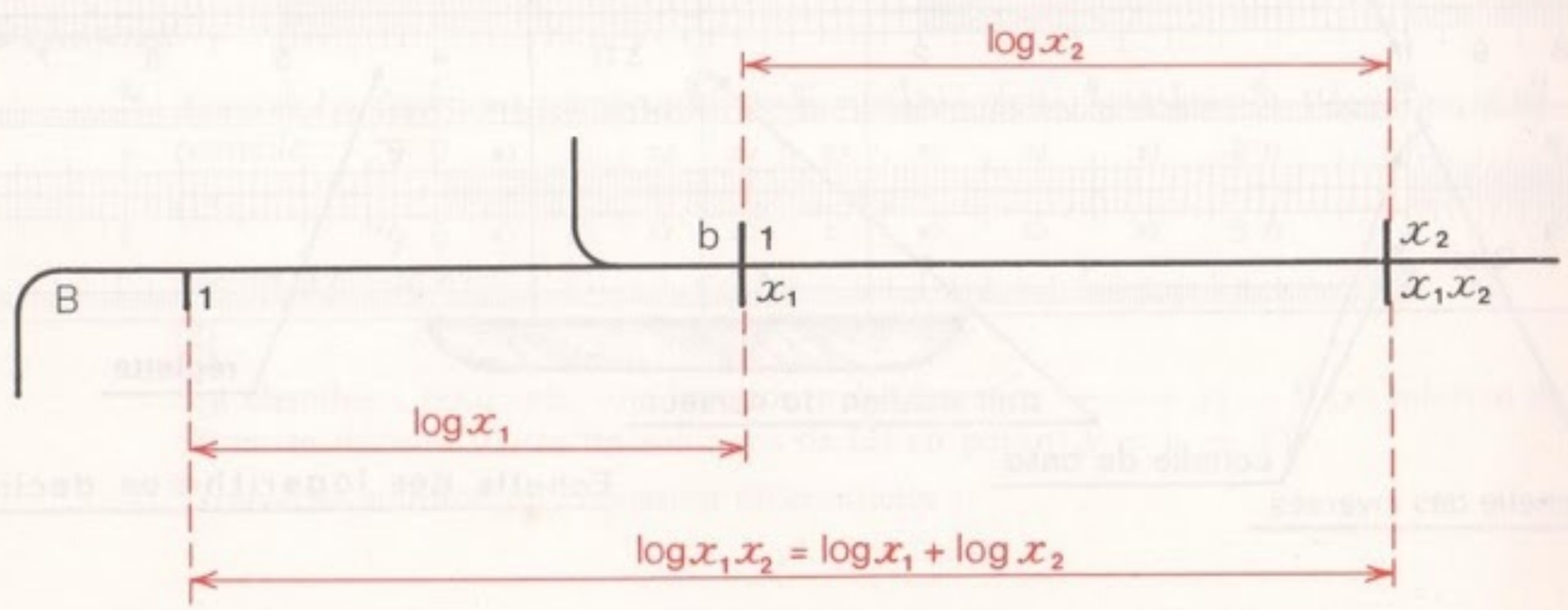

Fig. 7

On notera que la règle à calcul permet seulement de trouver les chiffres significatifs du produit. *L'ordre de grandeur du résultat n'est pas obtenu par lecture sur la règle, mais par calcul approché direct;* on remplace les nombres donnés par des nombres plus simples pour pouvoir situer le nombre N cherché entre deux puissances successives de 10 :

$$10^n \leqslant N < 10^{n+1},$$

N s'écrira alors : $N = a \times 10^n$ où $1 \leqslant a < 10$. *La règle à calcul permet seulement la détermination de a.*

EXERCICES D'ENTRAINEMENT

x_1	x_2	$x_1 \times x_2$	x_1	x_2	$x_1 \times x_2$
15,8	3,1	$4{,}9 \times 10$	8,02	11,1	$8{,}9 \times 10$
134	0,57	$7{,}63 \times 10$	4,28	14,8	$6{,}33 \times 10$
1,23	4,3	5,29	17,05	0,179	3,05
40,5	1,63	$6{,}60 \times 10$	133,5	0,336	$4{,}48 \times 10$
61,5	1,26	$7{,}75 \times 10$	2,47	2290	$5{,}66 \times 10^3$

c) Emploi de l'échelle des inverses.

Soit à calculer $N = 5{,}58 \times 0{,}732$. La méthode précédente n'est pas applicable puisque si l'on met bout à bout les segments correspondant à log 5,58 et log 0,732, on obtient log 5,58 + log 0,732 à l'extérieur de la règle.
On peut procéder de la façon suivante. Soit $N = x_1x_2$.

$$\log x_1x_2 = \log\left(x_1 : \frac{1}{x_2}\right) = \log x_1 - \log \frac{1}{x_2},$$

on est donc ramené à une **soustraction de longueurs.**
Sur l'échelle B (ou D) on repère x_1 à l'aide du trait du curseur.
Sur ce trait du curseur on indique x_2 de l'échelle des inverses a (ou CI). En face du « 1 » de l'échelle b (ou C) on lit le résultat $N = x_1x_2$ (fig. 8).

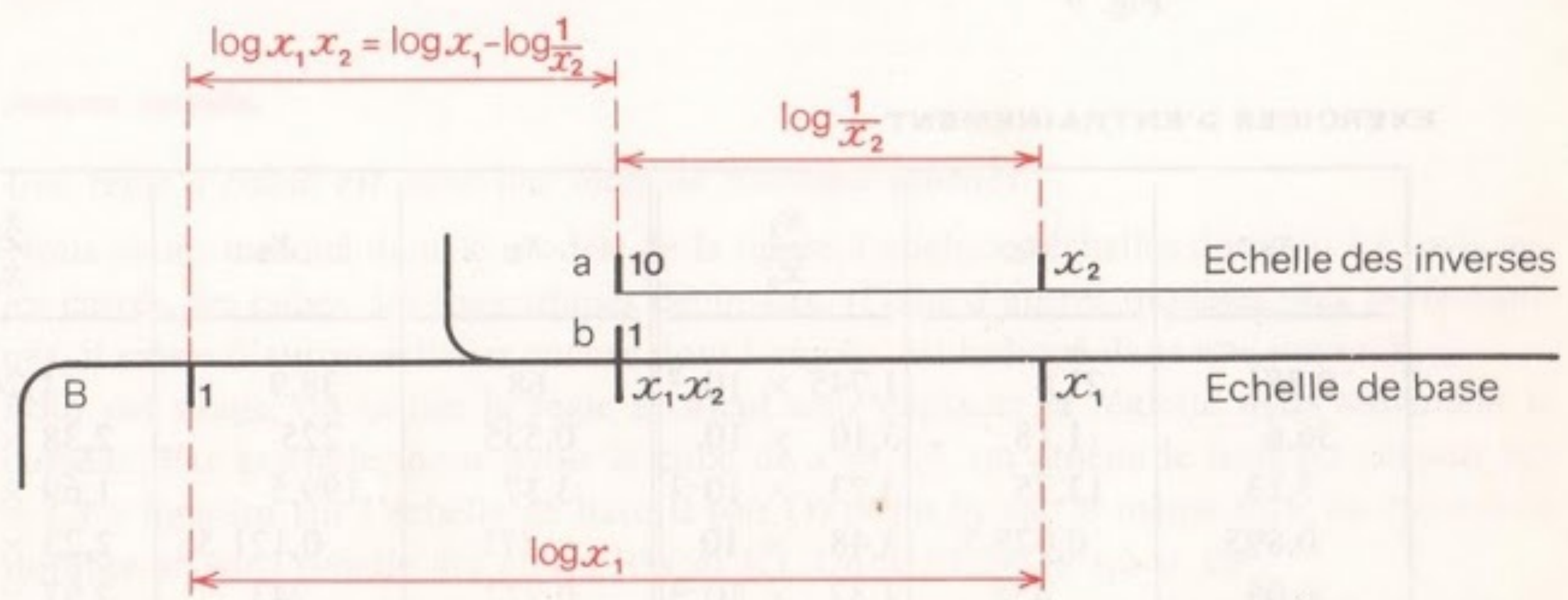

Fig. 8

EXERCICES D'ENTRAINEMENT

x_1	x_2	$x_1 \times x_2$	x_1	x_2	$x_1 \times x_2$
7,5	4,1	$3,07 \times 10$	41,7	0,763	$3,18 \times 10$
5,45	37	$2,02 \times 10^2$	572	0,0269	$1,540 \times 10$
31,3	0,465	$1,445 \times 10$	5,58	0,732	4,08
5,05	2,21	$1,115 \times 10$	885	0,002 51	2,22
3,73	0,343	1,28	9550	0,279	$2,66 \times 10^3$

d) Division.

Soit à calculer $N = \frac{x_1}{x_2}$.

$$\log \frac{x_1}{x_2} = \log x_1 - \log x_2,$$

suivant le trait du curseur on affiche x_1 de l'échelle B (ou D) et x_2 de l'échelle *b* (ou C). On lit le résultat sur l'échelle B (ou D) en face du « 1 » de l'échelle *b* (ou C) (fig. 9).

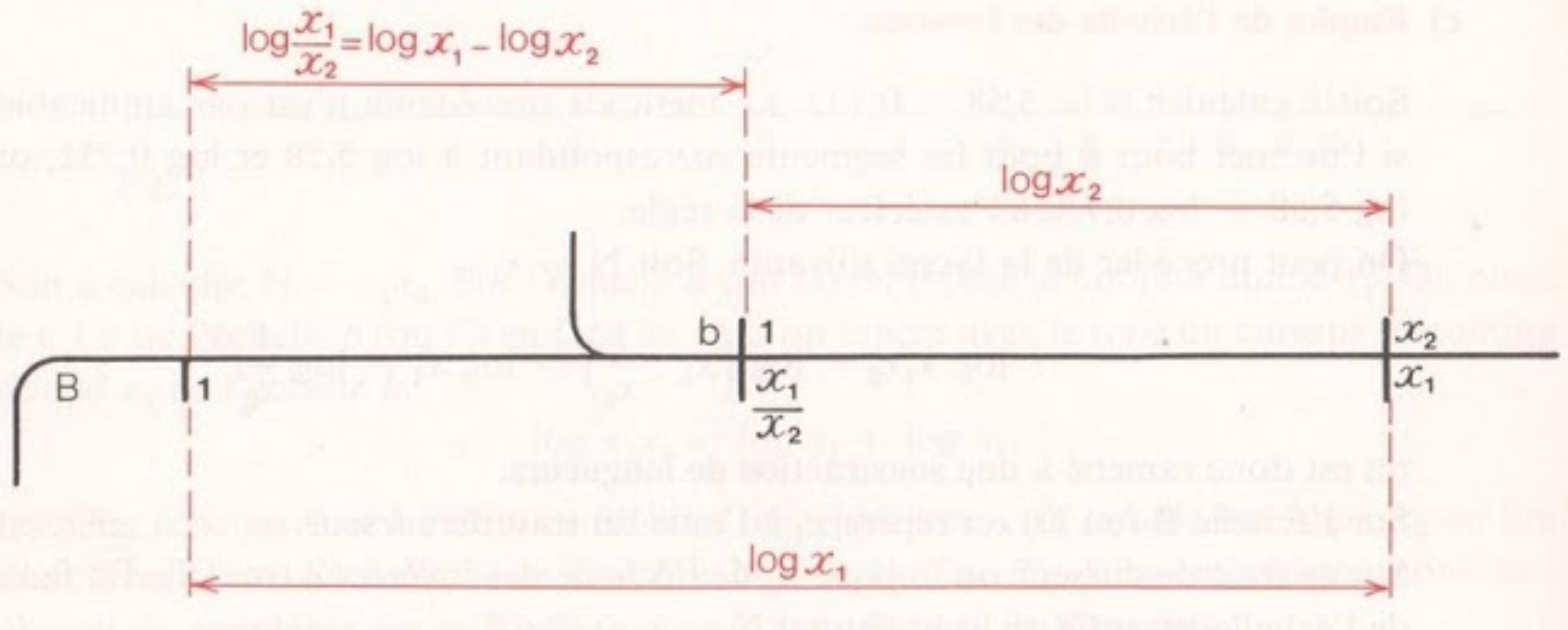

Fig. 9

EXERCICES D'ENTRAINEMENT

x_1	x_2	$\frac{x_1}{x_2}$	x_1	x_2	$\frac{x_1}{x_2}$
0,381	21,8	$1,745 \times 10^{-2}$	68	38,9	1,745
36,6	1,18	$3,10 \times 10$	0,535	225	$2,38 \times 10^{-3}$
5,13	13,75	$3,73 \times 10^{-1}$	3,37	199,5	$1,69 \times 10^{-2}$
0,895	0,025 7	$3,48 \times 10$	271	0,121 5	$2,23 \times 10^3$
6,05	458	$1,32 \times 10^{-2}$	0,722	243	$2,97 \times 10^{-3}$

Si on est « hors règle », par exemple pour $N = 47,2 : 71,3$, on peut procéder en utilisant l'échelle des inverses :

$$\log \frac{x_1}{x_2} = \log \left(x_1 \times \frac{1}{x_2} \right) = \log x_1 + \log \frac{1}{x_2};$$

en face de la graduation où on lit x_1 de l'échelle B (ou D), on place le « 10 » de l'échelle des inverses. Puis l'on repère avec le trait du curseur le nombre x_2 de l'échelle des inverses et on lit le résultat en face de ce trait du curseur sur l'échelle B (ou D) (fig. 10).

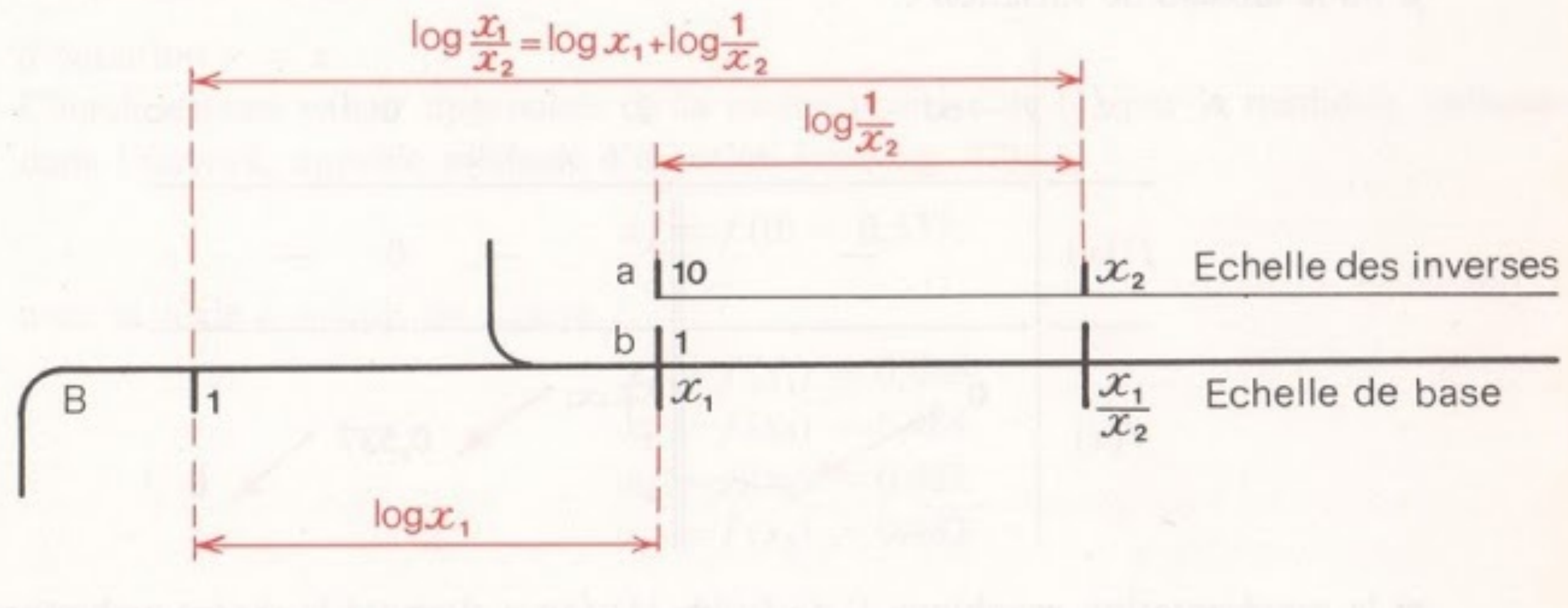

Fig. 10

EXERCICES D'ENTRAINEMENT

x_1	x_2	$\frac{x_1}{x_2}$	x_1	x_2	$\frac{x_1}{x_2}$
14,15	0,255	$5,55 \times 10$	0,235	4,35	$5,40 \times 10^{-2}$
2,43	81,5	$2,98 \times 10^{-2}$	47,2	51,3	$9,21 \times 10^{-1}$
87,2	0,925	$9,42 \times 10$	51,3	0,627	$8,19 \times 10$
4,35	0,074 3	$5,85 \times 10$	0,632	0,081 5	7,75
182,5	0,375	$4,86 \times 10^2$	0,091 5	0,985	$0,28 \times 10^{-2}$

e) Autres calculs.

Une règle à calcul est aussi une table de fonctions usuelles.

Nous avons indiqué dans le modèle de la figure 5 quelques échelles donnant les inverses, les carrés, les cubes, les logarithmes décimaux. (Dans d'autres modèles plus perfectionnés, il existe d'autres échelles encore dont l'emploi est indiqué dans une notice.)

Pour cet usage, on utilise la règle à calcul sans déplacer la réglette mais seulement le curseur. Par exemple, pour avoir le cube de $x = 7,5$, on amène le trait du curseur sur « 7,5 » figurant sur l'échelle de base B (ou D) et on lit sur le même trait du curseur le nombre x^3 sur l'échelle des cubes B^3 (ou K). On lit $(7,5)^3 \simeq 4,2 \times 10^2$.

Inversement, en plaçant le trait du curseur sur une division de l'échelle B^3 (ou K) on déduira la racine cubique sur l'échelle de base B (ou D).

Exercice résolu.

Étudier la fonction $f : x \longmapsto \dfrac{0{,}537}{x^3+1}$. *Calculer, avec trois chiffres significatifs,* $x_1 = f(0)$, $x_2 = f(x_1)$, $x_3 = f(x_2)$, $x_4 = f(x_3)$, $x_5 = f(x_4)$. *En déduire un encadrement de la racine* x_0 *positive de l'équation :* $x^4 + x - 0{,}537 = 0$.

Pour tout $x \neq -1$, la fonction est définie, continue et dérivable, sa dérivée étant

$$f'(x) = -0{,}537 \times \frac{3\,x^2}{(x^3+1)^2}$$

d'où le tableau de variation :

x	$-\infty$		-1		0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	‖	$-$	0	$-$	
$f(x)$	$0 \searrow -\infty$		‖	$+\infty \searrow$	$0{,}537$	$\searrow 0$	

et la représentation graphique Γ de f (fig. 11) (on a supposé le repère orthonormé).

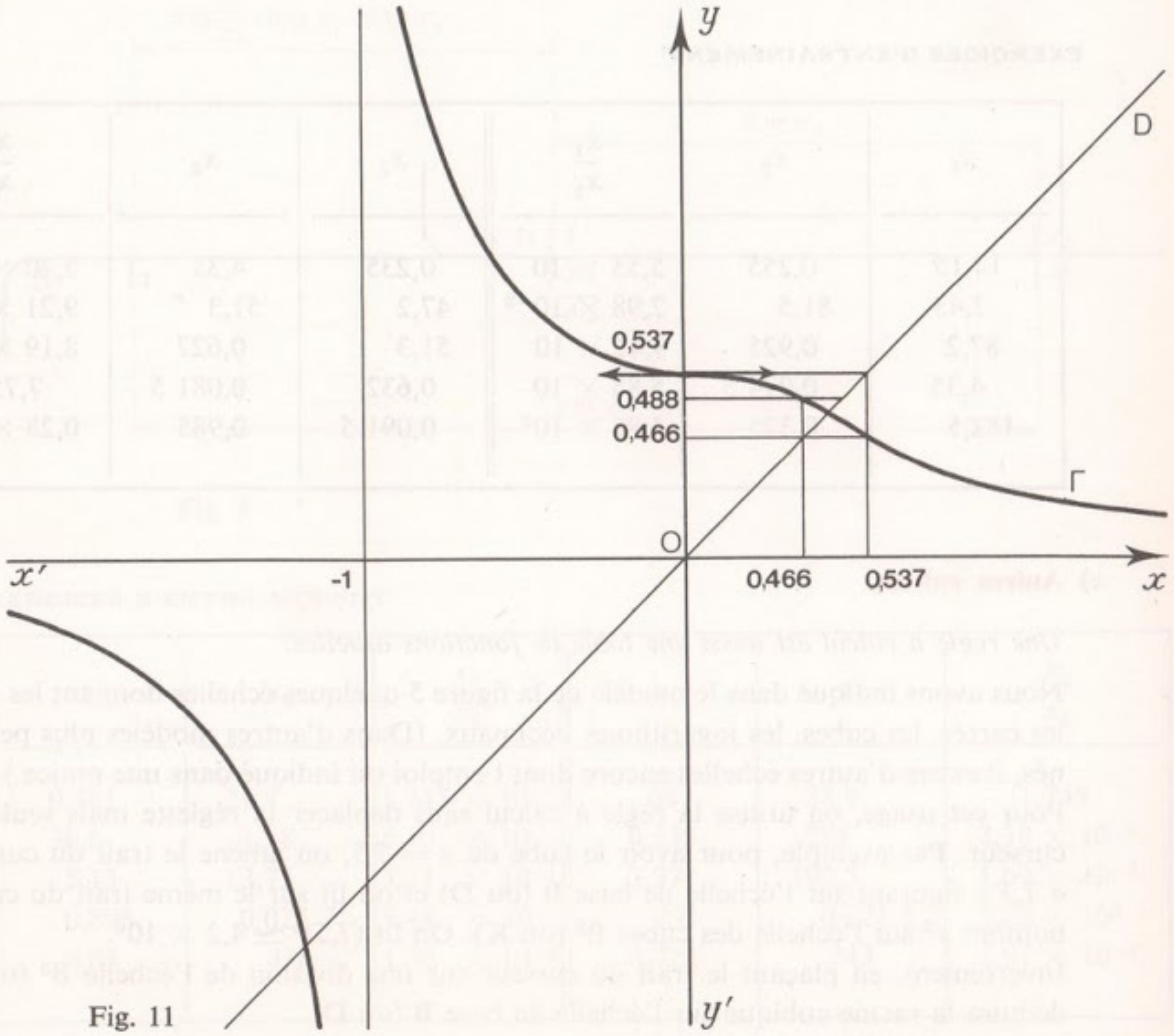

Fig. 11

Le point de cordonnées $x = 0$ et $f(0) = 0{,}537$ est un point d'inflexion puisque la courbe « traverse » la tangente en ce point qui est parallèle à Ox.

Pour tout x réel,

$$(1) \qquad x^4 + x - 0{,}537 = 0 \iff x(x^3+1) = 0{,}537 \qquad (2)$$

$$\iff x = \frac{0{,}537}{x^3+1} \quad \text{car} \quad x = -1$$

n'est pas racine de l'équation (2). La résolution de (1) revient à la recherche des abscisses des points communs à la courbe Γ précédente d'équation $y = \dfrac{0{,}537}{x^3+1}$ et à la droite D d'équation $y = x$.

Cherchons une valeur approchée de la racine positive de (1) par la méthode, indiquée dans l'énoncé, appelée **méthode d'itération** (voir fig. 12).

$$x_1 = f(0) = 0{,}537;$$

avec la règle à calcul, on trouve :

$$x_2 = f(x_1) = 0{,}466$$
$$x_3 = f(x_2) = 0{,}488$$
$$x_4 = f(x_3) = 0{,}482$$
$$x_5 = f(x_4) = 0{,}483$$

d'où un encadrement de la racine x_0 cherchée :

$$0{,}482 < x_0 < 0{,}483.$$

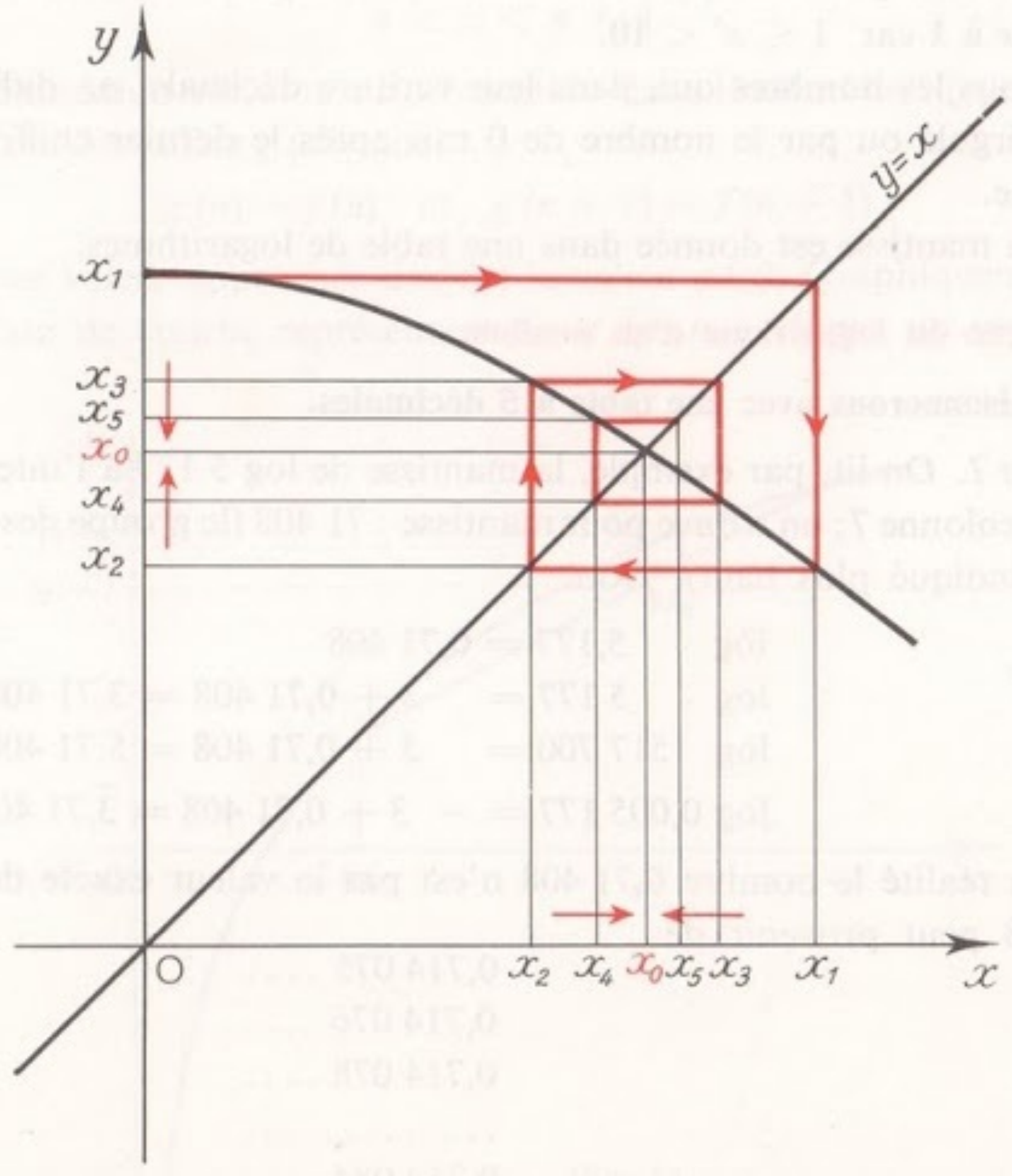

Fig. 12

6. 8. UTILISATION D'UNE TABLE DE LOGARITHMES

On sait que la fonction logarithme de base 10 est un isomorphisme de $(\mathbb{R}_+^*, \times)$ sur $(\mathbb{R}, +)$. *Comme pour la règle à calcul, le principe de la table de logarithme repose essentiellement sur l'existence de cet isomorphisme.*

a) Caractéristique et mantisse d'un logarithme.

Soit x un nombre réel > 0, il existe un entier relatif unique n tel que $10^n \leqslant x < 10^{n+1}$; il existe donc un nombre réel unique $x' > 0$ tel que :

$$x = 10^n x' \quad \text{avec} \quad 1 \leqslant x' < 10$$

d'où :

$$\log x = \log 10^n + \log x' = n + \log x'$$

avec :

$$0 \leqslant \log x' < 1.$$

Par exemple :

$$\begin{aligned} \log \quad 5\,177 &= \log (10^3 \times 5{,}177) = 3 + \log 5{,}177 \\ \log \quad 517\,700 &= \log (10^5 \times 5{,}177) = 5 + \log 5{,}177 \\ \log 0{,}005\,177 &= \log (10^{-3} \times 5{,}177) = -3 + \log 5{,}177. \end{aligned}$$

Le nombre n est appelé la **caractéristique** de $\log x$.

Si $x \geqslant 1$, la caractéristique est le nombre de chiffres, diminué de 1, de la partie entière de x écrit dans le système décimal.

Si $0 < x < 1$, la caractéristique est un entier strictement négatif, sa valeur absolue est le rang du premier chiffre non nul situé après la virgule dans l'écriture décimale de x.

Lorsque la caractéristique est négative au lieu d'écrire $n = -n'$ on l'écrit $\overline{n'}$; ainsi la caractéristique de log 0,005 177 est $\overline{3}$.

Le nombre $\log x'$ est appelé la **mantisse** de $\log x$, c'est un **nombre positif strictement inférieur à 1** car $1 \leqslant x' < 10$.

Ainsi tous les nombres qui, dans leur écriture décimale, ne diffèrent que par la place de la virgule ou par le nombre de 0 mis après le dernier chiffre significatif ont même mantisse.

Seule la mantisse est donnée dans une table de logarithmes.

b) Recherche du logarithme d'un nombre.

Nous raisonnerons avec une table à 5 décimales.

Exemple 1. On lit, par exemple, la mantisse de log 5 177 à l'intersection de la ligne 517 et de la colonne 7; on trouve pour mantisse : 71 408 (le groupe des deux premiers chiffres : 71 est indiqué plus haut). Donc :

$$\begin{aligned} \log \quad 5{,}177 &= 0{,}71\,408 \\ \log \quad 5\,177 &= \quad 3 + 0{,}71\,408 = 3{,}71\,408 \\ \log \quad 517\,700 &= \quad 5 + 0{,}71\,408 = 5{,}71\,408 \\ \log 0{,}005\,177 &= -\ 3 + 0{,}71\,408 = \overline{3}{,}71\,408 \end{aligned}$$

mais en réalité le nombre 0,71 408 n'est pas la valeur exacte de log 5,177. Le nombre 0,71 408 peut provenir de

0,714 075 ....
0,714 076 ....
0,714 078 ....
....
0,714 084 ....

donc une table de logarithmes à **5 décimales** donne une valeur approchée des mantisses, donc des logarithmes, à **5.10^{-6} près.** Plus généralement une table de logarithmes à p décimales donne une valeur approchée des logarithmes à $5.10^{-(p+1)}$ près. **On ne connaît pas le sens de l'approximation.**

REMARQUE

Pour l'écriture d'un logarithme avec 5 décimales, nous adoptons la disposition de la table à 5 décimales. Par exemple, nous écrirons

$$\log 5\,177 = 3{,}71\,408$$

au lieu de

$$\log 5\,177 = 3{,}714\,08$$

parce que la mantisse est 71 408 (il s'agit de $71\,408.10^{-5}$).

Exemple 2. Soit à calculer log 67,65. A l'intersection de la ligne 676 et de la colonne 5, on lit * 027. L'étoile indique qu'il faut aller chercher les deux premiers chiffres de la mantisse dans la ligne suivante; on trouve 83 d'où :

$$\log 67{,}65 = 1{,}83\,027.$$

Exemple 3. Si le nombre a plus de quatre chiffres significatifs, par exemple $x = 3\,252{,}4$, on lit dans la table :

pour 3 252	51 215
pour 3 253	51 228

nous devons procéder à une **interpolation linéaire.** Rappelons la méthode dans le cas général d'une fonction f strictement monotone sur un intervalle I et supposons que l'on connaisse les valeurs de f pour 1, 2, 3, ..., n, $n + 1$, ... appartenant à I. Nous nous proposons de calculer $f(x)$ pour x tel que

$$n < x < n + 1.$$

On fait l'approximation suivante : on remplace dans l'intervalle $[n, n + 1]$ la fonction f par une fonction affine g telle que :

$$g(n) = f(n) \quad \text{et} \quad g(n + 1) = f(n + 1)$$

et on prend pour valeur approchée de $f(x)$ la valeur $g(x)$. Graphiquement cela revient à remplacer l'arc de courbe représentant f sur $[n, n + 1]$ par un segment de droite (fig. 13).

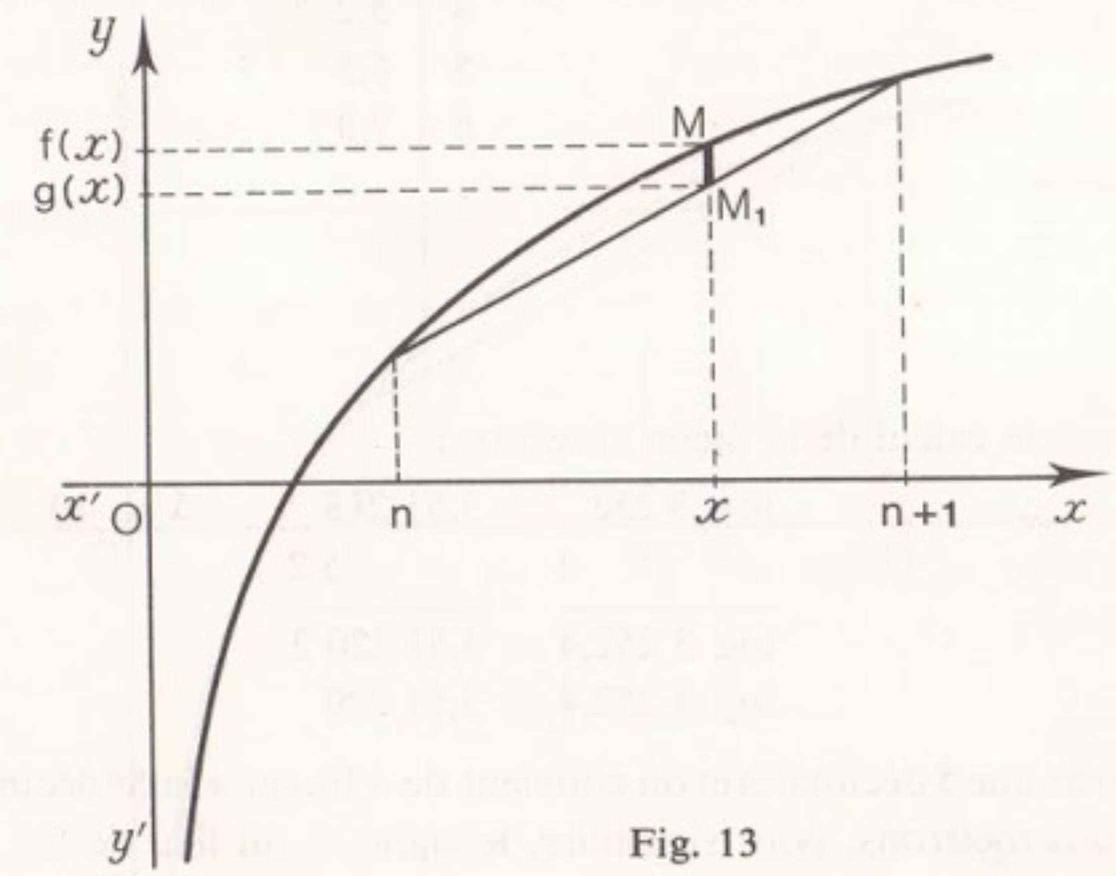

Fig. 13

Nous savons que pour une fonction affine, quels que soient $x_1 \neq x_2$, il existe un nombre a tel que :

$$\frac{g(x_2) - g(x_1)}{x_2 - x_1} = a$$

donc :

$$\frac{g(x) - g(n)}{x - n} = \frac{g(n+1) - g(n)}{(n+1) - n} = f(n+1) - f(n)$$

d'où, puisque $g(n) = f(n)$:

$$g(x) = f(n) + (x - n)[f(n+1) - f(n)].$$

Une valeur approchée de $f(x)$ est $g(x)$. Sur la figure 13, l'erreur commise est représentée par $\overline{M_1M}$; vous apprendrez plus tard à calculer un majorant de $|f(x) - g(x)|$ dans $[n, n+1]$. Les tables sont conçues de manière que cette erreur soit négligeable devant l'erreur due aux tables c'est-à-dire l'erreur commise sur la donnée des valeurs approchées de $f(n)$ et de $f(n+1)$ (qui est de 5.10^{-6} dans une table de logarithmes à 5 décimales). Le nombre $f(n+1) - f(n)$ s'appelle la **différence tabulaire** de f dans $[n, n+1]$.

Dans l'exemple précédent :

$$f(n+1) = \log 3\,253 = 3{,}51\,228$$
$$f(n) = \log 3\,252 = 3{,}51\,215$$

la différence tabulaire est $f(n+1) - f(n) = 13.10^{-5}$ d'où :

$$g(3\,252{,}4) = 3{,}51\,215 + 0{,}4 \times 13.10^{-5}$$

les petites tables d'interpolation figurant en marge des tables de logarithmes permettent d'éviter le calcul du produit

$$(x - n)[f(n+1) - f(n)] = 0{,}4 \times 13.10^{-5}$$

on lit ce produit dans la table d'interpolation relative à 13 (il s'agit de 13.10^{-5}); c'est le nombre associé à 4 (il s'agit de 0,4 dans notre exemple) qui est 5,2 (il s'agit de $5{,}2.10^{-5}$).

	13
1	1,3
2	2,6
3	3,9
4	5,2
5	6,5
6	7,8
.	.
.	.
.	.
.	.

On dispose le calcul de la façon suivante :

$$\begin{array}{lll} \log 3\,252 & = 3{,}51\,215 & \Delta = 13 \\ \qquad\quad 4 & \qquad\quad 5\,2 & \\ \hline \log 3\,252{,}4 & = 3{,}51\,220\,2 & \\ \log 3\,252{,}4 & = 3{,}51\,220 & \end{array}$$

on ne garde que 5 décimales et on convient de « forcer » la 5e décimale si la 6e est 5, 6, 7, 8 ou 9. Nous mettrons, pour simplifier, le signe = au lieu de $\simeq$.

Exemple 4. Soit à calculer log 3 252,46. On écrit :

$$\begin{array}{lll} \log 3\,252 & = 3{,}51\,215 & \Delta = 13 \\ \qquad 4 & = \qquad 5\,2 & \\ \qquad 6 & = \qquad 0\,78 & \\ \hline \log 3\,252{,}46 & = 3{,}51\,220\,98 & \\ \log 3\,252{,}46 & = 3{,}51\,221. & \end{array}$$

Lorsque le nombre donné x contient plus de 6 chiffres significatifs, il est inutile de faire des interpolations linéaires sur les chiffres significatifs placés après le sixième puisqu'on ne garde que 5 décimales pour $\log x$.

c) **Recherche d'un nombre dont le logarithme est connu.**

Connaissant $\log x$, il s'agit de déterminer x. La mantisse de $\log x$ va nous permettre de trouver les chiffres significatifs de x à l'aide de la table; ensuite la caractéristique nous permettra de déterminer complètement x.

Exemple 5. Soit $\log x = \bar{2}{,}91\,036$

la mantisse 91 036 se trouve dans la table et elle est à l'intersection de la ligne 813 et de la colonne 5 donc cette mantisse est associée au nombre 8 135. Puisque la caractéristique est $\bar{2}$,

$$x = 0{,}081\,35.$$

Exemple 9. Soit $\log x = 2{,}27\,819$

la mantisse 27 819 n'est plus dans la table mais on a

$$27\,807 < 27\,819 < 27\,830,$$

les mantisses 27 807 et 27 830 figurant dans la table. Nous devons procéder à une interpolation linéaire.

Dans l'intervalle $[n, n+1]$ le fonction f (ici la fonction logarithme de base 10) est remplacée par une fonction affine g telle que :

$$g(n) = f(n) \quad \text{et} \quad g(n+1) = f(n+1).$$

La méthode consiste à prendre pour valeur approchée de x, lorsque

$$n < x < n+1,$$

le nombre x_1 tel que $g(x_1) = f(x)$ (fig. 14)

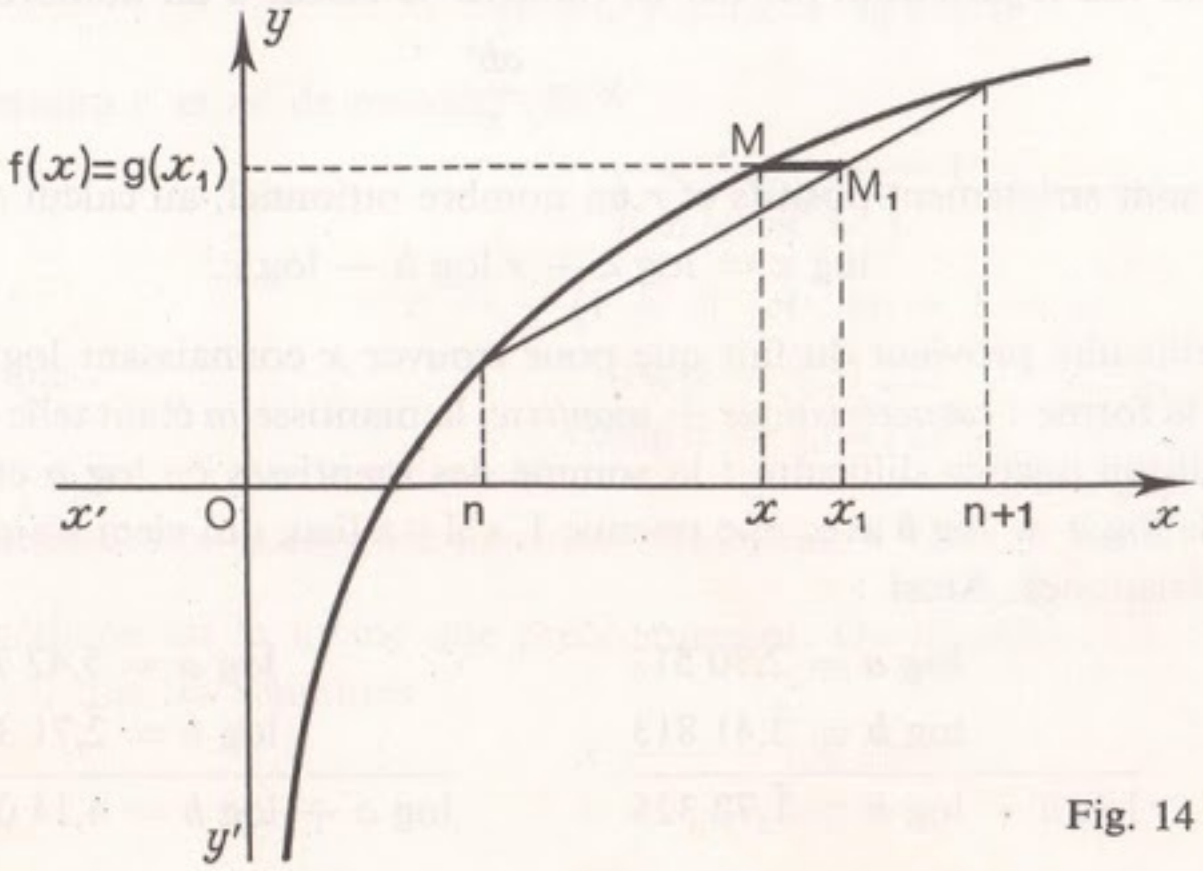

Fig. 14

$$\frac{g(x_1) - g(n)}{x_1 - n} = \frac{g(n+1) - g(n)}{(n+1) - n} = f(n+1) + f(n)$$

d'où

$$x_1 - n = \frac{f(x) - f(n)}{f(n+1) - f(n)}$$

$$x_1 = n + \frac{f(x) - f(n)}{f(n+1) - f(n)}$$

l'erreur commise en prenant x_1 pour valeur approchée de x est représentée sur la figure 14 par $\overline{M_1M}$; vous apprendrez plus tard à calculer un majorant de $|x - x_1|$ dans $[n, n+1]$. Une table est conçue pour que cette erreur soit négligeable devant celle qui est due à la table qui donne des valeurs approchées de $f(n)$ et de $f(n+1)$.

Dans l'exemple précédent : $\log x = 2{,}27\,819$

la mantisse de $n + 1 = 1\,898$ est $27\,830$ (plus précisément $27\,830 . 10^{-5}$)

de $n \quad = 1\,897 \quad\quad 27\,807$

différence tabulaire : $\Delta = 23$

$$f(x) - f(n) = 12$$

$$x_1 = n + \frac{f(x) - f(n)}{f(n+1) - f(n)} = 1\,897 + \frac{12}{23}$$

pour avoir x il restera à mettre la virgule (ou des zéros) convenablement, la petite table d'interpolation relative à 23 figurant en marge de la table des logarithmes évite de faire le calcul du quotient $\frac{12}{23}$. On écrit :

$$\begin{array}{lll}
\log x & = 2{,}27\,819 & \\
\log 189{,}7 & = 2{,}27\,807 & \Delta = 23 \\
\quad\quad 5 & \quad\; 11\,5 & \\
\quad\quad 2 & \quad\;\; 0\,46 & \\
\hline
\log 189{,}752 & = 2{,}27\,818\,96 & \\
x & = 189{,}752 &
\end{array}$$

d) Opérations sur les logarithmes.

L'utilisation des logarithmes permet de ramener le calcul d'un nombre tel que :

$$x = \frac{ab^r}{c},$$

où a, b, c sont strictement positifs et r un nombre rationnel, au calcul de

$$\log x = \log a + r \log b - \log c.$$

La seule difficulté provient du fait que pour trouver x connaissant $\log x$ il faut mettre $\log x$ sous la forme : *caractéristique* + *mantisse*, la mantisse m étant telle que $0 \leqslant m < 1$. Pour l'addition aucune difficulté : la somme des mantisses de $\log a$ et $\log b$ donne la mantisse de $\log a + \log b$ avec une retenue 1, s'il y a lieu, qui vient s'ajouter à la somme des caractéristiques. Ainsi :

$$\begin{array}{rl}
\log a = & 2{,}30\,512 \\
\log b = & \bar{3}{,}41\,813 \\
\hline
\log a + \log b = & \bar{1}{,}72\,325
\end{array}
\qquad\qquad
\begin{array}{rl}
\log a = & 5{,}42\,718 \\
\log b = & \bar{2}{,}71\,315 \\
\hline
\log a + \log b = & 4{,}14\,033
\end{array}$$

il n'y a aucune difficulté, non plus, pour la multiplication d'un logarithme par un entier positif, ainsi :

$$\begin{array}{rl}
\log a = & \bar{1}{,}38\,217 \\
& \times\, 4 \\
\hline
4 \log a = & \bar{3}{,}52\,868
\end{array}$$

car $4 \times (\bar{1}{,}38\,217) = 4\,[(-1) + 0{,}38\,217] = (-4) + (1{,}52\,868) = (-3) + 0{,}52\,868.$

Pour la division d'un logarithme par un nombre entier positif n on procédera comme le montrent les exemples suivants :

$$\frac{1}{2} \log a = \frac{4{,}42\,373}{2} = 2{,}21\,186$$

$$\frac{1}{5} \log a = \frac{6{,}31\,276}{5} = 1{,}26\,255$$

$$\frac{1}{3} \log a = \frac{\bar{6}{,}23\,785}{3} = \bar{2}{,}07\,928$$

$$\frac{1}{3} \log a = \frac{\bar{2}{,}74\,391}{3} = \frac{(-2) + 0{,}74\,391}{3} = \frac{(-3) + 1{,}74\,391}{3}$$

$$= (-1) + 0{,}58\,130$$

$$= \bar{1}{,}58\,130.$$

En revanche dans le calcul de $\log a - \log b$ la différence des deux mantisses est un nombre positif ou négatif; l'introduction du **cologarithme** d'un nombre va nous permettre de nous ramener à une addition de logarithmes.

On appelle cologarithme d'un nombre $x > 0$ le logarithme de son inverse. Le cologarithme de x s'écrit colog x; on a :

$$\operatorname{colog} x = \log \frac{1}{x} = -\log x$$

donc le cologarithme d'un nombre est aussi l'opposé de son logarithme. Désignons par c et m la caractéristique et la mantisse de $\log x$ et cherchons à mettre colog x sous la forme : *caractéristique* + *mantisse*, soit c' et m' cette caractéristique et cette mantisse. On peut écrire :

$$\log x + \operatorname{colog} x = 0$$

$$(c + m) + (c' + m') = 0$$

$$(c + c') + (m + m') = 0$$

on prendra c' et m' de manière que :

$$\begin{cases} c + c' = -1 \\ m + m' = 1 \end{cases}$$

d'où : $\quad c' = -(1 + c) \quad$ et $\quad m' = 1 - m.$

Exemple : $\quad \log x = \bar{4}{,}31\,273$

$\quad\quad\quad\quad \operatorname{colog} x = 3{,}68\,727$

e) Logarithmes des valeurs des fonctions circulaires.

La méthode est la même que précédemment. On n'oubliera pas, dans l'interpolation linéaire, que les fonctions :

$$x \longmapsto \log \sin x$$

$$x \longmapsto \log \operatorname{tg} x$$

sont strictement *croissantes* sur $\left]0\,,\frac{\pi}{2}\right[$, tandis que les fonctions :

$$x \longmapsto \log\cos x$$
$$x \longmapsto \log\operatorname{cotg} x$$

sont strictement *décroissantes* sur $\left]0\,,\frac{\pi}{2}\right[$.

Donnons des exemples.

Exemple 7. Soit à calculer log sin 29°15′29″.

On lit log sin 29°15′ à la page « 29 degrés » (qu'on lit en haut), à l'intersection de la ligne « 15′ » (lu dans la première colonne, à gauche) et de la colonne « sin » (lu en haut) :

$$\begin{array}{rll}
\log\sin 29^\circ 15' & = \bar{1},68\,897 & \Delta = 23 \\
20'' & \quad\ \ 7\,7 & \\
9'' & \quad\ \ 3\,5 & \\
\hline
\log\sin 29^\circ 15' 29'' & = \bar{1},68\,908\,2 & \\
\log\sin 29^\circ 15' 29'' & = \bar{1},68\,908 &
\end{array}$$

Exemple 8. Soit à calculer log cos 58,273 gr.

On lit log cos 58,28 gr à la page « 58 grades » (lu en bas), à l'intersection de la ligne « 28 cgr » (lu dans la dernière colonne, à droite) et de la colonne « cos » (lu en bas)

$$\begin{array}{rll}
\log\cos 58{,}28\ \text{gr} & = \bar{1},78\,492 & = 9 \\
-7 & \quad\ \ 6\,3 & \\
\hline
\log\cos 58{,}273\ \text{gr} & = \bar{1},78\,498\,3 & \\
\log\cos 58{,}273\ \text{gr} & = \bar{1},78\,498. &
\end{array}$$

REMARQUE

On pourrait faire une interpolation linéaire en partant de log cos 58,27 gr, on aurait alors une *diminution* de la mantisse.

Exemple 9.

$$\begin{array}{rll}
\log\operatorname{tg}(x^0) & = \bar{1},82\,331 & \\
\log\operatorname{tg} 33^\circ 39' & = \bar{1},82\,325 & \Delta = 27 \\
10'' & \quad\ \ 4\,5 & \\
3'' & \quad\ \ 1\,35 & \\
\hline
\log\operatorname{tg} 33^\circ 39' 13'' & = \bar{1},82\,330\,85 &
\end{array}$$

l'angle aigu cherché est : 33°39′13″.

f) Cas des « petits angles ».

Nous supposerons les angles aigus.

Lorsque l'angle est inférieur à 3 grades ou 4 degrés s'il s'agit de log sin x ou de log tg x (supérieur à 97 grades ou 86 degrés s'il s'agit de log cos x ou de log cotg x), la méthode d'interpolation linéaire est peu précise et l'on procède autrement.

La table donne :

$$\mathrm{S} = \log\frac{\sin x}{x} = \log\sin x - \log x,$$

dans log x l'*angle est mesuré en centigrades ou en secondes.* On peut alors calculer log sin x connaissant S et log x et calculer log x donc x connaissant S et log sin x.

De même, la table donne :

$$\mathrm{T} = \log\frac{\operatorname{tg} x}{x} = \log\operatorname{tg} x - \log x,$$

dans log x l'*angle est encore mesuré en centigrades ou en secondes.*

Exemple 10. Soit à calculer log sin 2°10′15″.

$$\begin{array}{rll}
2^\circ 10' & = 7\,800'' & \text{(donné dans la table)} \\
2^\circ 10' 15'' & = 7\,815'' & \\
\mathrm{S} & = \bar{6},68\,547\,1 & \\
\log 7\,815 & = 3,89\,293 & \\
\hline
 & \ \ \bar{2},57\,840\,1 & \\
\log\sin 2^\circ 10' 15'' & = \bar{2},57\,840. &
\end{array}$$

On vérifie que $\bar{2},57\,840$ est compris entre log sin 2°10′ = $\bar{2},57\,757$ et log sin 2°11′ = $\bar{2},58\,089$ qui sont donnés dans la table.

6.10 EXERCICES RÉSOLUS

1. *Résoudre dans* $\mathbb{R}$ *l'équation*

$$(1) \qquad \sqrt{a-\sqrt{x}} + \sqrt{a+\sqrt{x}} = \sqrt[4]{bx}$$

(a et b réels donnés, x réel cherché).

Application numérique : calculer x si l'on donne

$$a = 1{,}359 \qquad b = 21{,}538.$$

$\sqrt{x}$ n'a de sens que si $x \geqslant 0$.

$x = 0$ n'est solution de (1) que si $a = 0$, quel que soit b réel.

Si $x > 0$, $\sqrt[4]{bx}$ n'a de sens que si $b \geqslant 0$ et $\sqrt{a-\sqrt{x}}$ et $\sqrt{a+\sqrt{x}}$ n'ont de sens que si $-a \leqslant \sqrt{x} \leqslant a$ c'est-à-dire $a \geqslant 0$ et $0 \leqslant x \leqslant a^2$.

Donc si (1) a une solution *non nulle*, on a nécessairement :

$$(2) \qquad \begin{cases} a > 0 \\ b \geqslant 0 \\ 0 < x \leqslant a^2. \end{cases}$$

Quels que soient a, b, x réels vérifiant les conditions (2), les deux membres de (1) sont définis et positifs ou nuls donc en élevant au carré les deux membres de (1) on obtient l'équation équivalente :

$$(3) \qquad 2a + 2\sqrt{a^2 - x} = \sqrt{bx}.$$

Quels que soient a, b, x réels vérifiant les conditions (2), les deux membres de (3) sont aussi définis et positifs ou nuls donc en élevant au carré les deux membres de (3) on obtient l'équation équivalente :

$$4a^2 + 8a\sqrt{a^2 - x} + 4(a^2 - x) = bx$$

qui est équivalente à :

$$(4) \qquad 8a\sqrt{a^2 - x} = (b+4)x - 8a^2.$$

Quels que soient a, b, x réels vérifiant les conditions (2), on peut écrire les équivalences :

$$(4) \Longleftrightarrow \begin{cases} 64\,a^2\,(a^2 - x) = [(b+4)\,x - 8\,a^2]^2 & (5) \\ (b+4)\,x - 8\,a^2 \geqslant 0 & (6) \end{cases}$$

$$(5) \Longleftrightarrow x\left[x - \frac{16\,a^2b}{(b+4)^2}\right] = 0 \quad \text{(après simplification de (5))}$$

$$(6) \Longleftrightarrow x \geqslant \frac{8\,a^2}{b+4}. \quad (7)$$

Nous avons déjà étudié le cas $x = 0$.

$x = \dfrac{16\,a^2\,b}{(b+4)^2}$ n'est solution non nulle de (1) que si les conditions (2) et (7) sont vérifiées c'est-à-dire si et seulement si : $\begin{cases} a > 0 \\ b \geqslant 0 \\ \dfrac{8\,a^2}{b+4} \leqslant \dfrac{16\,a^2b}{(b+4)^2} \leqslant a^2. \end{cases}$

Quels que soient $a > 0$ et $b \geqslant 0$,

$$\frac{8\,a^2}{b+4} \leqslant \frac{16\,a^2b}{(b+4)^2} \Longleftrightarrow b + 4 \leqslant 2\,b \Longleftrightarrow b \geqslant 4$$

$$\frac{16\,a^2b}{(b+4)^2} \leqslant a^2 \Longleftrightarrow 16\,b \leqslant (b+4)^2$$

$$\Longleftrightarrow (b-4)^2 \geqslant 0 \quad \text{vérifiée.}$$

Conclusion :

si $a = 0$ et b réel quelconque, la solution de (1) est $x = 0$

si $a > 0$ et $b \geqslant 4$, la solution de (1) est $x = \dfrac{16\,a^2b}{(b+4)^2}$

dans les autres cas, (1) n'a pas de solution.

Application numérique.

Pour $a = 1{,}359$ et $b = 21{,}538$, les conditions $a > 0$ et $b \geqslant 4$ sont vérifiées et la solution de (1) est :

$$x = \frac{16 \times (1{,}359)^2 \times 21{,}538}{(25{,}538)^2}.$$

Nous avons : $\log x = \log 16 + 2 \log 1{,}359 + \log 21{,}538 + 2\,\text{colog}\,25{,}538$.

On peut disposer les calculs de la manière suivante. Nous avons écrit les logarithmes avec 5 décimales.

Calculs auxiliaires

$$\begin{array}{rll}
\log\ 1{,}359 = & 0{,}13\ 322 & \\
2 \log\ 1{,}359 = & 0{,}26\ 644 & \\
\log 21{,}53\ = & 1{,}33\ 304 & \Delta = 21 \\
8 \quad & \quad 16\ 8 & \\
\hline
\log 21{,}538 = & 1{,}33\ 321 & \\
\log 25{,}53\ = & 1{,}40\ 705 & \Delta = 17 \\
8 \quad & \quad 13\ 6 & \\
\hline
\log 25{,}538 = & 1{,}40\ 719 & \\
\text{colog}\ 25{,}538 = & \bar{2}{,}59\ 281 & \\
2\ \text{colog}\ 25{,}538 = & \bar{3}{,}18\ 562 &
\end{array}$$

Calculs définitifs

$$\begin{array}{rll}
\log 16 = & 1{,}20\ \ 412 & \\
2 \log\ 1{,}359 = & 0{,}26\ \ 644 & \\
\log 21{,}538 = & 1{,}33\ \ 321 & \\
2\ \text{colog}\ 25{,}538 = & \bar{3}{,}18\ \ 562 & \\
\hline
\log x = & \bar{1}{,}98\ \ 939 & \\
\log\ 0{,}975\ 8 = & \bar{1}{,}98\ \ 936 & \Delta = 5 \\
6 \quad & \quad\quad\ 3 & \\
\hline
\log\ 0{,}975\ 86 \doteq & \bar{1}{,}98\ \ 939 & \\
x = & 0{,}975\ 86 &
\end{array}$$

2. *Étudier la fonction numérique de la variable réelle $f : x \longmapsto x - \text{Log}\,|x-2|$.*
Calculer l'aire de la partie Δ définie par

$$\begin{cases} 4 \leqslant x \leqslant 5 \\ 0 \leqslant y \leqslant f(x) \end{cases}$$

(On suppose le plan affine euclidien rapporté à un repère orthonormé).
Donner un encadrement de cette aire sachant que l'on connaît les valeurs approchées suivantes, à 5.10^{-5} près :

$$\text{Log}\,2 = 0{,}693\,1$$
$$\text{Log}\,3 = 1{,}098\,6$$

La fonction $f : x \longmapsto x - \text{Log}\,|x-2|$ est définie pour tout $x \neq 2$.
Elle est également continue et dérivable pour tout $x \neq 2$, sa dérivée étant :

$$f'(x) = 1 - \frac{1}{x-2} = \frac{x-3}{x-2}$$

d'où le tableau de variation

x	$-\infty$		2		3		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	‖	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	$+\infty$ ‖ $+\infty$	↘	3	↗	$+\infty$

Nous avons indiqué dans le tableau les limites aux bornes que l'on étudie de la façon suivante :

$$\lim_{x \to -\infty} x = -\infty$$
$$\lim_{x \to -\infty} (-\,\text{Log}\,|x-2|) = -\infty$$

d'où $\quad \displaystyle\lim_{x \to -\infty} (x - \text{Log}\,|x-2|) = -\infty;$

on ne peut raisonner ainsi pour $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} f(x)$, on peut écrire pour tout x différent de 0 et de 2 :

$$f(x) = x\left(1 - \frac{\text{Log}\,|x-2|}{x}\right)$$

$$(1) \qquad f(x) = x\left(1 - \frac{\text{Log}\,|x-2|}{x-2}\,\frac{x-2}{x}\right);$$

on a

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\text{Log}\,|x-2|}{x-2} = 0 \quad \text{(cf. § 6.2 c)}$$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{x-2}{x} = 1$$

d'où $\quad \displaystyle\lim_{x \to +\infty} \left(1 - \frac{\text{Log}\,|x-2|}{x-2}\,\frac{x-2}{x}\right) = 1$

par suite $\quad \displaystyle\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty;$

d'autre part $\lim_{x \to 2} \operatorname{Log} |x-2| = -\infty$ (cf § 6.2 b)

d'où $\lim_{x \to 2} f(x) = +\infty.$

La droite d'équation $x = 2$ est une asymptote.

Par ailleurs en utilisant (1) :

$$\lim_{|x| \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{|x| \to +\infty} \left(1 - \frac{\operatorname{Log}|x-2|}{x-2} \frac{x-2}{x}\right) = 1$$

et nous avons :

$$\lim_{|x| \to +\infty} [f(x) - x] = \lim_{|x| \to +\infty} (-\operatorname{Log}|x-2|) = -\infty$$

donc la courbe représentative (fig. 15) admet une branche parabolique, la direction asymptotique étant celle de la droite d'équation $y = x$ (cf. § 3.5 d).

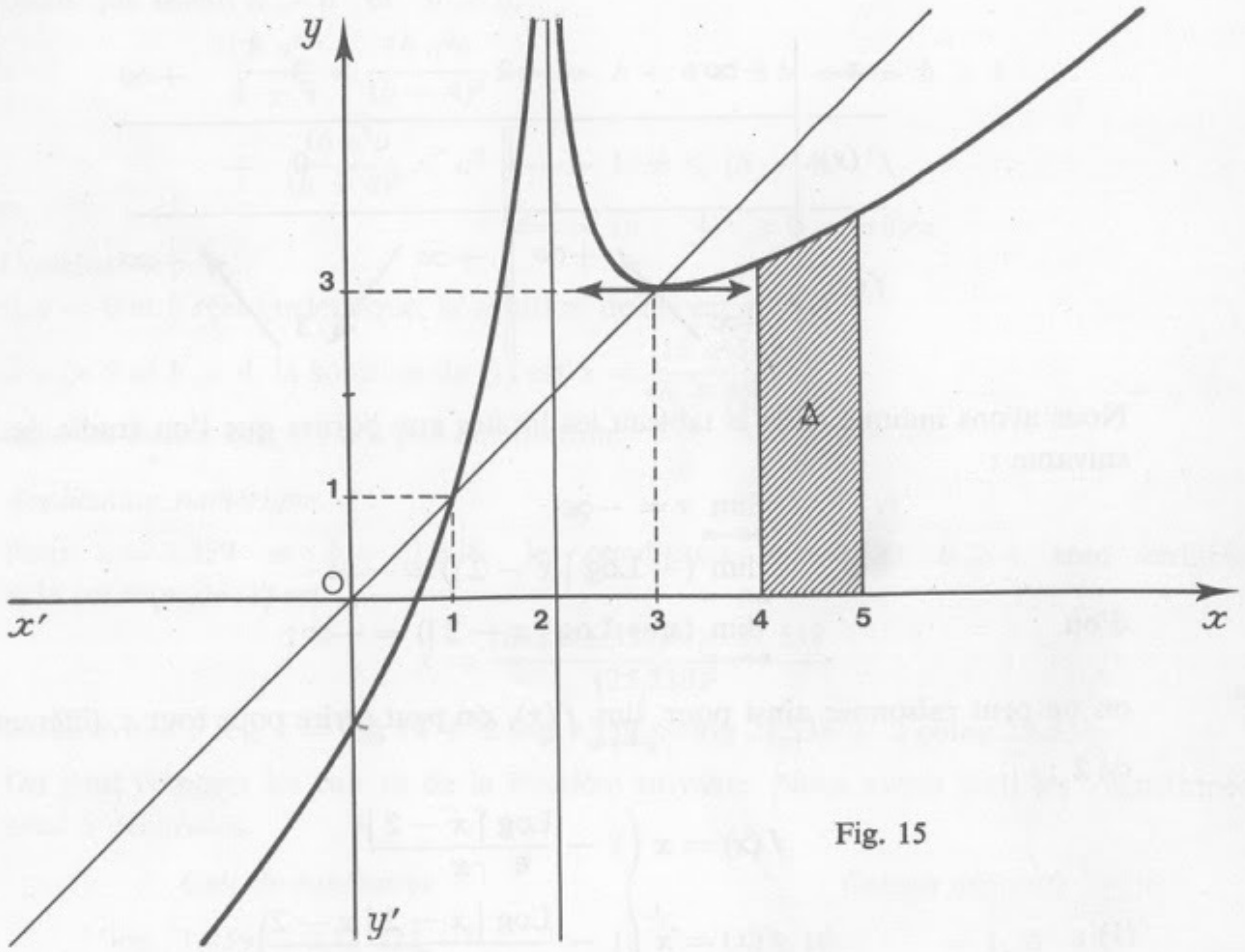

Fig. 15

Les points d'intersection de la courbe et de la droite d'équation $y = x$ ont pour abscisses les solutions de l'équation :

(2) $$x - \operatorname{Log}|x-2| = x.$$

Pour tout x réel,

$$(2) \iff \operatorname{Log}|x-2| = 0$$
$$(2) \iff |x-2| = 1$$
$$(2) \iff (x - 2 = 1 \text{ ou } x - 2 = -1)$$
$$(2) \iff (x = 3 \text{ ou } x = 1)$$

Calcul de l'aire.

$$\mathcal{A}(\Delta) = \int_4^5 (x - \operatorname{Log}|x-2|)\, dx$$

$$\mathcal{A}(\Delta) = \left[\frac{x^2}{2}\right]_4^5 - \int_4^5 \operatorname{Log}(x-2)\, dx$$

$$\mathcal{A}(\Delta) = 4{,}5 - \int_4^5 \operatorname{Log}(x-2)\, dx$$

pour calculer l'intégrale $\mathrm{I} = \int_4^5 \operatorname{Log}(x-2)\, dx$ faisons une intégration par parties (cf. § 5.7 b) :

$$\mathrm{I} = \int_4^5 \operatorname{Log}(x-2) \times g'(x)\, dx$$

avec $g(x) = x - 2, \quad g'(x) = 1$

d'où

$$\mathrm{I} = [g(x) \operatorname{Log}(x-2)]_4^5 - \int_4^5 (\operatorname{Log}(x-2))'\, g(x)\, dx$$

$$\mathrm{I} = [(x-2) \operatorname{Log}(x-2)]_4^5 - \int_4^5 \frac{x-2}{x-2}\, dx$$

$$\mathrm{I} = [(x-2) \operatorname{Log}(x-2) - x]_4^5$$

$$\mathrm{I} = 3 \operatorname{Log} 3 - 2 \operatorname{Log} 2 - 1$$

d'où

$$\mathcal{A}(\Delta) = 4{,}5 - 3 \operatorname{Log} 3 + 2 \operatorname{Log} 2 + 1$$
$$\mathcal{A}(\Delta) = 5{,}5 - 3 \operatorname{Log} 3 + 2 \operatorname{Log} 2.$$

Une valeur approchée de $\mathcal{A}(\Delta)$ est :

$$5{,}5 - 3 \times 1{,}098\,6 + 2 \times 0{,}693 = 3{,}590\,4.$$

L'incertitude sur $3 \operatorname{Log} 3$ est : $5.10^{-5} \times 3 = 15.10^{-5} = 1{,}5.10^{-4}$

sur $2 \operatorname{Log} 2$: $5.10^{-5} \times 2 = 10.10^{-5} = 10^{-4}$

sur $\mathcal{A}(\Delta)$: $1{,}5.10^{-4} + 10^{-4} = 2{,}5.10^{-4}$.

D'où un encadrement de $\mathcal{A}(\Delta)$:

$$3{,}590\,4 - 2{,}5.10^{-4} \leqslant \mathcal{A}(\Delta) \leqslant 3{,}590\,4 + 2{,}5.10^{-4}$$
$$3{,}590\,15 \leqslant \mathcal{A}(\Delta) \leqslant 3{,}590\,65$$

3. Dans l'exercice précédent on connaissait les logarithmes népériens de 2 et de 3 (qui sont donnés dans les tables). Dans le cas général d'un nombre réel $x > 0$ quelconque on sait (cf. § 6.3 a) que :

$$\log x = \mathrm{M} \operatorname{Log} x$$

$$\operatorname{Log} x = \frac{1}{\mathrm{M}} \log x$$

les multiples de M et de $\frac{1}{\mathrm{M}}$ étant donnés dans la table, l'une de ces deux formules permet de calculer l'un des deux logarithmes connaissant l'autre. Exemple :

Résoudre dans $\mathbb{R}$ *l'équation*

(1) $$e^x - 4e^{-x} - 2 = 0.$$

Pour tout x réel :

$$(1) \iff e^{2x} - 4 - 2e^{x} = 0 \iff e^{2x} - 2e^{x} - 4 = 0$$

et en posant $e^x = X$, pour tout x et tout X réels :

$$(1) \iff \begin{cases} X^2 - 2X - 4 = 0 \quad (2) \\ e^x = X \end{cases}$$

les solutions de (2) sont $X' = 1 - \sqrt{5}$ et $X'' = 1 + \sqrt{5}$.
L'équation $e^x = 1 - \sqrt{5}$ n'a pas de solution car $1 - \sqrt{5} < 0$ alors que $e^x > 0$ pour tout x réel. L'équation $e^x = 1 + \sqrt{5}$ a une solution qui est

$$x = \text{Log}\,(1 + \sqrt{5})$$
$$x \simeq \text{Log}\,(1 + 2{,}236)$$
$$x \simeq \text{Log}\,3{,}236$$
$$x \simeq \frac{1}{M}\log 3{,}236$$

la table donne

$$\log 3{,}236 \simeq 0{,}51 \quad 001$$

d'où

$$x \simeq 0{,}510\,01 \times \frac{1}{M}$$

les multiples de $\frac{1}{M}$ sont donnés dans la table :

$$0{,}5 \times \frac{1}{M} \simeq 1{,}151\,293$$
$$0{,}01 \times \frac{1}{M} \simeq 0{,}023\,025\,9$$
$$0{,}000\,01 \times \frac{1}{M} \simeq 0{,}000\,023\,025\,9$$
$$\overline{1{,}174\,341\,925\,9}$$

l'équation (1) donnée admet une seule racine $x \simeq 1{,}174$.

EXERCICES

1. Une expression est **calculable par logarithmes** si on peut l'écrire sous la forme d'un produit ou d'un quotient de nombres dont on sait trouver les logarithmes dans la table. Le logarithme de cette expression est alors une somme de logarithmes ou cologarithmes.
Rendre calculable par logarithmes l'expression :

$$\sqrt{a^2 + b^2}$$

$\left(\text{on posera } \frac{b}{a} = \text{tg}\,\alpha\right)$.

Application numérique : le plan étant rapporté à un repère orthonormé, calculer la distance des points :

$$M_0 \begin{cases} x_0 = 15{,}227\ m \\ y_0 = 83{,}531\ m \end{cases} \qquad M_1 \begin{cases} x_1 = 32{,}514\ m \\ y_1 = 51{,}908\ m \end{cases}$$

2. Pour résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation :

$$(1) \qquad a\cos x + b\sin x = c,$$

on obtient des expressions calculables par logarithmes de la façon suivante. Si l'on suppose $a \neq 0$, pour tout x réel :

$$(1) \iff \cos x + \frac{b}{a}\sin x = \frac{c}{a}$$

et en posant

$$(2) \quad \frac{b}{a} = \text{tg}\,\alpha.$$

On a pour tout x réel :

$$(1) \iff \cos x + \text{tg}\,\alpha \sin x = \frac{c}{a}$$
$$(1) \iff \cos\alpha\cos x + \sin\alpha\sin x = \frac{c}{a}\cos\alpha$$
$$(1) \iff \cos(x - \alpha) = \frac{c}{a}\cos\alpha$$

si $-1 \leqslant \frac{c}{a}\cos\alpha \leqslant 1$ $\Big($c'est-à-dire $\frac{c^2}{a^2}\cos^2\alpha \leqslant 1$ que l'on peut écrire $\frac{c^2}{a^2}\frac{1}{1+\text{tg}^2\alpha} \leqslant 1$ ou encore $\frac{c^2}{a^2}\frac{1}{1+\frac{b^2}{a^2}} \leqslant 1$ ou encore, après réduction, $a^2 + b^2 \geqslant c^2\Big)$

on peut poser

$$(3) \qquad \frac{c}{a}\cos\alpha = \cos\beta$$

et pour tout x réel :

$$(1) \iff \cos(x - \alpha) = \cos\beta$$
$$(1) \iff (x - \alpha = \beta + k\,2\pi \quad \text{ou} \quad x - \alpha = -\beta + k\,2\pi)$$
$$(1) \iff (x = \alpha + \beta + k\,2\pi \quad \text{ou} \quad x = \pi - \beta + k\,2\pi),$$

k étant un entier relatif arbitraire. Avec la table de logarithmes, on calculera un nombre α à l'aide de (2), puis un nombre β à l'aide de (3) et on déduira enfin toutes les solutions de (1).
Application numérique. Résoudre dans $\mathbb{R}$:

$$3{,}12\cos(x\ \text{gr}) + 2{,}17\sin(x\ \text{gr}) = 0{,}96.$$

3. En s'inspirant de la méthode précédente, résoudre dans $\mathbb{R}$:

$$6{,}15\cos(x^0) - 3{,}06\sin(x^0) = 5{,}28.$$

4. Résoudre dans $\mathbb{R}$:

$$e^{12{,}51x + 2{,}37} = 7{,}25.$$

EXERCICES

Équations. Inéquations. Systèmes d'équations : ex. 1 à 14.
Limites : ex. 15 à 24.
Primitives : ex. 25 à 47.
Étude de fonctions. Applications diverses : ex. 48 à 71.
Nombre complexe e^{ix} : ex. 72-73-74.
Équations différentielles : ex. 75 à 85.

Déterminer les nombres réels x, y, z, avec éventuellement une table de logarithmes, sachant que (ex. 1 à 14) :

6.1 $8(\text{Log}\,x)^3 - 9(\text{Log}\,x)^2 + \text{Log}\,x = 0.$

6.2 $\mathrm{Log}\,(x+3) + \mathrm{Log}\,(x+2) = \mathrm{Log}\,(x+11)$.

6.3 $\log_{\sqrt{2}} x \times \log_2 x \times \log_{2\sqrt{2}} x \times \log_4 x = 864$.

6.4 $10^{6x} - 10^{3x} - 2 = 0$.

6.5 $\begin{cases} yz = a \\ zx = b \\ xy = c, \end{cases}$

avec $a = 2{,}191\,5$, $\quad b = 0{,}025\,7$, $\quad c = \sqrt{3}$ (on posera $p = \sqrt{abc}$).

6.6 $\mathrm{Log}\,[\mathrm{Log}\, e^{x} + e^{-\mathrm{Log}\, x}] = 1 - \mathrm{Log}\, x$.

6.7 $\log_2 x > \log_8 (3\,x - 2)$.

6.8 $\log_3 x = \frac{1}{2} + \log_9 (4\,x + 15)$.

6.9 $3^{x+2} + 9^{x-1} = 1\,458$.

6.10 $2^x + 2^{x+1} + 2^{x+2} + 2^{x+3} = 3^x + 3^{x+1} + 3^{x+2} + 3^{x+3}$.

6.11 $e^x - 2\,e^{-x} = 1$.

6.12 $\begin{cases} 3\,x + 2\,y = 23 \\ \mathrm{Log}\, x - \mathrm{Log}\, y = \mathrm{Log}\, 7. \end{cases}$

6.13 $\begin{cases} \log_x e + \log_y e = \dfrac{7}{3} \\ \mathrm{Log}\, xy = \dfrac{7}{2}. \end{cases}$

6.14 $\begin{cases} a^x = y^a \\ a^{x+2} = y^{a+1} \end{cases}$ ($a > 0$ donné).

Calculer les limites suivantes, si elles existent (ex. 15 à 24) :

6.15 $\lim\limits_{x \to +0} x^2\, \mathrm{Log}\, x$.

6.16 $\lim\limits_{x \to +0} (x - \mathrm{Log}\, x)$.

6.17 $\lim\limits_{x \to +0} \dfrac{\mathrm{Log}\, x}{x^3}$; $\quad \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\mathrm{Log}\, x}{x^3}$.

6.18 $\lim\limits_{x \to +0} x\, \mathrm{Log}\left(1 + \dfrac{1}{x}\right)$.

6.19 $\lim\limits_{x \to +0} x^{\frac{1}{x}}$; $\quad \lim\limits_{x \to +\infty} x^{\frac{1}{x}}$.

6.20 $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{\mathrm{Log}\,(1+h)}{h}$ $\left(\text{remarquer que } \dfrac{\mathrm{Log}\,(1+h)}{h} \text{ est le taux d'accroissement de la fonction Log entre 1 et } 1+h\right)$.

En déduire : $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin x}{\mathrm{Log}\,(x+1)}$, $\quad \lim\limits_{x \to 0} (1 + x)^{\frac{1}{x}}$.

6.21 $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^x}{x^2}$. **6.22** $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^x}{x^2 + 1}$.

6.23 $\lim\limits_{x \to 0} x e^{\frac{1}{x}}$; $\quad \lim\limits_{|x| \to +\infty} x e^{\frac{1}{x}}$.

6.24 $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{e^h - 1}{h}$ $\left(\text{remarquer que } \dfrac{e^h - 1}{h} \text{ est le taux d'accroissement de la fonction exponentielle entre 0 et } h\right)$.

En déduire : $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^{x^2} - 1}{\sin^2 x}$, $\quad \lim\limits_{|x| \to +\infty} \dfrac{x\left(e^{\frac{1}{x}} - 1\right)}{e^{\frac{1}{x}} + 1}$, $\quad \lim\limits_{|x| \to +\infty} x^2 \left(e^{\frac{1}{x}} - e^{\frac{1}{x+1}}\right)$ (pour cette dernière limite, on mettra $e^{\frac{1}{x}}$ en facteur).

6.25 **Calculer les dérivées, quand elles existent, des fonctions :**

$$x \longmapsto \mathrm{Log}\left|\mathrm{tg}\, \frac{x}{2}\right|,$$

$$x \longmapsto \mathrm{Log}\left|\mathrm{tg}\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right)\right|,$$

$$x \longmapsto \mathrm{Log}\left|x + \sqrt{x^2 + h}\right| \qquad (h \text{ réel donné}).$$

En déduire les primitives des fonctions :

$$x \longmapsto \frac{1}{\sin x},$$

$$x \longmapsto \frac{1}{\cos x},$$

$$x \longmapsto \frac{1}{\sqrt{x^2 + h}}.$$

Calculer, quand elles existent, les primitives des fonctions définies par (ex. 26 *à* 38) :

6.26 $f(x) = \dfrac{x + 1}{x^2 + 2\,x + 5}$. **6.27** $f(x) = \dfrac{x}{x^2 - 1}$.

6.28 $f(x) = \dfrac{\cos x}{1 + \sin x}$. **6.29** $f(x) = \dfrac{\sin x + \cos x}{\sin x - \cos x}$.

6.30 $f(x) = \dfrac{e^x}{e^x + 2}$. **6.31** $f(x) = \dfrac{x^2 + x + 2}{x}$.

6.32 $f(x) = \dfrac{x^2 - x + 2}{x - 1}$ $\left(\text{mettre } f(x) \text{ sous la forme } ax + b + \dfrac{c}{x - 1}\right)$.

6.33 $f(x) = \dfrac{x^3 + 4\,x^2 + 6\,x + 4}{(x + 1)^2}$ $\left(\text{mettre } f(x) \text{ sous la forme } ax + b + \dfrac{c}{x + 1} + \dfrac{d}{(x + 1)^2}\right)$.

6.34 $f(x) = (x^3 + x)\, e^{x^4 + 2\,x^2 - 1}$. **6.35** $f(x) = x\, e^{x^2}$.

6.36 $f(x) = \dfrac{e^{\mathrm{cotg}\, x}}{\sin^2 x}$. **6.37** $f(x) = \dfrac{1}{(x - 1)^2}\, e^{\frac{1}{x - 1}}$.

6.38 $f(x) = e^{\sin x} \cos x$.

Calculer, en faisant des intégrations par parties, les primitives, quand elles existent, des fonction définies par (ex. 39 *à* 46) :

6.39 $f(x) = xe^x$.

6.40 $f(x) = (x^2 + x + 1)\, e^x$.

6.41 $f(x) = \operatorname{Log} x$.

6.42 $f(x) = x \operatorname{Log} x$.

6.43 $f(x) = e^x \sin x, \quad g(x) = e^x \cos x$.

6.44 $f(x) = \sin(\operatorname{Log} x), \quad g(x) = \cos(\operatorname{Log} x)$.

6.45 $f(x) = x \sin x, \quad g(x) = x \cos x,$
$h(x) = x \sin^2 x, \quad k(x) = x \cos^2 x$.

6.46 $f(x) = \dfrac{x}{\cos^2 x}, \quad g(x) = x \operatorname{tg}^2 x$.

6.47 Soit l'intégrale $I_m^n = \displaystyle\int_a^x t^m (\operatorname{Log} t)^n \, dt$ où m et n sont des entiers naturels et a et x deux nombres réels strictement positifs.
Trouver une relation de récurrence entre I_m^n et I_m^{n-1}.
Calculer les primitives, quand elles existent, de la fonction :

$$x \longmapsto x^3 (\operatorname{Log} x)^2.$$

Étudier et représenter graphiquement les fonctions définies par (ex. 48 *à* 60) :

6.48 $f(x) = \log_x a \qquad (a > 0 \text{ donné})$.

6.49 $f(x) = \dfrac{\operatorname{Log} x}{x}$.

6.50 $f(x) = x - \operatorname{Log} |x|$.

6.51 $f(x) = \operatorname{Log}(\cos x)$.

6.52 $f(x) = \operatorname{Log} |(x-1)(x-2)|$.

6.53 $f(x) = x \operatorname{Log} |x|$.

6.54 $f(x) = (x-1)\, e^x$.

6.55 $f(x) = x e^{\left|\frac{1}{2}\operatorname{Log} x^2\right|}$.

6.56 $f(x) = \dfrac{e^x}{x}$.

6.57 $f(x) = e^{\frac{1}{1-x}}$.

6.58 $f(x) = e^{\sin x}$.

6.59 $f(x) = x^2 \operatorname{Log} x - x^2$ (point d'inflexion).

6.60 $f(x) = x^3 \left(\operatorname{Log} 2x - \dfrac{4}{3}\right)$.

6.61 Le plan étant rapporté à un repère orthonormé, soit les points A (1, 1) et B $\left(2, \dfrac{1}{2}\right)$ et la courbe Γ représentant la fonction : $x \longmapsto \dfrac{1}{x}$ définie pour $x > 0$. Calculer l'aire de la partie du plan limitée par Γ et le segment [A , B] (donner une valeur approchée avec 3 décimales).

6.62 Le plan est rapporté à un repère orthonormé.
1° Étudier et représenter graphiquement la fonction : $x \longmapsto \operatorname{Log} |x|$.
2° Étudier et représenter graphiquement la fonction : $x \longmapsto |\operatorname{Log} x|$.
On désignera par Γ la courbe obtenue.

3° Calculer $\displaystyle\int_1^x \operatorname{Log} t \, dt \; (x > 0)$ par une intégration par parties. Soit A (1, 0) et les points B et C de Γ d'ordonnée $+1$. Calculer l'aire de la partie du plan limitée par les arcs AB et AC de Γ et par le segment [B , C].

6.63 1° Étudier et représenter graphiquement les fonctions :

$$x \longmapsto \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

$$x \longmapsto \frac{e^x - e^{-x}}{2}.$$

2° Discuter algébriquement et graphiquement, suivant les valeurs du paramètre réel m, le nombre de racines de l'équation :

$$e^{2x} - 2\, me^x + 1 = 0.$$

Résoudre l'équation dans le cas particulier où $m = 3$.

6.64 Soit f la fonction définie par

$$f(x) = 3\, x^2 - 6\, x + 1 + \operatorname{Log} x.$$

1° Étudier cette fonction. Montrer qu'elle présente un maximum et un minimum négatifs. Représenter graphiquement les variations de f. [On utilisera un système d'axes orthogonaux Ox et Oy; unité sur Ox : 5 cm, unité sur Oy : 2 cm].

2° Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une racine comprise entre 1 et 2.

3° Quelle est la dérivée de la fonction g telle que :

$$g(x) = x \operatorname{Log} x?$$

En déduire l'aire géométrique de la portion de plan limitée par la courbe qui représente les variations de f, l'axe Ox et les deux droites dont les équations sont respectivement :

$$x = \frac{1}{2} \quad \text{et} \quad x = 1.$$

On évaluera cette aire en centimètres carrés.

4° Trouver l'équation de la tangente à la courbe qui représente les variations de f au point dont l'abscisse est $x = \dfrac{1}{\sqrt{6}}$. (Bacc. D, Clermont, Juin 1969.)

6.65 1° Déterminer les constantes a, b, c et d telles que :

$$\frac{4}{(1-x^2)^2} = \frac{a}{(1-x)^2} + \frac{b}{1-x} + \frac{c}{(1+x)^2} + \frac{d}{1+x}$$

pour toutes valeurs de x différentes de -1 et $+1$ et calculer la primitive de $x \longmapsto \dfrac{4}{(1-x^2)^2}$ qui est nulle pour $x = 0$.

2° Soit f la fonction définie par

$$y = f(x) = \frac{2\,x}{1-x^2} + \operatorname{Log} \frac{1+x}{1-x}.$$

α) Quel est le domaine de définition de f? Montrer que f est une fonction impaire.

β) Étudier les variations de f et construire la courbe représentative (C), le plan étant rapporté à un repère orthonormé. Préciser la tangente à (C) en O origine du repère.

3° Soit F la fonction définie par

$$Y = F(x) = x \operatorname{Log} \frac{1+x}{1-x}.$$

α) Calculer la dérivée de F. En déduire l'aire géométrique, S (x_0), comprise entre (C), x'Ox et les droites d'équations $x = 0$ et $x = x_0$, avec $0 < x_0 < 1$.

β) Calculer, avec deux décimales, S $\left(\dfrac{3}{4}\right)$, sachant que Log 7 = 1,945.

Quelle est la limite de S (x_0) quand x_0 tend vers 1?

γ) Déterminer x_0 tel que $S(x_0) = 2x_0$. Donner la valeur exacte de x_0, puis une valeur numérique approchée avec deux décimales, sachant que $e = 2{,}718$.

N. B. Les questions 2° et 3° sont indépendantes de la question 1°. (Bacc. D, Dijon, juin 1969.)

6.66 On considère la transformation définie par

(1) $$Z = \frac{z + 11}{z - 1}$$

(il sera utile de se servir de sa forme canonique).

1° *On suppose z réel.* Étudier et représenter graphiquement la fonction précédente dans un repère orthonormé d'axes $z'z$, $Z'Z$.
Coordonnées des sommets, des foyers et équations des directrices de la courbe précédente (cf. t. III).

2° Trouver les couples d'entiers relatifs (z, Z) vérifiant (1).

3° Calculer l'aire de la partie Δ du plan limitée par $z'z$, la courbe précédente et les droites d'équations $z = 2$ et $z = 1 + e$.

4° Calculer le volume de la partie de l'espace engendrée par la révolution de Δ autour de $z'z$.

5° *On suppose z complexe.* Déterminer les ensembles décrits par les points M et m d'affixes respectives Z et z dans un plan rapporté à un repère orthonormé, dans les cas suivants :

a) le module de Z est constant,

b) l'argument de Z est constant (à $k\pi$ près, $k \in \mathbb{Z}$).

Dans le cas particulier où Z est imaginaire pur, former l'équation cartésienne de l'ensemble décrit par m.

6.67 On se place dans le plan rapporté à un repère orthonormé d'axes Ox, Oy.

1° On considère la fonction f définie par

$$f(x) = \frac{e^x}{e^x + 1}.$$

Étudier ses variations et construire son graphique (C). Montrer que le point d'intersection de (C) avec l'axe Oy est centre de symétrie pour le graphique. Trouver l'abscisse du point du graphique d'ordonnée $\frac{4}{5}$.

2° Montrer que la fonction F définie par

$$F(x) = \text{Log}\,(e^x + 1)$$

est une primitive de f. Calculer $G(x) = \int_0^x \frac{e^t}{e^t + 1}\,dt$, où x est un nombre réel quelconque.

Étudier les variations de la fonction G et construire son graphique (Γ). Montrer l'existence d'une asymptote oblique d'équation $y = x - \text{Log}\,2$, en cherchant la limite de $G(x) - x + \text{Log}\,2$ lorsque x tend vers $+\infty$.

3° On appelle $S(x)$ l'aire arithmétique (ou géométrique) du domaine limité par l'axe Ox, la courbe (C), l'axe Oy et la parallèle à Oy d'abscisse x.
Résoudre l'équation

$$S(x) = \text{Log}\,\frac{3}{2}$$

d'inconnue x supposée positive. (Bacc. D, Montpellier, septembre 1969.)

6.68 Soit f la fonction numérique de la variable réelle définie par la formule

$$f(x) = x^2 e^x$$

et soit (C) la courbe représentative de f dans un repère orthonormé.

1° Étudier les variations de f et tracer (C). Pour étudier le comportement de f quand x tend vers $-\infty$, on peut étudier Log $f(x)$.

2° Construire, dans le même repère, la courbe (E) d'équation $y = e^x$. Déterminer les points communs à (C) et à (E) et calculer l'aire de la partie du plan définie par la relation

$$f(x) \leqslant y \leqslant e^x.$$

On cherchera une primitive de f de la forme

$$x \longmapsto F(x) = (ax^2 + bx + c)\,e^x.$$

3° m étant un nombre réel supérieur à e, la droite d'équation $y = m$ coupe (C) en A et (E) en B. Déterminer m pour que $\|\overrightarrow{AB}\| = 1$. Calculer la valeur de m au moyen d'une table de logarithmes. (Bacc. D, Aix-en-Provence, juin 1970.)

6.69 Dans tout le problème, on supposera le plan (P) rapporté à un repère orthonormé d'axes Ox, Oy. Soit la transformation ponctuelle $T_{(a,\,\lambda)}$ qui, à tout point $m\,(x, y)$ du plan, fait correspondre le point M (X, Y) dont les coordonnées sont

$$X = x + a \quad \text{et} \quad Y = \lambda\, y,$$

où a et λ sont des réels donnés et $\lambda \neq 0$. On désigne par $\mathcal{T}$ l'ensemble des transformations $T_{(a,\,\lambda)}$

A. 1° Quelle est, dans le plan (P), la transformation $U_a = T_{(a,\,1)}$? Montrer que l'ensemble $\mathcal{U}$ de ces transformations est un groupe commutatif pour la loi $\circ$.

2° Quelle est, dans le plan (P), la transformation $V_\lambda = T_{(0,\,\lambda)}$? Montrer que l'ensemble $\mathcal{V}$ de ces transformations est un groupe commutatif pour la loi $\circ$.

3° Montrer que la transformation composée $T_{(a',\,\lambda')} \circ T_{(a,\,\lambda)}$ appartient à $\mathcal{T}$.
Montrer que $\mathcal{T}$, muni de la loi $\circ$, est un groupe commutatif.

4° Montrer que $T_{(a,\,\lambda)}$ peut être considérée comme la composée d'une transformation de $\mathcal{U}$ et d'une transformation de $\mathcal{V}$.

B. Soit f la fonction numérique de la variable réelle x telle que

$$f(x) = xe^x$$

1° Calculer les dérivées première et seconde de f et en déduire, par récurrence, la dérivée d'ordre n.

2° Étudier les variations de la fonction f_n telle que

$$f_n(x) = (x + n)\,e^x,$$

où n est un entier relatif donné. Tracer les courbes représentatives C_{-1}, C_0 et C_1 des fonctions f_{-1}, f_0 et f_1.

3° Calculer

$$I_0(h) = \int_0^h f_0(x)\,dx \quad \text{et} \quad I_n(h) = \int_{-n}^{-n+h} f_n(x)\,dx$$

en fonction de h et établir la relation

(R) $$I_n(h) = e^{-n}\, I_0(h).$$

C. Déterminer a et λ pour que le minimum de C_0 ait pour transformé par $T_{(a,\,\lambda)}$ le minimum de C_n et montrer que C_0 est alors transformée en C_n.
Quelle relation existe-t-il entre l'aire du domaine plan défini par les relations

$$\alpha \leqslant x \leqslant \beta, \qquad 0 \leqslant y \leqslant g(x),$$

où g est une fonction continue, positive donnée, et l'aire du transformé de ce domaine par $T_{(a,\,\lambda)}$? Retrouver ainsi la relation (R). (Bacc. C, Poitiers, juin 1970.)

6.70 Un point mobile M, dont le mouvement est rapporté à un repère orthonormé, a pour coordonnées à tout inxtant $t > 0$

$$\begin{cases} x = t^2 \\ y = \dfrac{t^4}{4} - \text{Log}\,t. \end{cases}$$

1° Construire la trajectoire (C) du point M. Calculer la longueur (ou norme) du vecteur-vitesse du point M à l'instant t.

2° On oriente (C) dans le sens des x croissants et l'on prend pour origine des arcs la position du mobile à l'instant $t = 1$. Déterminer la loi horaire du mouvement, donnant l'arc en fonction du temps. (Bacc. C, Paris, septembre 1969.)

6.71 Un point mobile M, dont le mouvement est rapporté à un repère orthonormé, a pour coordonnées à tout instant t ($t \in \mathbb{R}$)

$$\begin{cases} x = e^t \\ y = e^{-t} \\ z = t\sqrt{2} \end{cases}$$

1° Construire les projections orthogonales de la trajectoire de M sur les plans de coordonnées (on déterminera les équations cartésiennes des courbes contenant ces projections et on construira les parties décrites).

2° Calculer les coordonnées du vecteur-vitesse et du vecteur-accélération de M à l'instant t. Quel est l'hodographe du mouvement de M? Étudier si le mouvement de M est accéléré ou retardé.

3° Montrer que la tangente à la trajectoire de M fait un angle constant avec une direction fixe.

6.72 En remarquant que, pour tout x réel :

$$\cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}$$

$$\sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2\,i} \quad \textit{(formules d'Euler)},$$

linéariser les expressions :

$$\sin^6 x, \qquad \sin^4 x \cos^2 x.$$

En déduire les primitives des fonctions :

$$x \longmapsto \sin^6 x$$
$$x \longmapsto \sin^4 x \cos^2 x.$$

6.73 Calculer

$$1 + re^{i\alpha} + r^2e^{2i\alpha} + \ldots + r^ne^{ni\alpha}$$

($n \in \mathbb{N}$, $r > 0$, $\alpha \in \mathbb{R}$).

En déduire le calcul des sommes :

$$1 + r\cos\alpha + r^2\cos 2\alpha + \ldots + r^n\cos n\alpha$$
$$r\sin\alpha + r^2\sin 2\alpha + \ldots + r^n\sin n\alpha.$$

6.74 Simplifier $\quad z = \dfrac{e^{i\alpha} + 1}{e^{i\alpha} - 1} \quad (r \in \mathbb{R}),$

(on multipliera numérateur et dénominateur par $e^{-i\frac{\alpha}{2}}$).

Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation :

$$(z + 1)^n - (z - 1)^n = 0 \quad (n \text{ entier naturel donné non nul})$$

$\left(\text{on posera } Z = \dfrac{z+1}{z-1}\right)$.

6.75 Soit x le nombre d'atomes de radium d'une substance radioactive à l'instant t. La fonction $f : t \longmapsto x = f(t)$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et l'on a, à tout instant :

$$x' = -\,k^2x \quad (k \text{ réel non nul donné}).$$

A l'intant $t = 0$, le nombre d'atomes de radium est x_0.

1° Donner l'expression de x en fonction de x_0, k^2 et t.

2° On suppose t évalué en années et $k^2 = 5.10^{-4}$. Au bout de combien d'années, le nombre d'atomes de radium a-t-il diminué de moitié?

6.76 Soit θ la température d'un corps à l'instant t. La température ambiante est 20 °C. On pose $x = \theta - 20$, on suppose la fonction : $t \longmapsto x$ dérivable sur $\mathbb{R}$ et, à tout instant, on a :

$$x' = -\,k^2x \quad (k \text{ réel non nul donné}).$$

Pour $t = 0$, $\theta_0 = 70$ °C. Au bout de 5 minutes, $\theta = 60$ °C.

1° Calculer θ en fonction de t mesuré en minutes.

2° A quelle température sera le corps au bout de 20 minutes?

6.77 On considère, dans un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$, la courbe (C) représentative de la fonction $y = x^3$.

1° *a)* Écrire l'équation de la tangente en un point M de (C) d'abscisse x. Si a désigne l'abscisse, différente de zéro, d'un point M_0 de (C), appliquer le calcul précédent à la détermination de l'abscisse du point de contact M_1 de (C) avec la tangente à (C) contenant M_0 et distincte de la tangente à (C) en M_0. Peut-on donner une interprétation analogue dans le cas où $a = 0$?

b) On pose $x_0 = a$, $y_0 = a^3$. On note T l'application de (C) dans (C) qui, au point M_0, fait correspondre le point M_1 défini ci-dessus et l'on définit de proche en proche le point M_n par les formules

$$M_1 = T(M_0),\ M_2 = T(M_1),\ \ldots,\ M_n = T(M_{n-1}).$$

Si (x_n, y_n) sont les coordonnées de M_n, calculer x_n en fonction de x_{n-1} et y_n en fonction de y_{n-1}. En déduire les expressions de x_n et y_n en fonction de a et n.

c) Exprimer, en fonction de a et n, les coordonnées X_n et Y_n du barycentre G_n des points M_0, $M_1, \ldots, M_n$ affectés des coefficients égaux à 1. Calculer $\lim\limits_{n \to +\infty} \overrightarrow{OG_n}$.

2° *a)* Trouver les fonctions numériques de la variable réelle, solutions de l'équation différentielle :

(1) $$y' + y \operatorname{Log} 2 = 0.$$

On désigne par (γ_λ) la courbe représentative de la fonction $x \longmapsto \lambda e^{-x \operatorname{Log} 2}$ (λ constante réelle arbitraire).

Trouver les fonctions numériques de la variable réelle, solutions de l'équation différentielle :

(2) $$y' + 3\,y \operatorname{Log} 2 = 0.$$

On désigne par (γ_μ) la courbe représentative de la fonction $x \longmapsto \mu e^{-3x \operatorname{Log} 2}$ (μ constante réelle arbitraire).

b) Les nombres x_n et y_n étant ceux définis au 1) b) pour $a = 1$, montrer que les points $I_0\,(0, +1)$, $I_1\,(+1, x_1)$, $\ldots$, $I_n\,(n, x_n)$ appartiennent, pour tout entier naturel n, à l'une ou l'autre de deux courbes (γ_λ). Peut-on énoncer un résultat analogue pour les points $J_0\,(0, +1)$, $J_1\,(+1, y_1)$, $\ldots$, $J_n\,(n, y_n)$? (Bacc. C, Toulouse, juin 1969.)

Trouver les fonctions numériques de la variable réelle, solutions des équations différentielles suivantes (ex. 77 à 79) :

6.78 $y'' + y = 0.$

$y'' + y = x^2 + x + 3$ (chercher une solution de la forme $x \longmapsto y_1 = ax^2 + bx + c$ et en déduire toutes les autres en posant $y = y_1 + u$).

$y'' + y = e^{3x}$ (faire de même avec $y_1 = ae^{3x}$).

6.79 $y'' + 4\,y = 0.$

$y'' + 4\,y = \sin x$ (chercher une solution de la forme $x \longmapsto y_1 = a \sin x$ et en déduire toutes les autres en posant $y = y_1 + u$).

$y'' + 4\,y = \sin 2\,x$ (faire de même avec $y_1 = ax\cos 2\,x$).

6.80 $y'' + y' - 2\,y = 0$ (chercher des solutions de la forme $x \longmapsto e^{ax}$ et en déduire toutes les autres en posant $y = ue^x$).

6.81 Un point M de masse m, mobile sur un axe $x'Ox$, est attiré par O par une force dont la mesure est proportionnelle à la distance de O à M :

$$\vec{F} = -\,m\omega^2\,\overrightarrow{OM}.$$

A l'instant $t = 0$, M est en M_0 d'abscisse x_0 et la mesure algébrique du vecteur-vitesse est v_0. Former l'équation horaire du mouvement. (On rappelle qu'à tout instant on a $\vec{F} = m\vec{\gamma}$, $\vec{\gamma}$ étant le vecteur-accélération du point M).

6.82 On donne un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ dans le plan. L'unité de longueur est le centimètre. Un mobile M est animé, relativement à ce repère, d'un mouvement tel que le vecteur-accélération soit, à tout instant t de $\mathbb{R}$, défini par

$$\vec{\gamma} = (-12 \cos 2t)\,\vec{i} + (-8 \sin 2t)\,\vec{j}.$$

De plus, on sait qu'à l'instant $t = 0$, le mobile est en $M_0(+8, 0)$ et que son vecteur-vitesse est $\vec{v}_0 = 4\vec{j}$.

1° Déterminer le vecteur-vitesse $\vec{v}$ à l'instant t.

2° Déterminer le vecteur-espace $\overrightarrow{OM}$ à l'instant t. En déduire que le mouvement est périodique et calculer la période T.

3° Montrer que l'équation cartésienne de la trajectoire de M peut se mettre sous la forme

$$y^2 = ax^2 + bx + c.$$

Préciser sa nature. (Bacc. E, Clermont, septembre 1970.)

6.83 On considère le point mobile M du plan rapporté au repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$. Les coordonnées de ce point sont fonctions du temps t.
Au temps $t = 0$, le mobile est en A $(+1, 0)$.
Au temps $t = \pi$, il est en B $(0, +2)$.
A tout instant, le vecteur $\overrightarrow{OM}$ et le vecteur-accélération $\vec{\gamma}$ sont liés par la relation $\vec{\gamma} = -\frac{1}{4}\overrightarrow{OM}$.

1° Calculer les coordonnées x et y de M en fonction de t et en déduire l'équation de la trajectoire de M.

2° Quelles sont les valeurs de t pour lesquelles la norme euclidienne du vecteur-vitesse de M est maximale ou minimale? (Bacc. D, Nancy, juin 1970.)

6.84 On considère un point M de l'espace, en mouvement par rapport à un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, de vecteur-accélération $\vec{\gamma}$ à tout instant t d'un intervalle I.

1° Montrer que l'égalité

$$\vec{\gamma} = \vec{0},$$

vérifiée pour tout t de I, caractérise un mouvement rectiligne uniforme (si M n'est pas fixe) dans l'intervalle de temps I.

1° On suppose que $\vec{\gamma}$ est un vecteur constant non nul sur l'intervalle I et on connaît $\overrightarrow{OM_0}$ et le vecteur-vitesse $\vec{v}_0$ à l'instant $t = 0$ de I. Démontrer que l'on a, pour tout t de I :

$$\overrightarrow{OM} = \frac{1}{2}\vec{\gamma}t^2 + \vec{v}_0 t + \overrightarrow{OM_0}$$

que l'on peut écrire :

$$\overrightarrow{M_0M} = \frac{1}{2}\vec{\gamma}t^2 + \vec{v}_0 t.$$

Quelle est la trajectoire de M?

3° Application. Un projectile assimilé à un point M est lancé avec une vitesse $v_0 > 0$. Le vecteur-vitesse initiale $\vec{v}_0$ fait un angle de 45° avec la verticale. Le projectile est soumis à l'accélération de la pesanteur g (son vecteur-accélération est donc $\vec{\gamma} = -g\vec{k}$ constant, la verticale étant orientée positivement vers le haut). Étudier le mouvement du projectile M (coordonnées de M en fonction du temps, trajectoire, hodographe, étudier si le mouvement est accéléré ou retardé).

Sujet d'étude.

6.85 *Mouvement vibratoire amorti.*

1° Soit un nombre complexe donné $a + ib$ (a et b réels), t désignant un instant quelconque de $\mathbb{R}$. Par définition,

$$e^{(a+ib)t} = e^{at} \times e^{ibt}.$$

Calculer la dérivée de : $t \longmapsto x = e^{(a+ib)t}$. Qu'en concluez-vous sur la forme de cette dérivée?

2° On appelle solution de l'équation différentielle :

(1) $$x'' + 2x' + 2x = 0,$$

toute fonction complexe de la variable réelle t

$$F : t \longmapsto x = F(t)$$

dérivable deux fois sur $\mathbb{R}$ et telle que l'on ait (1) pour tout t de $\mathbb{R}$.
Chercher deux solutions de la forme : $t \longmapsto x = e^{st}$ $(s \in \mathbb{C})$.
Soit $t \longmapsto e^{s_1 t}$ et $t \longmapsto e^{s_2 t}$ ces solutions, montrer que toute fonction :

$$t \longmapsto \lambda_1 e^{s_1 t} + \lambda_2 e^{s_2 t},$$

λ_1 et λ_2 étant des constantes *complexes* arbitraires, est solution de (1).
Montrer, en choisissant convenablement λ_1 et λ_2, que les fonctions : $t \longmapsto e^{-t}\cos t$ et $t \longmapsto e^{-t}\sin t$ sont des solutions de (1).
Montrer que toute fonction : $t \longmapsto e^{-t}(A\cos t + B\sin t)$, A et B étant des constantes *réelles* arbitraires, est une fonction *numérique* de la variable réelle t, solution de (1). Montrer qu'on obtient ainsi toutes les fonctions numériques solutions de (1) (on posera $x = ue^{-t}$, on formera l'équation différentielle vérifiée par la fonction : $t \longmapsto u$ et on cherchera les fonctions numériques solutions de cette équation différentielle).

3° Un point M a un mouvement rectiligne sur un axe $x'Ox$ de loi horaire $f : t \longmapsto x = f(t)$ dérivable deux fois sur $\mathbb{R}_+$ et vérifiant (1). Pour $t = 0$, l'abscisse du point est $x_0 = 0$ et sa vitesse est $v_0 = x'_0 = 1$.
Trouver la loi horaire du mouvement de M.

4° Construire le diagramme Γ des espaces [on suppose ici que t varie de 0 à $+\infty$; on montrera que les points de Γ d'abscisses $t = \frac{\pi}{2} + k\pi$, k étant un entier naturel arbitraire, appartiennent à l'une ou l'autre des deux courbes d'équations $x = e^{-t}$ et $x = -e^{-t}$ et on montrera que Γ et ces deux courbes ont même tangente en ces points].

5° Calculer $\lim\limits_{t \to +\infty} f(t)$ et $\lim\limits_{t \to +\infty} f'(t)$.