Bac 2021

QCM

2021 Sujet 0

Exercice 1

1) On considère les suites (u_n) et (v_n) telles que, pour tout entier naturel n,

$$u_n = 1 - \left(\frac{1}{4}\right)^n \quad \text{et} \quad v_n = 1 + \left(\frac{1}{4}\right)^n$$

On considère de plus une suite (w_n) qui, pour tout entier naturel n, vérifie $u_n \leq w_n \leq v_n$

On peut affirmer que :

a) Les suites (u_n) et (v_n) sont géométriques.

b) La suite (w_n) converge vers 1.

c) La suite (u_n) est minorée par 1.

d) La suite (w_n) est croissante.

Comme $0 < \frac{1}{4} < 1$ $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(\frac{1}{4}\right)^n = 0$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = \lim\limits_{n \to +\infty} v_n = 1$

Donc, le fait que les termes w_n soient encadrés par les termes u_n et v_n permet d'appliquer le théorème d'encadrement (dit "des gendarmes") :

$$\left.\begin{array}{l} u_n \leq w_n \leq v_n \\ \lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 1 \\ \lim\limits_{n \to +\infty} v_n = 1 \end{array}\right\} \Rightarrow \lim\limits_{n \to +\infty} w_n = 1$$

<u>Réponse b</u>

Analyse des autres réponses :

a) Les suites (u_n) et (v_n) ne sont pas géométriques du fait de la présence de la constante 1.

(u_n) serait géométrique si $u_n = -\left(\frac{1}{4}\right)^n = (-1)\left(\frac{1}{4}\right)^n$

(premier terme $u_0 = -1$, raison $= \frac{1}{4}$).

(v_n) serait géométrique si $v_n = \left(\frac{1}{4}\right)^n$

(premier terme $v_0 = 1$, raison $\frac{1}{4}$).

c) La suite (u_n) est majorée par 1 car on retranche de 1 le nombre positif $\left(\frac{1}{4}\right)^n$. (*)

d) La suite (w_n) est croissante.

Le fait que les termes w_n soient encadrés par les termes u_n et v_n ne permet en aucun cas de présumer du sens de variation de (w_n).

2) On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = xe^{x^2}$.

La fonction dérivée de f est la fonction f' définie sur $\mathbb{R}$ par :

a) $f'(x) = 2xe^{x^2}$ b) $f'(x) = (1+2x)e^{x^2}$

c) $f'(x) = (1+2x^2)e^{x^2}$ d) $f'(x) = (2+x^2)e^{x^2}$

(*) c'est la suite (v_n) qui est minorée par 1.

$f'(x) = 1\, e^{x^2} + x\, e^{x^2} \cdot 2x$

dérivée de x | e^{x^2} inchangée | x inchangé

dérivée de e^{x^2} :
dérivée de e^{x^2} par rapport à x^2 × dérivée de x^2 par rapport à x.
Ne pas oublier de dériver la fonction en exposant !!!
(Erreur courante et fatale !)

$= (1 + 2x^2)e^{x^2}$ Réponse c

Analyse des autres réponses

a) $f'(x) = 2x e^{x^2}$
Ici il y a une double erreur : - considérer que la dérivée d'un produit est le produit des dérivées ;
- en dérivant e^{x^2}, oubli de multiplier par la dérivée de la fonction en exposant.

b) $f'(x) = (1 + 2x)e^{x^2}$
oubli de multiplier la dérivée de e^{x^2} par x
(1ère fonction inchangée × 2nde dérivée).

d) $f'(x) = (2 + x^2)e^{x^2}$
La logique de cette erreur ne semble pas évidente.

3) Que vaut $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^2 - 1}{2x^2 - 2x + 1}$?

a) -1 b) 0 c) $\frac{1}{2}$ d) $+\infty$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{x^2 - 1}{2x^2 - 2x + 1} = \lim_{x \to +\infty} \frac{x^2}{2x^2} = \frac{1}{2}$$ Réponse c

(La limite d'une fonction rationnelle est égale à la limite des quotient des termes de plus haut degré au numérateur et au dénominateur.)

Analyse des autres réponses

a) -1
L'erreur est de calculer la limite de la fonction quand x tend vers 0.

b) 0
Peut-être en considérant que $2x^2 - 2x + 1$ croît plus vite que $x^2 - 1$ du fait du terme en $2x^2$ au dénominateur ?

d) $+\infty$
Logique de l'erreur pas évidente.

4) On considère une fonction h continue sur l'intervalle $[-1, 1]$ telle que

$$h(-1) = 0 \quad h(0) = 2 \quad h(1) = 0$$

On peut affirmer que :

a) La fonction h est croissante sur l'intervalle $[-1, 0]$.

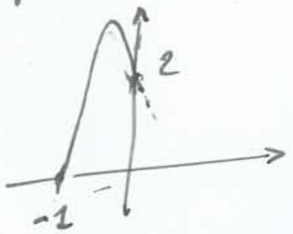
b) La fonction h est positive sur l'intervalle $[-1, 1]$.

c) Il existe au moins un réel a dans l'intervalle $[0, 1]$ tel que $h(a) = 1$.

d) L'équation $h(x) = 1$ admet exactement deux solutions dans l'intervalle $[-1 ; 1]$.

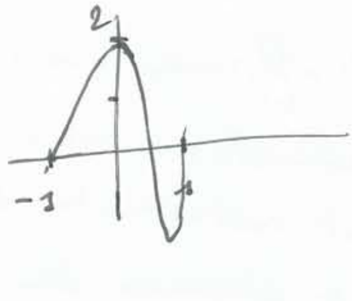
a) Le fait que $h(-1) = 0$ et $h(0) = 2$ ne permet pas de présumer du sens de variation de h.

Par exemple, on peut avoir



b) On ne peut rien affirmer quant au signe de h sur $[-1, 1]$.

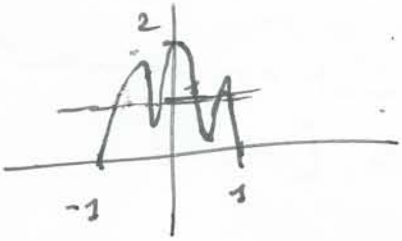
Par exemple, on peut avoir



c) Comme la fonction est continue sur $[0, 1]$ et comme $f(1) < 1 < f(0)$, il existe, du fait du théorème des valeurs intermédiaires, au moins une valeur a appartenant à l'intervalle $[0, 1]$ telle que $f(a) = 1$.

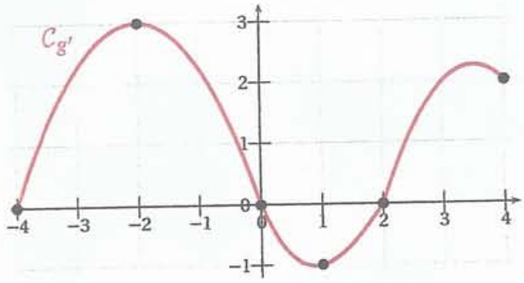
Réponse c

d) On ne peut présumer du nombre de solutions de l'équation $f(x) = 1$.
Par exemple, on peut avoir la courbe



pour laquelle $f(x) = 1$ a six solutions.

5) On suppose que g est une fonction dérivable sur l'intervalle $[-4, 4]$. On donne ci-contre la représentation graphique de sa fonction dérivée g'.



On peut affirmer que :

a) g admet un maximum en -2.
b) g est croissante sur l'intervalle $[1 ; 2]$.
c) g est convexe sur l'intervalle $[1 ; 2]$
d) g admet un minimum en 0

Dans tous les exercices montrant la courbe de la fonction dérivée, il faut d'abord observer le signe de la dérivée.

Ici, la dérivée est positive sur $[-4;0]$, négative sur $[0,2]$, et positive sur $[2,4]$.
Donc la fonction est croissante sur $[-4;0]$, décroissante sur $[0,2]$, et croissante sur $[2;4]$.

x	-4		0		2		4
$g(x)$		$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$	

a) g admet un maximum en -2, pas g.
Par contre, la courbe C_g admet un point d'inflexion en -2 (car la courbe $C_{g'}$ admet un maximum en -2)

b) g' est croissante sur $[1,2]$, pas g.
Comme g' est négative sur cet intervalle, g est décroissante sur $[1,2]$.

c) g' est croissante sur $[1;2]$.
g'' est donc positive. g est donc convexe sur $[1;2]$.

Réponse c).

d) En 0, la dérivée s'annule en passant de valeurs positives à des valeurs négatives.
g est donc croissante avant 0, puis décroissante, ce qui correspond à un maximum $\nearrow \searrow$.
Le minimum se situe en 2.