Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose : $u_n = \begin{pmatrix} 2n \\ n \end{pmatrix}^{\frac{1}{n}}$. Le but du problème est d'étudier la convergence de la suite (u_n).

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$: justifier que $\ln(u_n) = \frac{1}{n} \sum\limits_{k=1}^{n} \ln\left(\frac{n+k}{k}\right)$.
2. Montrer que la fonction $x \mapsto \ln\left(\frac{1+x}{x}\right)$ est décroissante sur $]0;1]$.
3. En déduire que : $\forall k \in [\![1; n-1]\!]$,

$$\frac{1}{n} \ln\left(\frac{n+k+1}{k+1}\right) \leqslant \int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} \ln\left(\frac{1+x}{x}\right) \, \mathrm{d}x \leqslant \frac{1}{n} \ln\left(\frac{n+k}{k}\right)$$

4. En déduire que : $\forall n \in \mathbb{N}^*$,

$$\int_{\frac{1}{n}}^{1} \ln\left(\frac{1+x}{x}\right) \, \mathrm{d}x \leqslant \ln(u_n) \leqslant \frac{\ln(n+1)}{n} + \int_{\frac{1}{n}}^{1} \ln\left(\frac{1+x}{x}\right) \, \mathrm{d}x$$