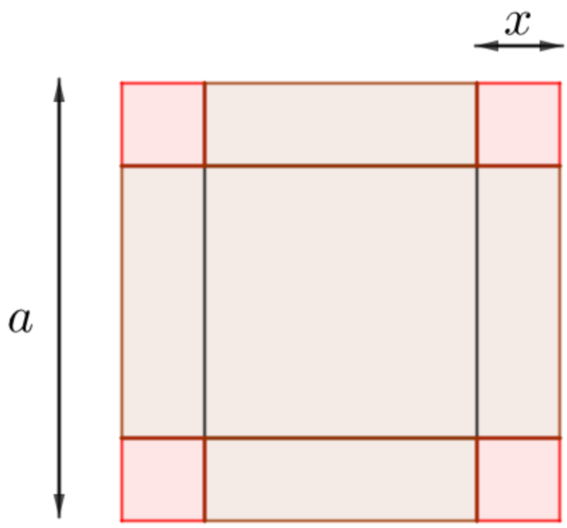
LE PROBLÈME DE LA BOITE EN CARTON

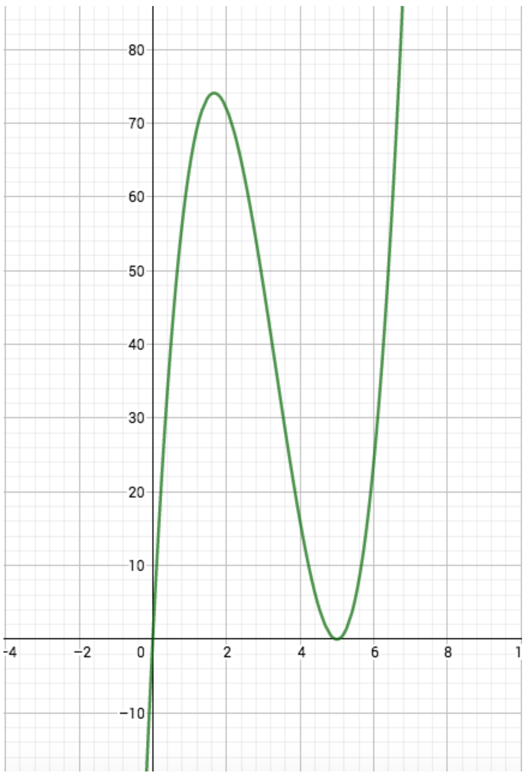
On se propose dans cette publication de résoudre le problème de la boite en carton. Il s'agit d'écorner les quatre coins d'un carré en carton de côté a, en découpant quatre carrés de côté x. En procédant ainsi, on obtient le patron d'une boite sans couvercle. Pour quelle valeur de x le volume de cette boite devient-il maximal ?



Le volume de cette boite est donné par l'expression

$$\begin{aligned} V(x) &= x(a-2x)^2 \\ &= 4x^3 - 4ax^2 + a^2x. \end{aligned}$$

Il s'agit ici d'un polynôme de degré 3 dont l'allure générale est donnée par la courbe ci-dessous



En appliquant la méthode de Fermat à la fonction V nous obtenons pour $x_1 \neq x_2$,

$$\begin{aligned} V(x_1) = V(x_2) &\iff 4x_1^3 - 4ax_1^2 + a^2x_1 = 4x_2^3 - 4ax_2^2 + a^2x_2 \\ &\iff 4(x_1^3 - x_2^3) - 4a(x_1^2 - x_2^2) + a^2(x_1 - x_2) = 0 \\ &\iff 4(x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2) - 4a(x_1 + x_2) + a^2 = 0. \end{aligned}$$

Comme d'habitude, en prenant maintenant $x_1 = x_2$ et en notant cette valeur commune x_0, nous obtenons

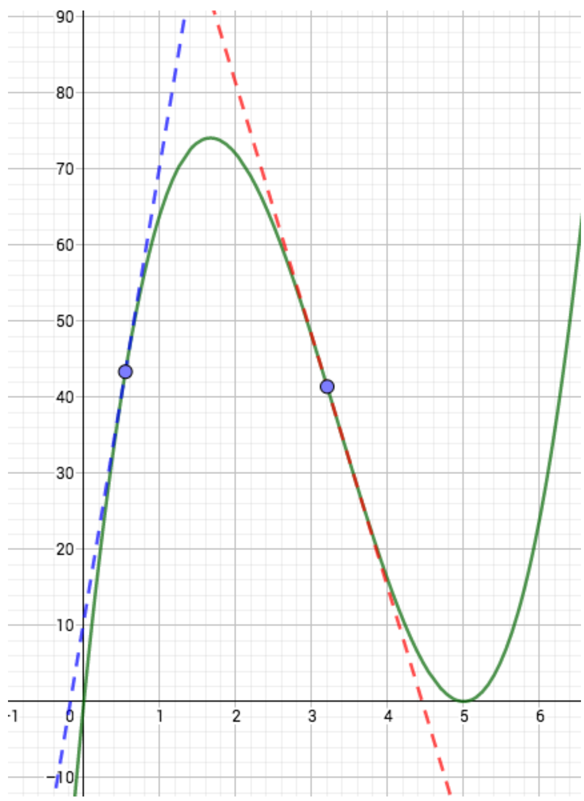
$$12x_0^2 - 8ax_0 + a^2 = 0.$$

Le nombre x_0 est donc solution d'une équation du second degré. Son discriminant Δ vaut

$$\begin{aligned} \Delta &= (-8a)^2 - 4 \cdot 12 \cdot a^2 \\ &= (4a)^2. \end{aligned}$$

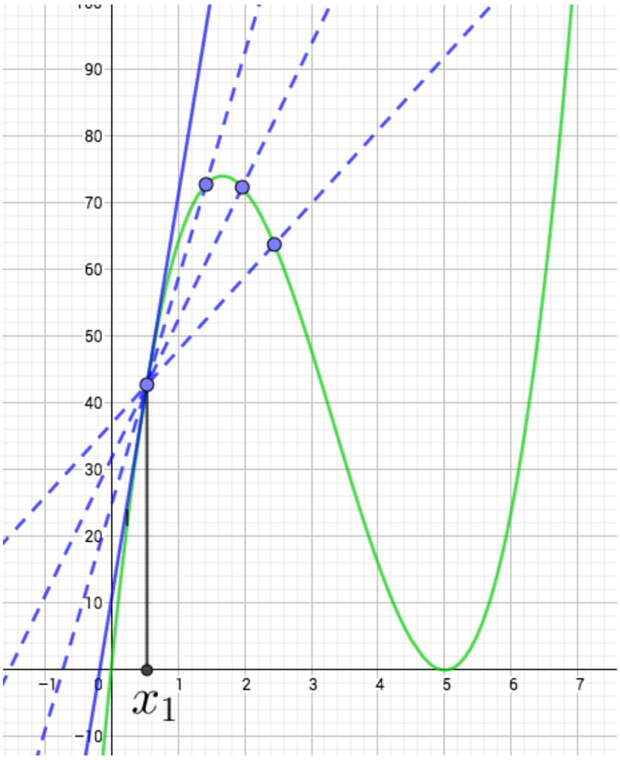
Les solutions sont donc $a/2$ et $a/6$.[1] Comment peut-on distinguer entre le minimum et le maximum locaux de la fonction V ?

C'est possible dans ce cas par un simple calcul mais nous allons utiliser la méthode des tangentes obliques à la courbe. En effet, l'idée consiste à remarquer que si au voisinage d'un point x_0 la fonction est croissante à gauche et décroissante à droite alors cette fonction atteint son maximum en x_0. Géométriquement, si les pentes des tangentes à la courbe sont strictement positives sur un intervalle I alors on peut dire que la fonction est croissante sur cet intervalle.



1. On aurait pu deviner que $a/2$ est solution de notre équation puisque dans ce cas le volume est à son minimum, car il est nul (on n'obtient pas de boite dans ce cas).

Ces pentes sont-elles facilement calculables ? La réponse s'obtient aisément en variant légèrement la méthode de Fermat. Pour trouver la pente de la tangente en un point $(x_1, V(x_1))$, on cherche la droite limite reliant ce dernier point à un point $(x_2, V(x_2))$ en faisant tendre x_2 vers x_2, tout en laissant x_1 fixe cette fois-ci.



Quand $x_1 \neq x_2$, la pente de la droite reliant nos deux points vaut

$$\begin{aligned}\frac{V(x_2)-V(x_1)}{x_2-x_1} &= \frac{4(x_2^3-x_1^3)-4a(x_2^2-x_1^2)+a^2(x_2-x_1)}{x_2-x_1} \\ &= 4(x_2^2+x_1x_2+x_1^2)-4a(x_2+x_1)+a^2.\end{aligned}$$

N'est-ce pas la même formule trouvée ci-dessus ? Quand x_2 tend vers x_1, on obtient l'expression suivante de la pente de la tangente en x_1, notée $V'(x_1)$

$$V'(x_1) = 12x_1^2 - 8ax_1 + a^2.$$

Je vous laisse le soin de conclure avec le tableau de signes de V'.