كتبها عبد الحكيم بن شعبانة
يا أستاذ حدثني عن الأعداد الحقيقية ؟
يا ولدي قبل أن أحدثك عن تاريخها وعن معناها أخبرني كيف تقسم مئة حلوة ومئة دينار بالعدل بينك وبين أخويك ؟
التلميذ : أعطي لكل واحد منا 33 حلوة و تبقى حلوة أقسمها على ثلاثة لكل واحد منا ثلث ، أما النقود فأعطي كل واحد منا 33 دينار و 33 سنتيما.
الأستاذ : لكنه بقي سنتيم واحد من المئة دينار ؟ كيف تقسمه
التلميذ : لا يمكن قسمته لأنه ليس لدينا قيم نقدية أقل من السنتيم.
الأستاذ : إذن هي ليست مشكلة قسمة إنما مشكلة عملة أو ليس لديك بالعملة ما تعبر به عن ثلث سنتيم، وقد رأيت كيف أمكنك تقسيم الحلوى بالتعبير عن الثلث.
لكن لو قسمت واحد على ثلاثة فعلى كم تحصل ؟
التلميذ : أحصل على 0.333 لكن الأرقام لا تنتهي بعد الفاصلة
الأستاذ : وماذا يحصل لو أخذ أرقاما عشوائية بعد الفاصلة غير منتهية فهل هذا عدد ؟
التلميذ : نعم

الأستاذ : هل يمكنك كتابته كعدد ناطق أي قسمة عدد صحيح على آخر ؟
التلميذ: لا ليس دائما
الأستاذ : يا ولدي إن الأعداد الحقيقية قديمة قدم الأعداد الطبيعية، فلما اهتم الإنسان بالهندسة واكتشف الدائرة و مبرهنة فيثاغورث سرعان ما تنبه إلى وجود مقاييس لا يمكن التعبير عنها بالأعداد الطبيعية ولا بالأجزاء.
فمبرهنة فيثاغورث تنص على أن مربع الوتر يساوى مجموع مربعي الضلعين القائمين، لكن ما العمل إذا كان طول كل من الضلعين هو الواحد ؟
أما اليوم فمن السهل على أي تلميذ أن يجيبك أن طول الوتر هو الجذر التربيعي لإثنين لكن هذا الجواب ما كان بالسهل في عصر الإغريق إذ لم يكن لديهم علم بالجذور بل حتي الكسور لم تكن عندهم كأعداد مثل اليوم، لكنهم كانوا يعبرون عليها بأجزاء الأطوال هندسيا.
فقد استطاع الإغريق أن يبرهنوا أنه من غير الممكن أن نجد قطعة مستقيمة كجزء يمكننا بها قياس هذا العدد وهذا ما نسميه اليوم بأن الجذر التربيعي لإثنين ليس بعدد ناطق.
بتطور نظرية الأعداد و باستعمال الإنسان لبعض الكسور حاول تقريب هذا العدد بالكسور العشرية و هي مقاليب

قوى لعشرة وهذا الذي فعلته عندما طلبت منك قسمة مئة دينار على ثلاثة فهذا الذي نسميه الكتابة العشرية فهي محاولة كتابة العدد بمجوع قوى موجبة أو سالبة لعشرة .

كان الهنود أول من اكتشف الصفر وقد مكنهم ذلك من كتابة الكثير من الأعداد الناطقة باستعمال الكتابة العشرية وتقريب بعضها كما فعلت بقسمة المئة على ثلاثة بل اكتشفوا أكثر من ذلك أن الأعداد الناطقة عند تقريبها بالأرقام بعد الفاصلة فإما تظهر عددا منتهيا من الأرقام و إما عددا دوريا يتكرر بعد الفاصلة ككتابة

0.5 = 2/1

أو 3/1 يقترب 0.3333

أو 7/12 يقترب من 1.71428571428

والسؤال الذي طرح نفسه ، إذا كان أي عدد ناطق يمكن كتابته على قدر المستطاع بالأعداد العشرية فهل العكس صحيح ؟

لما اهتم العرب بالأعداد أتموا بناء الأعداد الكسرية واعتبروها أعدادا كغيرها وبرسم القطوع الزائدة و الناقصة سرعان ما اكتشفوا الأعداد الجبرية فقسموا الأعداد إلى ثلاث أنواع :

الطبيعية ، الناطقة، و الصماء فاعتبروها أعدادا كغيرها

وقاموا بتقريبها بالحسابات العشرية لكن بقي السؤال مطروحا عن طبيعة هذه الأعداد.
قام نيوتن ولويز في القرن السابع عشر بتأسيس علم جديد يسمى الحساب المتناهي الصغر و ذلك بمحاولة حساب ظل مماس المنحنى، كان هدف نيوتن حساب السرعة و التي نعبر عليها اليوم بمشتق المسافة بالنسبة للزمن فسرعان ما ظهر من ذلك مفهوم النهاية.
فكان من الطبيعي أن يستعمل علماء الرياضيات النهايات لحساب المساحات و الأحجام و ذلك بتقطيعها لأجزاء صغيرة مما أظهر مفهوم المجاميع غير المنتهية فاخترعوا السلاسل العددية والتي هي مجموع لمتتالية عددية.
حاولوا حساب نهاية هذه المجاميع بالطريقة المعهودة بمحاولة تقريبها بالكتابة العشرية لكن لم يصلوا لكتابة ناطقة لها بل برهنوا أن بعضها ليس بناطق لكن بقي السؤال المطروح هل هي جبرية ؟ أي هي حلول لكثيرات حدود ناطقة ؟
أحدث علم الحسابات المتناهية الصغر ثغرة في البراهين الرياضية ذلك أن نيوتن أستعمل بحدسه مبرهنات كمبرهنة القيم المتوسطة و التزايدات المنتهية و التي لا تصح رياضيا في مجموعه الأعداد الناطقة لكن نيوتن كانت له نظرة مستمرة للأعداد نتيجة نظرته للزمن.

كان لزاما على العلماء صناعة مجموعات جديدة تستوعب كل هذه البراهين الناتجة من علم التحليل.
وجب انتظار قدوم أولر ليعتبر هذه القيم الجديدة كأعداد سنة 1770 و حوالي 70 سنة بعدها ليبرهن الرياضي ليوفيل سنة 1844 أن هذه السلاسل لا تتقارب إلى جذور كثيرات حدود ... فسميت هذه الأعداد بالأعداد المتسامية فعلى هذا يمكن تقسيم الأعداد إلى جبرية و هي التي تكون جذرا لكثير حدود ناطق و متسامية و هي التي ليست من هذه.
في الحقيقية سبب تأخر معرفة الرياضيين للأعداد الحقيقية هو قلة الضبط الرياضي السائد في تلك القرون فكان أغلب عملهم يعتمد على الحدس مما ينتج تناقضات عديدة.
أول من نادى بضرورة ضبط الرياضيات هو العالم كوشي أين حاول إعطاء مفهوم رياضي للنهاية باستعمال متتالية عددية مرتبة بأعداد طبيعة والنظر إلى قيمتها عندما يكون العدد الطبيعي كبيرا بالقدر الكافي فاستطاع بذلك برهنة ما يسمى اليوم بتقارب المتتاليات الكوشية وهي أن أي متتالية متقاربة فالفرق بين أي حد من حديها عند قيم كبيرة لترتيبهما الطبيعي يقترب من الصفر.

فكانت هذه الفكرة كافية لبناء الأعداد الحقيقية ، إذ استعملها العالم ميراي سنة 1869 و من بعده كنتور سنة 1872 لصناعة مجموعة الأعداد الحقيقية.

التلميذ : لكن ما هو العدد الحقيقي ؟ هل يمكننا تصوره.

الأستاذ : في الحقيقية العدد الحقيقي ما هو إلا متتالية متقاربة ، فلو طلبت منك كتابة العدد π ؟ فكيف ستكتبه ؟

التلميذ : أكتب 3.14

الأستاذ : هل هذا هو العدد π بالضبط ؟

التلميذ : لا هذا مجرد تقريب

الأستاذ : هل من تقريب أفضل ؟

التلميذ : نعم

3.14159265359

الأستاذ : هل متى ينتهي التقريب ؟

التلميذ : لا ينتهي هناك عدد لا نهائي من الأرقام بعد الفاصلة

الأستاذ : في الحقيقية ما كتبت إلا مجموع أجزاء لقوى لعشرة فهذه سلسلة غير منتهية ، إذن العدد الذي كتبته يمكن التعبير عليه بمتتالية متقاربة.

الأعداد الحقيقية ما هي إلا متتاليات متقاربة أو بمعنى أدق متتالية لكوشي، لأن مفهوم التقارب لا معنى له إن لم تكن لدينا نهاية معرفة في مجموعة.
فإذا جمعنا كل هذه المتتاليات الناطقة الكوشية و قسمناها لمجموعات، في كل مجموعة نضع المتتاليات التي فرقها ينتهي إلى الصفر فكل مجموعة تمثل عددا حقيقيا و هذا ما يسمى في الرياضيات بصنف التكافؤ.
الفكرة ليست جديدة، فكذلك الأعداد الناطقة مكونة بنفس الطريقة ، فما الفرق بين
2/1 ، 8/4، 24/12 ؟
التلميذ : هي نفس العدد الناطق بعد الاختزال
الأستاذ : نعم لكن ما نسميه الأعداد الناطقة ما هي إلا ثنائيات من الأعداد الصحيحة قسمناها مجموعات في كل مجموعة وضعنا نفس ثنائيات الأعداد المتناسبة وهذا كذلك مبني على صنف التكافؤ.
الأعداد الحقيقية يا ولدي ما هي إلا فكرة العقل البشري للاستمرار والتمام إذ لا يمكنه تصور العدم والنقصان وعلى هذا إذا أخذنا سلسلة مجموع متقارب فنحن نلاحظ أنه عند حسابها أن الأرقام بعد الفاصلة تستقر ، نعم تزيد فهي غير منتهية لكن نراها تستقر رويدا رويدا فكأنها تقترب من شيء فما هو هذا الشيء ؟ فإما أن نسلم بالعدم

أنه غير موجود أو أن هناك شيء موجود لكن لا يمكننا الوصول إليه لأن حسابه لا نهائي فقام الإنسان بإعطائه اسما وهذه عادة الإنسان عندما لا يستطيع الإمساك بشيء أعطاه اسما و كأنه معروف عنده فهنا المتتالية نفسها أصبحت عددا.

صناعة مجموعة الأعداد الحقيقية أعطت أكثر من ثمارها فقد أظهرت مفهوم الاستمرار إذ كل متتالية محدودة يمكن استخراج منها متتالية متقاربة و كل مجموعة محدودة يمكن إيجاد حدها الأعلى و الأدنى فأنتجت بذلك مبرهنة القيم المتوسطة ومبرهنة رول و الدوال المستمرة بل برهن كنتور على أنها أغنى من الأعداد الطبيعية إذ هي غير قابلة للعد.

وقد قام العلماء بتعميم بنيتها فأدى ذلك إلى اختراع الطوبولوجيا و الفضاءات الشعاعية و فضاء باناخ و غيرها. فيمكننا اليوم أن نقول الرياضيات وليدة الأعداد الحقيقية و الأعداد الحقيقية وليدة مبرهنة فيثاغورث ...

#منقول #أكاديمية_الرياضيات