A. Robichon

la règle à calculs

FOUCHER - Paris

FOUCHER

Collection **" LES LYCÉES TECHNIQUES "**

Algèbre ..... BOURRÉE & SAINTE-LAGUE

Électricité (2 tomes) ..... LEFRAND, AUCLERC & POINSARD

La mécanique par les problèmes (3 tomes ..... CAMPA, CHAPPERT & PICAND

Collection **" LA TECHNIQUE DU MÉTIER "**

Technologie professionnelle générale pour les mécaniciens.

Tome I ..... A. CAMPA
Tome II .....
Tome III — Procédés d'usinage ..... CAMPA & ROLLET

L'automobile — Technologie professionnelle générale.

Tome I — Les moteurs à quatre temps et à deux temps .... M. DESBOIS
Tome II — Les organes de transmission et d'utilisation.. & A. TOURANCHEAU
Tome III — Le diesel ..... DESBOIS, ARMAO & HARTMANN

Technique de la réparation automobile (2 tomes) ..... DESBOIS & MARIÉ

Technologie d'électricité.

Tome I — Technologie professionnelle générale ..... HEINY & CAPLIEZ
Méthode d'exécution des travaux d'électricité ..... HEINY & DENOJEAN
Tome II — Technologie professionnelle pratique ..... HEINY & DENOJEAN
Tome III — Technique de l'appareillage ..... HEINY ET NAUDY
Tome IV — Applications de l'énergie électrique ..... HEINY, NAUDY & DARÉES
Tome V — Les machines électriques (2 parties)..... HEINY, NAUDY & MARTEL

Technologie de Construction (4 tome) ..... LENORMAND & MIGNÉE

L'automatique par les problèmes (2 tomes) ..... CHAPPERT, COJEAN, THIBERVILLE & CAMPA

Collection **" LA TECHNIQUE GRAPHIQUE "**

Normes et schémas d'électricité ..... HEINY & LE GARFF

Projets d'équipements électriques ..... P. HEINY

Mémento de dessin industriel de mécanique..... G. LENORMAND & J. TINEL
Documentation dimensionnelle. Conventions de représentation.

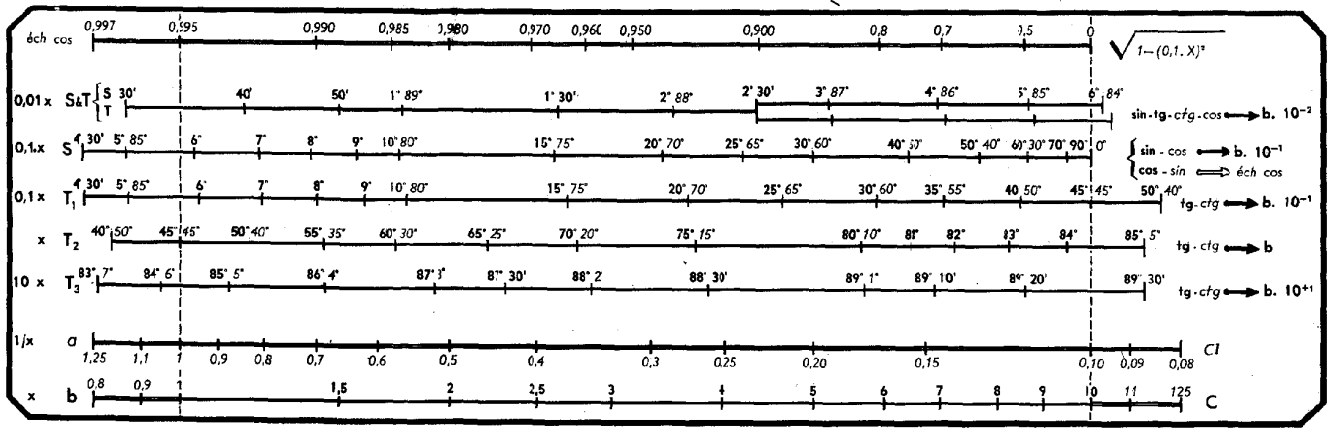
Tables pratiques de fonctions trigonométriques en valeurs naturelles (sinus, tangente, cotangente, cosinus). Arcs en degrés sexagésimaux, degrés décimaux et radians.Complétées de tables de conversions entre degrés sexagésimaux, degrés décimaux, radians et grades. — A. ROBICHON

le Livre au service du Métier

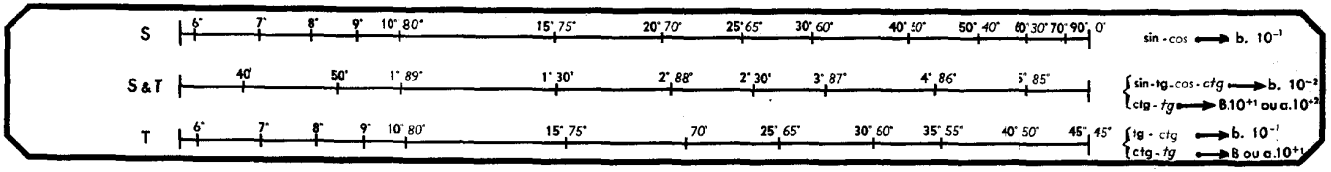
Note générale. — Les éléments gravés *en rouge* sur les règles (traits, lettres et nombres) sont remplacés, sur cette planche, par des traits doubles et des caractères en *italique maigre*.

I. — Règle « double-face ». Système des 5 échelles trigonométriques et de l'échelle cos (avec indications d'emploi).

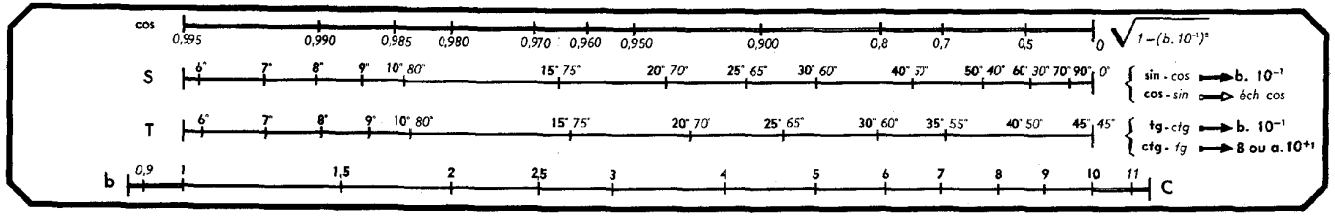
Le plein profit de l'échelle S & T exigerait une échelle cos supplémentaire qui donnerait les cosinus des arcs chiffrés en noir, les sinus et cotangentes des arcs chiffrés en rouge.



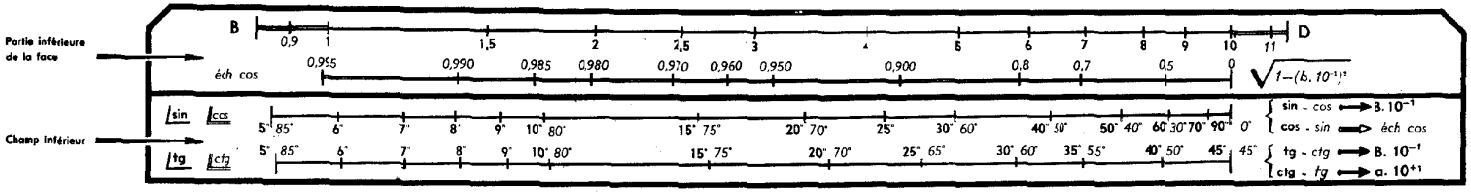
II. — Règle classique « RIETZ ». Verso de la réglette (avec indications d'emploi).



III. — Règle « Log-Log ». Verso de la réglette (avec indications d'emploi). Des modèles récents portent l'échelle S & T.



IV. — Règle « DARMSTADT » (avec indications d'emploi). Sur les modèles récents, les échelles du champ inférieur sont reportées sur la partie fixe de la face.



André ROBICHON
Professeur de Collège d'Enseignement Technique

LA RÈGLE A CALCULS

Méthode d'utilisation rationnelle des règles modernes (y compris les échelles Log-Log, leurs inverses et les échelles hyperboliques)

LES ÉDITIONS FOUCHER
128, rue de Rivoli, Paris

© by Éditions Foucher, 1969.

PREFACE

Les préoccupations des hommes de toute condition sont de plus en plus absorbantes. C'est la rançon de l'accélération des sciences et des techniques. Le travailleur voi sa peine physique diminuer tandis que se développent et se multiplient les tâches où le travail intellectuel est de règle. La conception des ouvrages d'architecture ou des machines, l'organisation des fabrications, l'étude des prix de revient, l'administration des ateliers nécessitent de nombreux et fastidieux calculs qui sont insupportables à des esprits préoccupés par la création ou la décision.

La règle à calculs est devenue l'instrument indispensable à tous ingénieurs, techniciens, agents techniques, contremaîtres, chefs d'équipe et même ouvriers qualifiés.

On doit rendre hommage aux constructeurs de règles à calculs qui se sont efforcés de mettre à la disposition de l'utilisateur un instrument susceptible de résoudre très rapidement des calculs aussi variés que complexes. Ainsi sont devenus possibles les calculs prévisionnels, vite réalisés, qui permettent au projeteur de conduire sûrement son imagination vers la solution la meilleure.

Mais il y a trop, beaucoup trop de possesseurs d'une règle à calculs qui ne savent pas suffisamment tirer profit de cet instrument, en raison de leur manque d'habitude à l'utiliser et de leur ignorance de toutes ses possibilités. Il existe cependant, dans les programmes scolaires, une leçon de mathématiques qui doit être réservée à l'étude de la règle à calculs. Cette seule leçon est inefficace si elle n'est pas suivie de nombreuses et courtes séances d'application et si tous les professeurs chargés des enseignements scientifiques et techniques ne conseillent pas l'emploi de la règle pour effectuer les calculs indispensables à la recherche des solutions numériques. Les professeurs de mathématiques et de dessin industriel des Collèges et Lycées techniques devraient organiser, de concert, de courtes séances de calcul à la règle, judicieusement réparties au cours de l'année scolaire : il suffit de consacrer fréquemment à ces exercices cinq à dix minutes en début de cours et d'imposer systématiquement la règle pour la résolution des différents problèmes. Ainsi, les élèves s'habitueront à utiliser un instrument de travail qui leur rendra, pendant toute leur vie, des services inestimables.

L'ouvrage que M. André Robichon me demande de présenter doit, j'en suis certain, faciliter la tâche des professeurs et des élèves intéressés par l'emploi de la règle à calculs.

Conçu avec le souci de faire comprendre, de donner une méthode de travail, le livre de M. Robichon est divisé en deux parties. La première contient les notions indispensables à l'utilisation de la règle pour des calculs courants. Les possesseurs de règles à calculs « double-face » ou « Béghin » ont intérêt à compléter cette étude par celle des échelles coupées. C'est le contenu de cette première partie qui doit être enseigné à l'École dans les conditions qui viennent d'être définies. La seconde partie constitue un per-

fectionnement pour ceux qui auront à résoudre des opérations plus compliquées et qui pourront seuls se mettre au courant des multiples possibilités des règles à calculs modernes.

Les exercices proposés à l'occasion de chaque chapitre, et dont les solutions sont données dans le fascicule joint à l'ouvrage, facilitent la compréhension des méthodes de calcul et permettent l'entraînement de ceux qui n'auront pas la chance d'être guidés par un professeur.

La lecture attentive de cet ouvrage montre que tout calcul à la règle ne peut être entrepris sans préparation : il doit nécessairement être pensé; c'est précisément pour cette raison que l'entraînement au calcul numérique, au moyen d'une règle, peut concourir efficacement à la formation intellectuelle de nos élèves et qu'il doit trouver place dans nos programmes de formation professionnelle.

M. André Robichon mérite d'être complimenté pour l'excellent travail qu'il vient de mettre au point : en aidant à la diffusion de l'emploi de la règle à calculs, et surtout à sa meilleure utilisation, il aura certainement rendu un grand service à tous ceux qui ont, à l'École ou dans les entreprises industrielles et commerciales, des applications numériques à exécuter.

A. Campa,
Inspecteur général
de l'Enseignement technique.

HISTORIQUE
DE LA RÈGLE A CALCULS

Les logarithmes furent imaginés par le baron écossais NEPER, en anglais : John NAPIER (1550-1617). Son contemporain et ami BRIGGS, professeur de mathématiques à Londres, s'intéressa particulièrement aux logarithmes décimaux et fit éditer une table à 14 décimales.

Peu de temps après, l'écossais Edmund GUNTER (1581-1619) construisit une règle unique en cuivre, portant des divisions proportionnelles aux logarithmes décimaux des nombres de 1 à 100. Par report aux pointes sèches, il additionnait et soustrayait les logarithmes de deux nombres, réalisant la multiplication et la division.

Le français Étienne LENOIR (1744-1832) eut l'idée de faire coulisser deux règles identiques à la précédente, évitant le report aux pointes sèches. Le lieutenant français Amédée MANNHEIM améliora la règle LENOIR en la doublant. Il fit coulisser l'une contre l'autre :

— d'une part, deux échelles graduées de 1 à 100 ;
— d'autre part, deux échelles graduées de 1 à 10.

Les extrémités des deux systèmes étant en concordance, le carré, la racine carrée s'obtenaient par correspondance directe, grâce à un curseur qui permettait en outre les repérages.

Par la suite, à la règle MANNHEIM furent ajoutées les échelles des sinus, des tangentes et des logarithmes décimaux.

Si l'originalité des travaux de NAPIER, BRIGGS et GUNTER est incontestée, celle des améliorations de LENOIR et MANNHEIM est discutée. Les anglais attribuent la règle LENOIR à leur compatriote William OUGHTRED en 1630 et la règle MANNHEIM à John WARNER. Leur physicien Peter ROGET serait aussi l'inventeur des échelles Log-Log en 1815.

Toujours est-il que la règle n'a cessé de s'améliorer par incorporation de nouvelles échelles. Le système MANNHEIM (ou WARNER) a été suivi des systèmes RIETZ, BEGHIN, DARMSTADT, Log-Log. Le perfectionnement le plus récent est l'adjonction des échelles 1/LL (ou LL inverses).

Enfin, il faut citer A. SÉJOURNÉ, professeur de l'Enseignement technique français, dont le nom est attaché au développement des applications de la règle à calculs.

D'autre part, des tentatives furent faites sur la forme : « règle » circulaire (en 1733), « règle » cylindrique (Georges FULLER, de Belfast, en 1878), « règle » spirale (1733), « règle » hélicoïdale...

Pour des raisons diverses, ces formes eurent peu de succès.

La règle droite reste, de loin, la plus répandue ; sa disposition « double-face », dont le premier spécimen paraît dater de 1891, prend un nouveau départ et semble devoir s'imposer : elle simplifie les manœuvres recto-verso, suppléant ainsi au manque de place.

Il est également possible que la forme spirale renaisse. Mieux que toute autre, elle se prête aux échelles dont la sensibilité va en diminuant : échelles trigonométriques et échelles Log-Log.

Des règles spéciales ont été étudiées pour certaines professions et pour des usages particuliers. Quelques-unes sont remarquables, d'autres fort discutables.

Symboles	Énoncés	Symboles	Énoncés
I. — Logarithmes — NF. X 02-101.			
exp x	exponentielle de x ; exp $x = e^x$	lb x ou $\log_2 x$	logarithme binaire de x
$\log_a x$	logarithme de base a de x	colog x	cologarithme (décimal) de x
ln x ou $\log_e x$	logarithme népérien de x	M	Module du système de logarithme de base 10 par rapport au système de base e ; $M = \log_{10} e = 0{,}434\,29$.
lg x ou $\log_{10} x$	logarithme décimal de x		
II. — Fonctions trigonométriques — NF. X 02-101.			
sin x	sinus x	arcsin x	arc sinus x
cos x	cosinus x	arccos x	arc cosinus x
tg x	tangente x	arctg x	arc tangente x
cot x	cotangente x	arccot x	arc cotangente x
sec x	sécante x ; $\sec x = \frac{1}{\cos x}$	arcsec x	arc sécante x
cosec x	cosécante x ; $\operatorname{cosec} x = \frac{1}{\sin x}$	arccosec x	arc cosécante x
$S_{(x)}$	$S_{(x)} = \log_{10} \frac{\sin x}{x}$	$T_{(x)}$	$T_{(x)} = \log_{10} \frac{\operatorname{tg} x}{x}$
III. — Fonctions hyperboliques — NF. X 02-101.			
sh x	sinus hyperbolique x	cosech x	cosécante hyperbolique x
ch x	cosinus hyperbolique x	arg sh x	argument sinus hyperbolique x
th x	tangente hyperbolique x	arg ch x	argument cosinus hyperbolique x
coth x	cotangente hyperbolique x	arg th x	argument tangente hyperbolique x
sech x	sécante hyperbolique x	arg coth x	argument cotangente hyperbolique x

IV. — Mesure des angles et arcs.

FD. X n° 02-002, n° 02-004, n° 02-005, n° 02-006, n° 02-010.

L'unité SI d'angle plan est *le radian* (rd ou rad). C'est l'angle plan qui, ayant son sommet au centre d'un cercle, intercepte, sur la circonférence de ce cercle, un arc de longueur égale à celle du rayon.

Autres unités
- L'angle droit = $\pi/2$ rd
- Le degré (°) = $\pi/180$ rd
- Le grade (gr) = $\pi/200$ rd
- Le tour (tr) = 2π rd

Division décimale du degré. Les sous-multiples décimaux du degré sont : le décidegré, le centidegré, le millidegré, le microdegré.
Pour 48,236 degrés, on écrit 48,236°.

Division sexagésimale du degré. Les sous-multiples sexagésimaux sont : la minute (′), soixantième partie du degré ; la seconde (″), soixantième partie de la minute.

Pour 12 degrés 18 minutes 5 secondes, on écrit : 12°18′05″.
Pour 12 degrés 28 minutes 6/10 de minutes, on écrit : 12°28,6′.

COURS ÉLÉMENTAIRE DE RÈGLE A CALCULS

Étude sommaire des échelles des nombres, des inverses, des carrés, des cubes, des échelles trigonométriques et de l'échelle des logarithmes décimaux

CHAPITRE 1

DESCRIPTION
DE LA RÈGLE A CALCULS

1 — Description générale

Une règle comprend :

1° **une partie fixe,** dans laquelle est pratiquée une rainure longitudinale. Elle porte plusieurs échelles, dans tous les cas au recto, parfois au verso (« double-face »), plus rarement sur le champ (ancienne « DARMSTADT »).

2° **une réglette,** coulissant dans la rainure précédente. Presque toujours, elle porte des échelles et au recto et au verso.

3° **un curseur transparent,** glissant sur l'ensemble et gravé de traits verticaux. Il sert à repérer les valeurs portées sur les échelles et à assurer les alignements entre échelles. Dans l'attente d'autres indications (au n° 45), l'élève ne devra se servir que du trait médian (1).

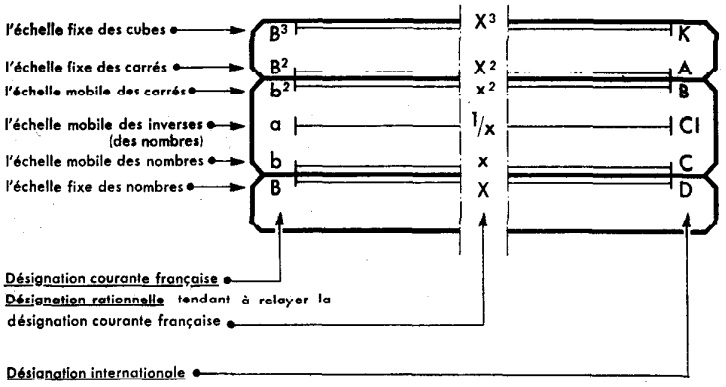
Sur le curseur des règles « double-face », les traits médians du recto et du verso sont en correspondance.

---

(1) Pour éviter des erreurs. Provisoirement, les autres traits pourront servir en cas de gêne (repérage à une extrémité).

2 — Désignation des échelles

Pour l'instant nous écartons les échelles trigonométriques et logarithmiques. Cette réserve étant faite, nous trouvons sur toutes les règles classiques :



Les règles « BEGHIN » et « double-face » portent d'autres échelles de nombres, de cubes, d'inverses,... qui seront examinées dans les seconde et troisième parties du cours.

Dans cet ouvrage, nous utiliserons la désignation française, la plus courante. *Nous indiquerons à la suite, entre parenthèses, la désignation internationale.*

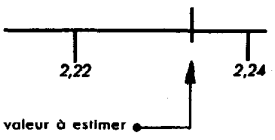
3 — Lecture des échelles

Il est absolument indispensable de lire correctement les échelles. Pour cela, il faut :

1° *S'assurer en combien de parties est partagé un intervalle.* La division en 5 parties est particulièrement dangereuse ; le débutant risque de lire, par exemple, 3,82 au lieu de 3,84.

2° *Interpoler convenablement.* En ce qui concerne la règle, l'interpolation consiste à déterminer, au jugé, entre deux valeurs repérées, une valeur intermédiaire, proportionnellement aux écarts.

En théorie nous commettons une erreur : les longueurs portées sur les échelles ne sont pas proportionnelles aux valeurs qu'elles représentent (voir n° 9). Cependant, dans un petit intervalle, cette erreur théorique est négligeable devant l'erreur due à l'imperfection de nos sens.



REMARQUE IMPORTANTE

Contrairement aux indications données dans certaines méthodes, **nous lirons toujours les échelles telles qu'elles sont graduées.**

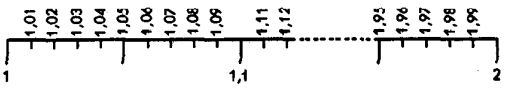
Exemple : l'échelle B(D) est graduée de 1 à 10. Nous pouvons y lire 2,14; nous ne pouvons y trouver ni 0,214, ni 21,4. Il est évident que sur les prolongements nous lisons 0,915 ou 11,2.

L'élève ne pourra placer méthodiquement la virgule qu'en respectant ce premier principe fondamental et logique.

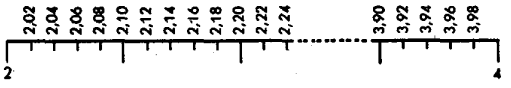
EXEMPLES POUR LA RÈGLE DE 25 cm

Échelles des nombres B(D) et b(C)

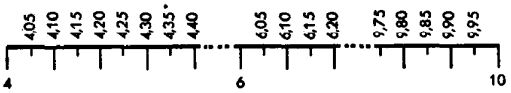
Entre 1 et 2 :
1 division = 1/100 = 0,01
Fig. 1.



Entre 2 et 4 :
1 division = 2/100 = 0,02
Fig. 2.



Entre 4 et 10 :
1 division = 5/100 = 0,05
Fig. 3.

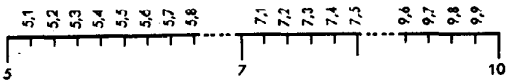


Échelles des carrés B^2(A) et b^2(B)

Entre 1 et 2 : 1 division = 2/100 = 0,02 (voir *fig.* 2).

Entre 2 et 5 : 1 division = 5/100 = 0,05 (voir *fig.* 3).

Entre 5 et 10 :
1 division = 1/10 = 0,1
Fig. 4.



Échelle des cubes B^3(K)

Même lecture que l'échelle des carrés.

◇

CHAPITRE 2

LES PUISSANCES

(Rappel d'algèbre)

4 — Pour mettre la virgule en place, *et dans tous les cas*, nous appliquerons la théorie des puissances, d'où l'utilité du présent rappel.

L'élève trouvera les démonstrations dans les manuels d'algèbre.

5 — Théorie générale des puissances

1° *Base*: $X^n = X \cdot X \cdot X \cdots X$ (X est multiplié n fois par lui-même).

2° $X^m \cdot X^n \cdot X^p = X^{m+n+p}$ *ex*: $X^2 \cdot X^3 = X^5$.

3° $(X^m)^n = X^{m \cdot n}$ *ex*: $(X^3)^2 = X^6$.

4° $\dfrac{X^m}{X^n} = X^{m-n}$ *ex*: $\dfrac{X^5}{X^3} = X^2$.

Conséquence: $X^0 = 1$, puisque $X^0 = X^{n-n} = \dfrac{X^n}{X^n} = 1$.

5° $\dfrac{1}{X^n} = X^{-n}$ *ex*: $\dfrac{1}{X^3} = X^{-3}$.

> **Règle importante.** — Quand une puissance passe du dénominateur au numérateur (ou inversement), son exposant change de signe.

6° $\sqrt[n]{X} = X^{\frac{1}{n}}$ et $\sqrt[n]{X^m} = X^{\frac{m}{n}}$.

L'exposant est dit *fractionnaire;* par extension :

$$\frac{1}{\sqrt[n]{X}} = X^{-\frac{1}{n}} \qquad \frac{1}{\sqrt[n]{X^m}} = X^{-\frac{m}{n}}$$

ex.: $\sqrt[3]{X} = X^{\frac{1}{3}}$ $\sqrt[2]{X^3} = X^{\frac{3}{2}}$ $\dfrac{1}{\sqrt[3]{X^2}} = X^{-\frac{2}{3}}$.

6 — Transformation des nombres

Nous rendrons les nombres repérables sur la règle en déplaçant leur virgule et en leur associant une puissance de 10.

Ainsi, selon la nature du calcul, nous transformerons :

13 820 en :		0,004 38 en :	
	$1{,}382 \times 10^{4}$		$4{,}38 \times 10^{-3}$
ou	$0{,}1382 \times 10^{5}$	ou	$0{,}438 \times 10^{-2}$
ou	$13{,}82 \times 10^{3}$	ou	$43{,}8 \times 10^{-4}$
ou	$138{,}2 \times 10^{2}$	ou	438×10^{-5}.

RÈGLE FONDAMENTALE

Pour rendre un nombre repérable sur une des échelles de la règle, on le transforme en déplaçant sa virgule.

Sa nouvelle valeur est multipliée par une puissance de 10 dont *l'exposant*, que nous conviendrons d'appeler *exposant de transformation, est égal au nombre algébrique de rangs dont a été déplacée la virgule.*

Le déplacement vers la gauche est de sens positif: le nombre devenant plus petit, la puissance de 10 d'exposant positif corrige la modification. Le déplacement vers la droite est évidemment de sens négatif.

7 — Transformation réciproque

Nous procéderons en sens inverse.

RÈGLE FONDAMENTALE RÉCIPROQUE

Lorsqu'une valeur est donnée sous forme du produit d'un nombre par une puissance de 10, l'exposant de cette puissance indique de combien de rangs il faut déplacer la virgule du nombre pour l'écrire sous la forme usuelle.

Le déplacement s'effectue :

- vers la droite si l'exposant est positif (le nombre devient plus grand) ;
- vers la gauche, si l'exposant est négatif.

EXEMPLES

$7{,}893 \times 10^{+6} = 7\,893\,000$

$7{,}893 \times 10^{-2} = 0{,}078\,93$

$573 \times 10^{-4} = 0{,}057\,3$

$0{,}071 \times 10^{+4} = 710.$

8 — Application aux opérations

Pour effectuer une opération :

1° Nous rendrons tous les nombres repérables sur la règle en déplaçant leur virgule (transformation du n° 6).

2° Nous opérerons ensuite et séparément :

- d'une part sur les nombres transformés, en utilisant la règle ;
- d'autre part sur les puissances de 10, en appliquant la théorie rappelée au n° 5.

3° Nous obtiendrons ainsi le produit d'un nombre par une puissance de 10 ; nous en ferons un nombre ordinaire en pratiquant la transformation réciproque (n° 7).

EXEMPLES

1° **Produit** : $1845 \times 0{,}432$ sera transformé en :

$$(1{,}845 \times 10^{3}) \times (4{,}32 \times 10^{-1}) = (1{,}845 \times 4{,}32) \times 10^{+2}$$

- **sur la règle nous effectuerons $1{,}845 \times 4{,}32$, les facteurs étant repérables. Le résultat sera multiplié par 10^2 (virgule déplacée de 2 rangs vers la droite).**

2° **Quotient :**

$$\frac{78{,}13}{415} = \frac{7{,}813 \times 10^{+1}}{4{,}15 \times 10^{+3}} = \frac{7{,}813}{4{,}15} \times 10^{-2}$$

- *rappel :* l'exposant (+ 2) passant du dénominateur ou numérateur change de signe (n° 5-5°).

3° **Combinaison d'opérations :**

$$\frac{29 \times 0{,}071}{0{,}614} = \frac{(2{,}9 \times 10^{+1}) \times (7{,}1 \times 10^{-2})}{(6{,}14 \times 10^{-1})} = \left(\frac{2{,}9 \times 7{,}1}{6{,}14}\right)$$

- l'exposant (— 1) change de signe ; la puissance finale de 10 est : $10^{+1-2+1} = 10^{0} = 1$.

4° **Puissance :**

$$(254)^2 = (2{,}54 \times 10^{+2})^2 = (2{,}54)^2 \times 10^{+4}$$

- **l'exposant de transformation (+2) est multiplié par l'exposant de puissance (+ 3) : application du n° 5-3°.**

5° **Racine :** Comme : $\sqrt[n]{10} = 10^{1/n}$ et $\sqrt[n]{10^m} = 10^{m/n}$, il faut rendre entier l'exposant fractionnaire ; pour cela, il suffit de *déplacer la virgule par tranches de* n *chiffres.*

Ainsi :

$\sqrt[3]{1\,857\,000}$ ou $\sqrt[3]{1\,857\,000} = \sqrt[3]{1{,}857 \times 10^{6}} = \sqrt[3]{1{,}857} \times 10^{2}$

- **virgule déplacée de 3 tranches de 2 chiffres**

$\sqrt[3]{1\,857\,000} = \sqrt[3]{1{,}857 \times 10^{6}} = \sqrt[3]{1{,}857} \times 10^{2}$

- **virgule déplacée de 2 tranches de 3 chiffres.**

En conclusion : **la virgule est déplacée par tranches de 2,3,...** n **chiffres sous racine carrée, cubique,...** $n^{\text{ième}}$.

L'exposant final (hors radical) **est égal au nombre algébrique** (1) **de tranches.**

6° **Note pratique.** — Par la suite, et pour toutes les opérations, nous mettrons au point une indication des exposants de 10 qui réduira les écritures.

◇

(1) **Sens positif précisé dans la règle n° 8.**

CHAPITRE 3

LA MULTIPLICATION
avec les échelles des nombres

9 — Les échelles B(D) et b(C)

Sur ces échelles, rigoureusement identiques, *les longueurs : 1-2, 1-3, 1-4,..., 1-9, 1-10, sont proportionnelles*, non pas aux écarts numériques, mais *aux logarithmes décimaux des nombres 2, 3, 4,..., 9, 10.*

L'étude des logarithmes se fait en algèbre, à la suite des progressions. Pour les besoins du moment, il suffit de savoir qu'à chaque nombre est associé un autre nombre, son *logarithme décimal*, qui jouit de propriétés particulières ; notamment, il facilite les calculs. Son écriture est normalisée :

logarithme décimal de X s'écrit : $\log_{10} X$ ou lg X. (NF. X 02-101)

10 — Produit de deux nombres repérables sur les échelles B(D) et b(C)

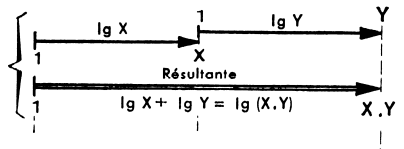
1° PRINCIPE

L'opération est basée sur une première propriété des logarithmes : *le logarithme d'un produit est égal à la somme des logarithmes des facteurs :*

$$\lg (X \cdot Y) = \lg X + \lg Y.$$

Ainsi, la multiplication se résout en addition.

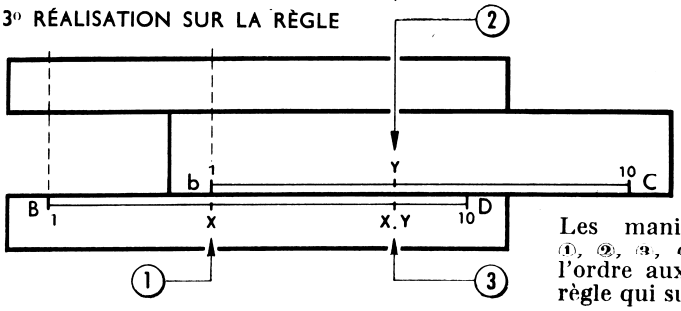
2° INTERPRÉTATION VECTORIELLE



Commentaire. — Les longueurs 1-X, 1-Y sont proportionnelles à lg X et lg Y. Leur somme est proportionnelle à lg X · Y.

Note. — Les vecteurs ont pour origine 1, car lg 1 = 0.

3° RÉALISATION SUR LA RÈGLE



Les manipulations repérées ①, ②, ③, correspondent dans l'ordre aux nos 1, 2, 3 de la règle qui suit.

4° RÈGLE

Pour effectuer le produit de deux nombres X et Y, repérables sur les échelles B(D) et b(C) :

1° Placer l'index 1 de la réglette face à la valeur X, prise sur l'échelle B(D).

2° Repérer sous le trait médian (1) du curseur la valeur Y, prise sur l'échelle b(C).

3° Lire le produit, à l'alignement (donc sous le trait du curseur) sur l'échelle B(D).

5° EXEMPLE

$2{,}42 \times 3{,}16 = 7{,}65$ (à effectuer).

11 — Cas particulier

La lecture tombe, à droite, en dehors de la graduation de l'échelle B(D) (lecture impossible).

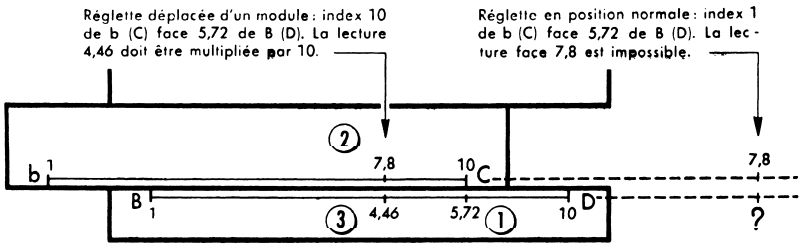
Si l'échelle B(D) était prolongée à droite, la section 1-10 serait suivie d'une section 10-100 absolument identique, mais avec des lectures 10 fois plus grandes (2) ; ainsi la lecture se prendrait entre 10 et 100.

Nous obtenons le même résultat, à 10 fois près, en déplaçant la réglette d'une section (ou d'un module) vers la gauche, l'index 10 prenant la place de l'index 1. La lecture se prend toujours sur l'échelle B(D), mais elle doit être multipliée par 10.

Dans la multiplication à deux facteurs, la lecture hors-règle est prévisible ; l'index 10 peut être directement placé en regard de X.

EXEMPLE

$5{,}72 \times 7{,}8 = 44{,}6$



(1) Revoir renvoi (1) du n° 1.

(2) C'est ce qui se produit sur l'échelle B²(A) avec des sections plus courtes.

RÈGLE COMPLÉMENTAIRE

Si la lecture risque de tomber hors-règle, à droite de la section 1-10 de l'échelle B(D) :

1° *Placer l'index 10* (au lieu de l'index 1) de l'échelle b(C) *face à la valeur* X, prise sur l'échelle B(D).

2° Repérer toujours Y sur l'échelle b(C), sous le trait médian du curseur.

3° Lire encore le produit à l'alignement sur l'échelle B(D), mais *multiplier la lecture par* 10.

12 — Prolongements des échelles B(D) et b(C) (généralement en rouge)

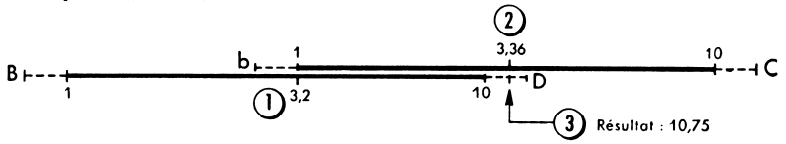
REMARQUE PRÉALABLE

Les lectures du prolongement gauche doivent être inférieures à 1 : 0,90, 0,91,.... etc... ; les lectures du prolongement droit doivent être supérieures à 10 : 10,1, 10,2,...,11,... etc. Le manipulateur rectifiera si la gravure est différente (1).

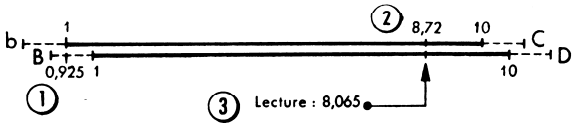
UTILISATION

Les prolongements évitent parfois la multiplication par l'index 10.

1er *exemple :* 3,2 × 3,36 = 10,75



2e *exemple :* 0,925 × 8,72 = 8,065.



13 — Produit de deux nombres quelconques

La question a été traitée au n° 8-1°.

Les facteurs sont rendus repérables sur les échelles par déplacement de leur virgule et nous retrouvons les conditions des nos 10 à 12.

EXEMPLES

$18\,420 \times 0{,}034\,8 = (1{,}842 \times 3{,}48) \times 10^{4-2} = 6{,}41 \times 10^{2} = 641$

$78\,130 \times 0{,}432 = (7{,}813 \times 4{,}32) \times 10^{4-1} = (3{,}375 \times 10) \times 10^{3} = 33\,750$

● multiplication par l'index 10 ; la lecture est multipliée par 10.

(1) Sur la majorité des règles, les prolongements ne sont pas gradués comme nous l'indiquons.

14 — Disposition pratique des écritures

Afin de ne pas perdre, dans de longues écritures, le principal avantage de la règle (la rapidité), nous avons conçu une notation simplifiée des exposants.

NOTATION DES EXPOSANTS DANS LA MULTIPLICATION

1° L'exposant de *transformation* (résultant du déplacement de la virgule) est placé au-dessus du facteur qu'il concerne. Si un nombre est pris sur un prolongement, sa valeur transformée est exceptionnellement indiquée.

2° L'exposant de *translation* ou manipulatoire (multiplication par l'index 10) est placé au-dessus du signe d'égalité.

EXEMPLES

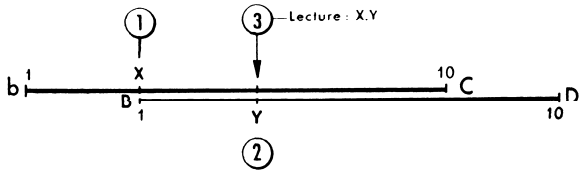
$$\overset{+4}{32\,500} \times \overset{-3}{0{,}001\,87} = 6{,}08 \times 10 = 60{,}8$$

$$\overset{+2}{785} \times \overset{-1}{0{,}000\,532} \overset{+1}{=} 4{,}175 \times 10^{-1} = 0{,}417\,5$$ ● multiplication par l'index 10.

$$\overset{-1(0{,}925)}{0{,}092\,5} \times \overset{+2}{443} = 4{,}1 \times 10 = 41$$ ● index 1 face à 0,925 de B(D).

15 — Interversion des échelles

Nous pouvons intervertir les rôles des échelles b(C) et B(D), comme l'indique la *figure* suivante :



L'interversion est une source d'erreurs ; elle est à éviter ; nous ne l'utiliserons que dans des cas exceptionnels (1).

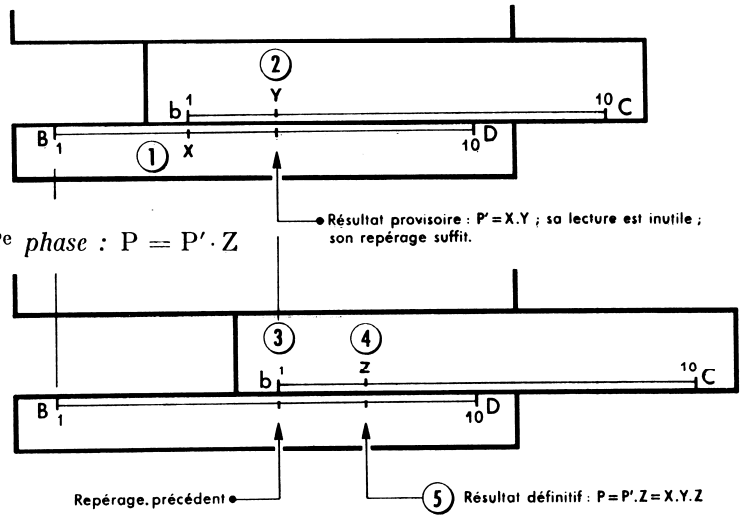
16 — Produit de plusieurs facteurs

Il suffit de faire une suite de multiplications. Ainsi, pour effectuer

(1) Conclusion valable pour la division et toutes les autres opérations, sauf les correspondances (chapitres 30 à 33).

$P = X \cdot Y \cdot Z$, nous procédons en deux phases :

1re phase : $P' = X \cdot Y$



ORDRE DES MANIPULATIONS

1re phase : 1° Placer l'index 1 de la réglette face à la valeur X, prise sur l'échelle B(D).

2° *La réglette restant immobile,* repérer au curseur (trait médian) la valeur Y sur l'échelle b(C).

2me phase : 3° *Le curseur restant immobile,* amener l'index 1 de la réglette sous le trait médian du curseur.

4° *La réglette restant à nouveau immobile,* repérer au curseur la valeur Z sur l'échelle b(C).

5° Faire la lecture finale sur l'échelle B(D), à l'alignement, sous le trait du curseur.

FACTEURS QUELCONQUES

Leur virgule est déplacée, comme au n° 13. Chaque fois qu'un repérage ou que la lecture finale risque de tomber hors-règle, nous utilisons l'index 10 et ajoutons + 1 aux exposants.

Nous conservons la notation du n° 14, en superposant, s'il y a lieu, les exposants de translation.

EXEMPLES

$$A = \overset{+2}{164} \times \overset{-2}{0{,}024\,8} \times \overset{+3}{2\,250} = 9{,}15 \times 10^{+3} = 9\,150$$

$$B = \overset{-3}{0{,}004\,38} \times \overset{-1}{0{,}213} \times \overset{+1}{54{,}16} = \overset{+1}{5{,}05} \times 10^{-2} = 0{,}050\,5$$

● un produit partiel par l'index 10.

$$C = \overset{+2}{784} \times \overset{+3}{8\,432} \times \overset{-2}{0{,}091\,3} = \overset{+1}{6{,}04} \times 10^{5} = 604\,000$$

● deux produits partiels par l'index 10.

17 — Extension — Recours à l'inversion (1)

La méthode du n° 16 peut être étendue à un 4e, un 5e,... facteurs. Il est plus rapide de recourir à l'inversion.

18 — Compléments

● Série de produits par un facteur commun — voir n° 163.
● Précision — voir n° 104.
● Produit de nombres voisins de 1 — voir n° 148-1°.

EXERCICES D'APPLICATION (2)

Effectuer les opérations suivantes : $A = 846 \times 5\,425$

$B = 0{,}002\,43 \times 0{,}219$ $\quad C = 12\,850\,000 \times 0{,}000\,056$

$D = 789 \times 67{,}8 \times 10^{+3}$ $\quad E = 1\,413 \times 213{,}8 \times 0{,}181$

$F = 5\,410 \times 1{,}817 \times 0{,}038 \times 10^{-2}$ $\quad G = (9{,}615 \times 10^{-5}) \times (8{,}424 \times 10^{-3}) \times 748.$

● Le débutant devra surtout chercher la cause de ses erreurs dans la mauvaise lecture des échelles.

◇

(1) L'*inversion*, définie au n° 33, consiste à remplacer une multiplication par une division ou réciproquement, sous condition de substituer au facteur X son inverse 1/X.
Elle ne doit pas être confondue avec l'*interversion*, définie au n° 15 (échange de rôles entre échelles fixe et mobile identiques).

(2) Le lecteur trouvera les réponses des exercices proposés dans le fascicule joint à l'ouvrage.

CHAPITRE 4

LA DIVISION
avec les échelles des nombres

19 — Quotient de deux nombres repérables sur les échelles B(D) et b(C)

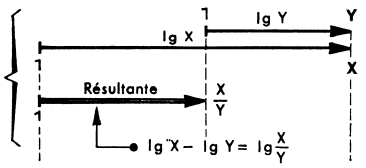
1° PRINCIPE

Nous utilisons une seconde propriété des logarithmes : *le logarithme d'un quotient est égal au logarithme du dividende moins le logarithme du diviseur :*

$$\lg \frac{X}{Y} = \lg X - \lg Y.$$

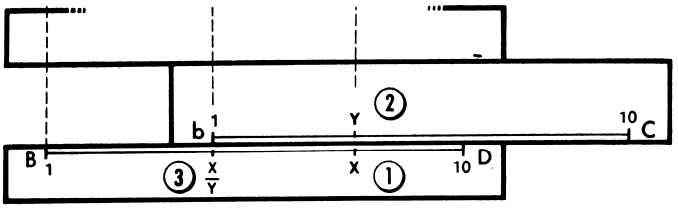
Ainsi la division se résout en soustraction.

2° INTERPRÉTATION VECTORIELLE



Commentaire. — Les longueurs 1-X et 1-Y étant proportionnelles à lg X et lg Y, leur différence est proportionnelle à $\lg \frac{X}{Y}$.

3° RÉALISATION SUR LA RÈGLE



4° RÈGLE

Pour calculer le quotient de deux nombres X et Y, repérables sur les échelles B(D) et b(C) :

1° Repérer, sous le trait médian du curseur, la valeur X prise sur l'échelle B(D).

2° Amener sous ce trait la valeur Y, prise sur l'échelle b(C).

3° Lire le quotient sur l'échelle B(D), face à l'index 1 de la réglette.

5° EXEMPLES

$$A = \frac{7,82}{3,96} = 1,975$$

$$B = \frac{4,4}{4,5} = 0,978.$$ ● La lecture est prise sur le prolongement gauche de B(D).

20 — Cas particulier

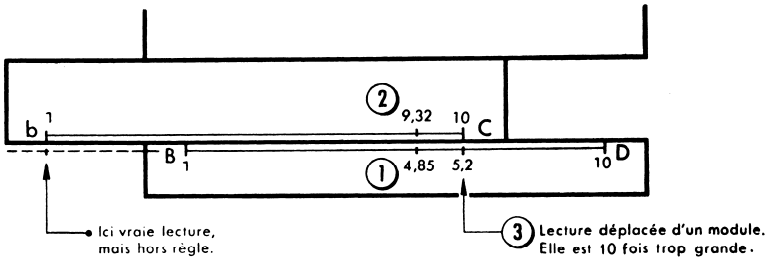
La lecture tombe, à gauche, en dehors de la graduation de l'échelle B(D).

Si l'échelle B(D) était prolongée à gauche. la section 1-10 serait précédée d'une section 0,1-1 identique, avec toutefois des lectures 10 fois plus petites ; ainsi la lecture se prendrait entre 0,1 et 1.

En lisant en regard de l'index 10, au lieu de l'index 1, nous déplaçons la lecture d'un module vers la droite. Elle doit être divisée par 10 (ou multipliée par 0,1 ou 10^{-1}).

EXEMPLE

$$C = \frac{4,85}{9,32} = 0,52.$$



RÈGLE COMPLÉMENTAIRE

Si la lecture du quotient tombe hors-règle, à gauche de la graduation de l'échelle B(D) :

- Ne rien changer au mode opératoire.
- Mais lire le résultat sur l'échelle B(D), face à l'index 10 (au lieu de l'index 1) de l'échelle b(C) ; la lecture doit être multipliée par 0,1 ou 10^{-1}, ce qui revient à la diviser par 10.

21 — Quotient de deux nombres quelconques

Nous rendons les nombres repérables sur les échelles en déplaçant leur virgule (voir n° 8-2°) ; ainsi l'opération se trouve ramenée à ce qui précède.

DISPOSITION PRATIQUE DES CALCULS

Nous conservons les conventions du n° 14, en notant que, dans la division, l'exposant de translation est — 1.

CONVENTION NOUVELLE

L'exposant de transformation du dénominateur, changeant de signe en passant au numérateur (n° 8-2°), nous convenons de le placer, *changé de signe, sous le dénominateur.*

Cette convention permet de faire ensuite la somme des exposants, tels qu'ils sont posés.

Exemples : nous plaçons — 2 sous le dénominateur 432 et + 1 sous le dénominateur 0,481.

APPLICATIONS

$$Q_1 = \frac{8940^{+3}}{54{,}7_{-1}} = 1{,}635 \times 10^{+2} = 163{,}5$$

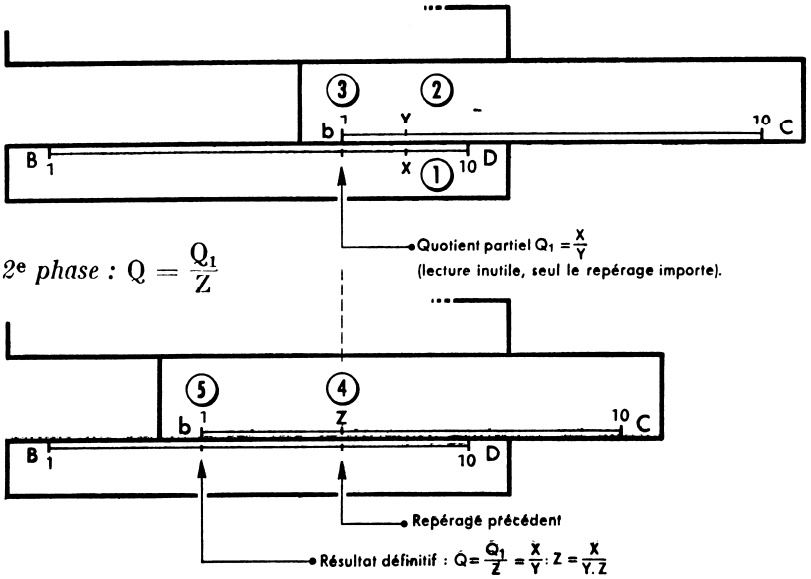
$$Q_2 = \frac{0{,}069\,3^{-2}}{0{,}000\,847_{+4}} = 8{,}18 \times 10^{-1} = 81{,}8$$

(lecture face index 10).

22 — Suite de deux divisions

Pour effectuer $Q = \frac{X}{Y \cdot Z}$, nous opérons en deux phases :

1re phase : $Q_1 = \frac{X}{Y}$



2e phase : $Q = \frac{Q_1}{Z}$

ORDRE DES MANIPULATIONS

1re phase : 1° Repérer au curseur (trait médian) la valeur X sur l'échelle B(D).

2° *Le curseur restant immobile,* amener sous son trait médian la valeur Y prise sur l'échelle b(C).

3° *La réglette restant immobile,* repérer au curseur (trait médian) l'index 1 de la réglette.

2me phase : 4° *Le curseur restant immobile,* amener sous son trait médian la valeur Z prise sur l'échelle b(C).

5° Faire la lecture sur l'échelle B(D), en regard de l'index 1 de la réglette.

Chaque fois que l'index 1 de la réglette est hors-règle, utiliser l'index 10 et rectifier par l'exposant — 1.

Position de la virgule. Disposition pratique des calculs. — Se reporter au n° 21.

EXEMPLES

$$D = \frac{\overset{+2}{984}}{\underset{-1}{22{,}5} \times \underset{+4}{0{,}000\,313}} = 1{,}397 \times 10^{+5} = 139\,700$$

$$E = \frac{\overset{+3}{1\,325}}{\underset{-3}{9\,816} \times \underset{+3}{0{,}008\,95}} \overset{-1}{\underset{-1}{=}} 1{,}508 \times 10 = 15{,}08$$

(l'index 10 est utilisé deux fois : pour le repérage et pour la lecture finale).

23 — Extension

En étendant le procédé, nous pouvons faire la suite de divisions :

$$Q = \frac{X}{Y \cdot Z \cdot V \cdot W \ldots}.$$

L'opération est longue ; il est préférable de recourir à l'inversion (chapitre 6).

24 — Compléments

- Série de quotients par un diviseur commun — voir n° 166.
- Précision — voir n° 104.
- Quotient de nombres voisins de 1 — voir n° 148-2°.

EXERCICES D'APPLICATION

Effectuer les divisions suivantes :

$$A = \frac{84\,600}{58{,}6} \qquad B = \frac{0{,}074\,8}{443}$$

$$C = \frac{2{,}89 \times 10^{+5}}{5{,}72 \times 10^{+3}} \qquad D = \frac{1\,413 \times 10^{+5}}{0{,}807 \times 10^{-3}}$$

$$E = \frac{5\,820}{2\,840 \times 72{,}6} \qquad F = \frac{1\,453}{0{,}084\,4 \times 6\,413}$$

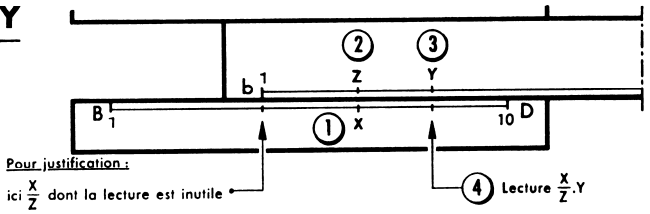
$$G = \frac{337 \times 10^{-3}}{0{,}902 \times 85{,}4 \times 10^{-2}}$$

CHAPITRE 5

COMBINAISON DE LA MULTIPLICATION ET DE LA DIVISION

avec les échelles des nombres

25 — Calcul de $\frac{X \cdot Y}{Z}$



1° PRINCIPE

En alignant X de l'échelle B(D) et Z de l'échelle b(C), nous posons la division $\frac{X}{Z}$ dont le résultat se trouve sur B(D) à l'alignement de l'index 1 de b(C).

Mais ainsi, la réglette se trouve en position de multiplication par le facteur (X/Z). Face à Y de b(C), nous avons sur B(D) le produit : $\left(\frac{X}{Z}\right) \cdot Y$, soit $\frac{X \cdot Y}{Z}$.

2° RÈGLE

Pour effectuer $\frac{X \cdot Y}{Z}$:

1° Repérer au curseur (trait médian), la valeur X sur l'échelle B(D).

2° *Le curseur restant immobile,* amener sous son trait médian la valeur Z prise sur l'échelle mobile b(C).

3° *La réglette restant immobile,* repérer au curseur la valeur Y sur l'échelle b(C).

4° Faire la lecture, à l'alignement sur l'échelle B(D).

3° NOMBRES QUELCONQUES

Nous les transformons par déplacement de leur virgule. Les exposants sont notés selon les conventions des n°s 14 et 21.

4° EXEMPLES

$$A = \frac{5\,800^{+3} \times 0{,}625^{-1}}{432^{-2}} = 8{,}39$$

$$B = \frac{\overset{+3}{2\,220} \times \overset{-1}{0{,}199}}{\underset{-1}{46{,}5}} = 0{,}95 \times 10 = 9{,}5$$

● lecture sur le prolongement gauche de l'échelle B(D).

26 — Lecture hors-règle

1er CAS. **La lecture est hors-règle, à droite de l'échelle B(D).** Nous la décalons d'un module vers la gauche, par déplacement de la réglette d'une section 1-10. Elle devient 10 fois plus petite ; pour corriger, nous ajoutons + 1 aux exposants.

2e CAS. **La lecture est hors-règle, à gauche de l'échelle B(D).** Nous opérons une translation d'un module en sens inverse. La lecture devenue 10 fois plus grande est rectifiée par l'exposant — 1.

RÈGLE COMPLÉMENTAIRE

Si, dans l'opération de forme $\frac{X \cdot Y}{Z}$, la lecture tombe hors-règle, on la rend possible en déplaçant la réglette d'un module :

a) *soit vers la gauche*, en amenant l'index 10 de l'échelle b(C) sur l'emplacement de l'index 1 ;

b) *soit vers la droite*, en amenant l'index 1 sur l'emplacement de l'index 10.

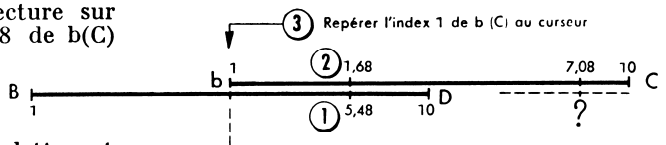
Après translation, la lecture se prend toujours sur l'échelle B(D), face à Y de l'échelle b(C), mais on ajoute aux exposants de 10 :

● (+ 1) dans le cas *a*)
● (— 1) dans le cas *b*).

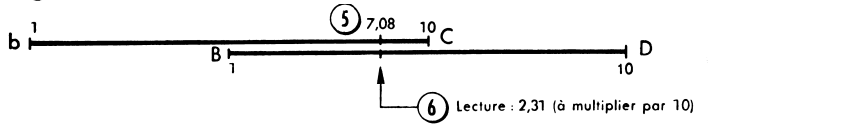
EXEMPLE I

$$C = \frac{\overset{+2}{548} \times \overset{+2}{708}}{\underset{-1}{16{,}8}}\ \overset{+1}{} = 2{,}31 \times 10^4 = 23\,100.$$

1re phase. La lecture sur B(D) face à 7,08 de b(C) est hors-règle.



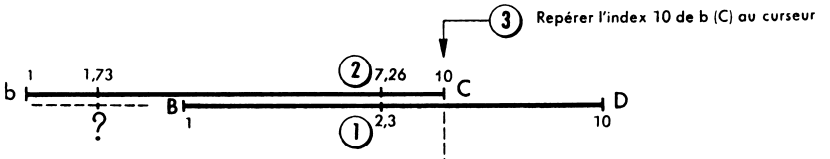
2e phase. La réglette est déplacée d'un module vers la gauche.



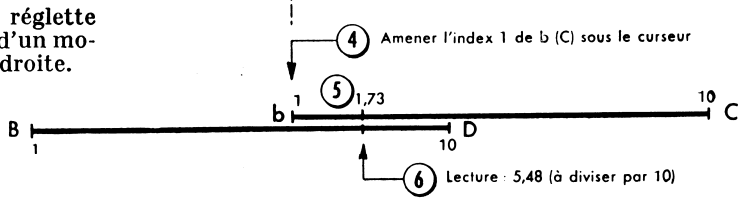
EXEMPLE II

$$D = \frac{\overset{-2}{0{,}023} \times \overset{-1}{0{,}173}}{\underset{-1}{72{,}6}} \overset{-1}{=} 5{,}48 \times 10^{-5} = 0{,}000\,054\,8.$$

1re phase. La lecture sur B(C) face à 1,73 de b(C) est hors-règle.



2e phase. La réglette est déplacée d'un module vers la droite.

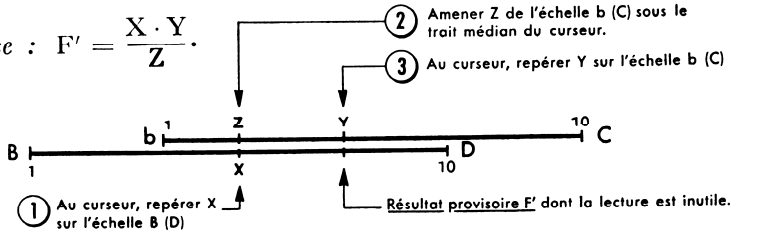


7 — Extension du calcul

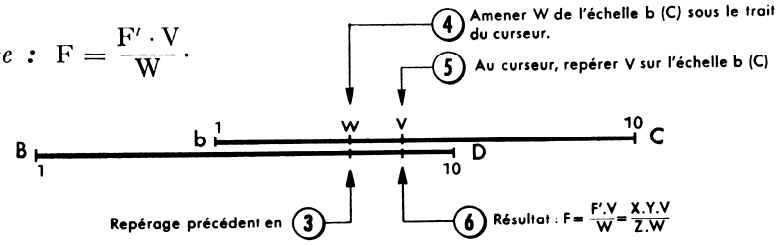
Forme $F = \dfrac{X \cdot Y \cdot V}{Z \cdot W}$

Sur le schéma qui suit, les opérations effectives sont repérées ① ② ③ ④ ⑤ ⑥. Les autres renseignements ne servent qu'à la compréhension :

1re phase : $F' = \dfrac{X \cdot Y}{Z}$.



2e phase : $F = \dfrac{F' \cdot V}{W}$.



EXEMPLE

$$E = \frac{\overset{+2}{342} \times \overset{-2}{0{,}065\,1} \times 2{,}59}{\underset{-1}{45{,}8} \times \underset{-1}{34{,}6}} = 3{,}638 \times 10^{-2} = 0{,}036\,38.$$

28 — Extension généralisée $\boxed{G = \frac{X \cdot Y \cdot V \cdot T \cdots}{Z \cdot W \cdot U \cdots}}$

Nous effectuons $G = \frac{X \cdot Y}{Z} \cdot \frac{V}{W} \cdot \frac{T}{U} \cdots$, c'est-à-dire, et dans l'ordre, la suite : division, multiplication, division, multiplication,...

Translations de la réglette d'un module ou d'une section. — Ces translations s'imposent chaque fois qu'un repérage (ou la lecture finale) est hors-règle. Cependant nous pouvons en éviter :

- en utilisant au maximum les prolongements des échelles ;
- et surtout en modifiant l'ordre des facteurs, tant au numérateur qu'au dénominateur.

Ainsi le groupe opératoire G, effectué dans l'ordre indiqué :

$$G = \left(\frac{\overset{+1}{74{,}82} \times \overset{+2}{781}}{\underset{-3}{1\,430}}\right) \times \left(\frac{\overset{-2}{0{,}018\,7}}{\underset{+2}{0{,}083\,8}}\right) \times \left(\frac{\overset{+1}{97{,}6}}{\underset{-2}{649}}\right)^{\substack{+1\\-1\\+1}} = 1{,}371$$

nécessite 3 translations d'un module (successivement : à gauche pour repérer 7,81, à droite pour 1,87, à gauche pour 9,76).

En modifiant l'ordre des facteurs :

$$G = \left(\frac{\overset{+1}{74{,}82} \times \overset{-2}{0{,}018\,7}}{\underset{-3}{1\,430}}\right) \times \left(\frac{\overset{+2}{781}}{\underset{+2}{0{,}083\,8}}\right) \times \left(\frac{\overset{+2:0{,}976}{97{,}6}}{\underset{-2}{649}}\right) = 1{,}371$$

toutes les translations sont éliminées.

Utilisation des échelles coupées. — Ces échelles évitent souvent les translations d'un module (ou retours de réglette) qui persistent malgré la modification de l'ordre des facteurs (voir chapitre 15).

29 — Groupes non équilibrés

(La suite division, multiplication,... est rompue.)

1° EXCÈS DE FACTEURS AU NUMÉRATEUR

Pour effectuer $J = \frac{X \cdot Y \cdot V}{Z}$, nous calculons d'abord le groupe équilibré $J' = \frac{X \cdot Y}{Z}$ et nous terminons par la multiplication $J = J' \cdot V$.

EXEMPLE

$$L = \frac{\overset{+2}{785} \times \overset{+1}{31{,}8} \times \overset{+1}{14{,}7}}{\underset{-2}{585}} = 6{,}27 \times 10^{2} = 627.$$

● Effectuer $\frac{7,85 \times 3,18}{5,85}$ (application du n° 25) et, à la suite du repérage de 3,18 :

- Amener l'index 1 de b(C) sous le trait du curseur.
- Repérer 1,47 de b(C) sous le curseur.
- Faire la lecture, à l'alignement, sur B(D).

2° EXCÈS DE FACTEURS AU DÉNOMINATEUR

Pour effectuer $K = \frac{X \cdot Y}{Z \cdot W}$, nous calculons d'abord le groupe équilibré $K' = \frac{X \cdot Y}{Z}$, et nous terminons par la division $K = \frac{K'}{W}$.

EXEMPLE

$$K = \frac{\overset{+2}{637} \times \overset{+3}{4\,835}}{\underset{-1}{97} \times \underset{+1}{0,303}} = 1,048 \times 10^6 = 104\,800.$$

● Effectuer le groupe $\frac{6,37 \times 4,835}{9,7}$ et, à la suite du repérage de 4,835 :

- Amener 3,03 de b(C) sous le trait du curseur.
- Faire la lecture sur B(D) en regard de l'index 1 du curseur.

Utilisation de l'inversion. — Nous verrons, au chapitre suivant, que l'inversion allège le calcul des groupes non équilibrés.

30 — Compléments

- Précision — voir n° 104.
- Échelles coupées — chapitre 15.
- Correspondances directes du 1er degré — chapitre 30.
- Généralisation du calcul des opérations combinées — chapitre 1.6

EXERCICES D'APPLICATION

Effectuer les opérations suivantes :

$$A = \frac{45\,800 \times 752}{546} \qquad B = \frac{0,084\,8 \times 0,784}{14,25}$$

$$C = \frac{22,40 \times 0,000\,185}{0,864} \qquad D = \frac{668 \times 735 \times 0,088\,4}{844 \times 1,65}$$

$$E = \frac{6\,816 \times 354 \times \pi \times 0,837}{72,8 \times 5 \times 0,002\,06} \qquad F = \frac{3\,200\,000 \times 585}{33,3 \times 28,6 \times 681}$$

$$G = \frac{8\,530 \times 0,725 \times 25\,600 \times 0,031\,3}{0,604 \times 13,2}$$

CHAPITRE 6

L'ÉCHELLE DES INVERSES (1)

Échelle a(CI)

31 — L'échelle a(CI)

Cette échelle est telle qu'à tout nombre X, pris sur l'échelle b(C), correspond son inverse 1/X sur l'échelle a(CI).

Elle doit être chiffrée de 0,1 à 1 (section normale lue de *droite à gauche*) *et non de 1 à 10*, l'inverse de 2, par exemple, étant 0,5 et non 5. Sur le prolongement gauche, nous devons lire 1,1, ..., sur le prolongement droit 0,09, ...

Le manipulateur devra rectifier les lectures s'il en est autrement (*indispensable* pour la détermination *mathématique* de l'emplacement de la virgule).

32 — Recherche de l'inverse de X

RÈGLE

Repérer X sur l'échelle b(C) ; lire 1/X à l'alignement sur l'échelle a(CI).

X étant diviseur, son exposant de transformation change de signe.

EXEMPLES

$$A = \frac{1}{4{,}63} = 0{,}216 \qquad B = \frac{1}{0{,}91} = 1{,}099 \text{ (utilisation des prolongements)}$$

$$C = \frac{1}{\underset{-4}{22\,600}} = 0{,}442\,5 \times 10^{-4} = 0{,}000\,044\,25$$

$$D = \frac{1}{\underset{+3}{0{,}007\,21}} = 0{,}138\,7 \times 10^{3} = 138{,}7.$$

(1) On emploie aussi la désignation « échelle des réciproques ». Nous préférons le terme « inverse ».

REMARQUE

On peut aussi repérer X sur l'échelle a(CI) et lire 1/X à l'alignement sur l'échelle b(C). Ainsi, les exemples A et B deviennent :

$$A = \frac{1}{4{,}63} = 2{,}16 \times 10^{-1} = 0{,}216 \qquad B = \frac{1}{0{,}91} = 1{,}099 \text{ (direct)}$$

$^{-1}$ (valeur repérée : 0,463)

Rappel : $\frac{1}{X}$ s'obtient aussi en posant la division de 1 par X.

33 — Théorie de l'inversion

1° PRINCIPE

L'inversion a été annoncée aux nos 17, 23 et 29.

En voici le principe :

— *A la multiplication par le nombre X, nous pouvons substituer la division par son inverse 1/X :*

$$Q \cdot X = Q : \left(\frac{1}{X}\right).$$

— *A la division par le nombre Y, nous pouvons substituer la multiplication par son inverse 1/Y :*

$$\frac{Q}{Y} = Q. \left(\frac{1}{Y}\right).$$

2° REPÉRAGE DES FACTEURS INVERSÉS

Nous ne changeons rien aux règles déjà établies. Mais pour prendre 1/X, 1/Y,... sur b(C), nous devons repérer X, Y,... sur l'échelle a(CI).

Autrement dit : *les facteurs inversés sont repérés sur l'échelle des inverses* a(CI).

Remarque. — *Dans toutes les opérations, seul le premier facteur est pris sur l'échelle fixe; tous les autres sont pris sur la partie mobile* (interversion exceptée).

3° EXPOSANT DE TRANSFORMATION D'UN FACTEUR INVERSÉ

En inversant l'opération d'une part et en prenant l'inverse du facteur d'autre part, nous procédons à un nombre pair de mutations ; par suite, l'exposant de transformation est conservé.

Règle. — *Le signe de l'exposant de transformation d'un facteur inversé est celui que dicte l'opération d'origine. Pour sa valeur absolue, il convient de rappeler que le repérage est effectué sur* a(CI) *entre* 1 *et* 0,1.

EXEMPLE

$8{,}54 \times 15\,800$, effectué en $8{,}54 : \left(\frac{1}{15\,800}\right)$. L'exposant affectant 15 800 est | 5 (opération d'origine : multiplication ; repérage sur a(CI) : 0,158).

4° DISPOSITION PRATIQUE

Nous conservons les conventions déjà utilisées. En outre, nous convenons d'indiquer l'inversion par une flèche qui symbolise le passage du numérateur au dénominateur, ou réciproquement. Ainsi :

$$E = X \cdot \underset{\downarrow}{Y} \cdot V \qquad\qquad F = \frac{X\uparrow}{Z \cdot W}$$

signifient que :

- dans le calcul de E, le multiplicateur Y est inversé en diviseur;
- dans le calcul de F, le diviseur W est inversé en multiplicateur.

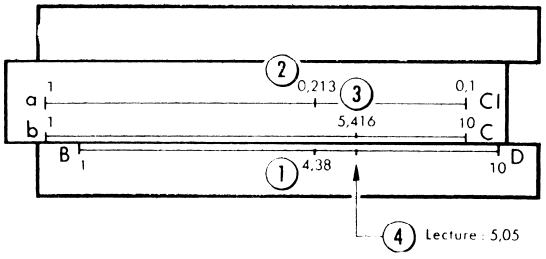
34 — Exemples

1° SUITE DE MULTIPLICATIONS

Nous reprenons intentionnellement l'exemple B du n° 16. Avec l'inversion, il s'effectue :

$$B = \overset{-3}{0{,}004\,38} \times \underset{\downarrow}{0{,}213} \times \overset{+1}{54{,}16} = 5{,}05 \times 10^{-2} = 0{,}050\,5.$$

● Le facteur 0,213 est repéré sans transformation sur l'échelle a(CI).



$$C = \frac{\overset{+3}{4\,325}}{\underset{-3}{6\,816}} \times \frac{\uparrow}{\underset{+2}{0{,}003\,975}} = 1{,}597 \times 10^{2} = 159{,}7.$$

- Repérer au curseur 4,325 sur B(C).
- Amener 6,816 de b(C) sous le curseur.
- Repérer au curseur 0,3975 sur a(CI).
- Faire la lecture à l'alignement sur B(C).

35 — Critique de l'inversion

En équilibrant la répartition des divisions et multiplications, l'inversion réduit le nombre des manipulations et, à travers ce premier avantage, améliore la précision (voir n° 104).

Pour tirer le maximum de profit de l'inversion, nous éviterons, autant que possible, les retours de réglette en modifiant l'ordre des facteurs (n° 28).

Le choix des facteurs inversés est sans influence sur la nécessité de ces retours.

EXEMPLE

L'opération : $A = \overset{+2}{425} \times \underset{\downarrow}{\overset{+2}{57{,}5}} \times \overset{-2}{0{,}082\,7} = \overset{+1}{2{,}02} \times 10^{3} = 2\,020$

demande, malgré l'inversion, une translation d'un module vers la gauche (d'où l'exposant + 1). Changeons de facteur inversé :

$$A = \overset{+2}{425} \times \underset{\downarrow}{\overset{-1}{0{,}082\,7}} \times \overset{+1}{57{,}5} = \overset{+1}{2{,}02} \times 10^{3} = 2\,020.$$

La translation reste nécessaire. Elle le reste encore si nous inversons 425.

En effet, le produit $4{,}25 \times 0{,}575 \times 8{,}27$ ou $4{,}25 \times 0{,}827 \times 5{,}75$ ou $8{,}27 \times 0{,}425 \times 5{,}75$ vaut 20,2, valeur hors échelle B(D). Quel que soit le facteur inversé, la translation est inévitable.

36 — Compléments

- Précision — voir n° 104.
- Échelles coupées — chapitre 15.

EXERCICES D'APPLICATION

I. — Calculer :

$$A = \frac{1}{2{,}81} \qquad B = \frac{1}{10{,}85} \qquad C = \frac{1}{485} \qquad D = \frac{1}{0{,}084\,4}$$

$$E = \frac{1}{6\,820} \qquad F = \frac{10^{-2}}{0{,}007} \qquad G = \frac{10^{-4}}{0{,}028 \times 10^{-1}}$$

II. — Effectuer, en pratiquant l'inversion :

$$A = 648 \times 531 \qquad B = 414 \times 211 \times 1\,831$$

$$C = 929 \times 0{,}007\,15 \times 582 \qquad D = 0{,}064\,8 \times 12{,}25 \times 748 \times 19{,}7 \times 0{,}924$$

$$E = \frac{485}{219 \times 45{,}5} \qquad F = \frac{0{,}050\,5 \times 67{,}7}{0{.}873 \times 0{,}513 \times 29{,}6}$$

◇

CHAPITRE 7

CARRÉ ET CUBE D'UN NOMBRE

37 — Carré et cube d'un nombre repérable sur une échelle des nombres

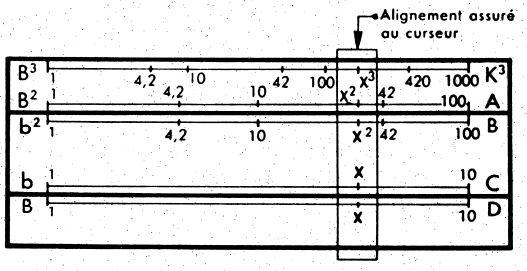
Les échelles des carrés [$B^2(A)$ et $b^2(B)$] et l'échelle des cubes [$B^3(K)$] sont telles que :

> *A l'alignement de tout nombre X pris sur B(D) ou b(C), se trouve :*
> - *son carré X^2 sur $B^2(A)$ ou $b^2(B)$*
> - *son cube X^3 sur $B^3(K)$.*

REMARQUES

- La correspondance entre une échelle fixe et une échelle mobile n'existe que si la réglette et la règle sont préalablement ajustées.
- *La section normale des échelles des carrés se lit de 1 à 100 ;* on ne doit pas y confondre 4,2 et 42. *La section normale de l'échelle des cubes se lit de 1 à 1 000 ;* on ne doit pas y confondre 4,2, 42, 420.

Schéma. — Sur certaines règles « double-face », ces diverses échelles ne se trouvent pas sur la même face. La correspondance est assurée par le curseur à deux faces.



EXEMPLES

$(1{,}64)^2 = 2{,}69$ $\quad (4{,}21)^2 = 17{,}7$ $\quad (0{,}92)^2 = 0{,}846$

$(1{,}64)^3 = 4{,}41$ $\quad (4{,}21)^3 = 74{,}6$ $\quad (8{,}82)^3 = 685.$

38 — Carré ou cube d'un nombre quelconque

La question a été traitée au n° 8-4° : le nombre est rendu repérable sur B(D) ou b(C) par déplacement de la virgule ; l'exposant de transformation est multiplié par l'exposant de puissance.

Disposition pratique. — *Nous écrivons directement l'exposant définitif,* c'est-à-dire multiplié par l'exposant de puissance, *au-dessus du nombre.*

EXEMPLES

$(\overset{+4}{128})^2 = 1{,}64 \times 10^4 = 16\,400$ $\qquad (+2) \times 2 = +4$

$(0{,}\overset{-6}{014}\,4)^3 = 2{,}98 \times 10^{-6} = 0{,}000\,002\,98$ $\qquad (-2) \times 3 = -6$

$(0{,}\overset{-4}{051}\,2)^2 = 26{,}2 \times 10^{-4} = 0{,}002\,62$ $\qquad (-2) \times 2 = -4.$

39 — Procédé par tranches

A chaque chiffre du nombre correspond :

- une tranche de 2 chiffres dans le carré ;
- une tranche de 3 chiffres dans le cube.

La première tranche fait exception. C'est la valeur que nous lisons, soit sur l'échelle des carrés, soit sur l'échelle des cubes. Si cette première tranche est située après la virgule, elle doit être complétée par des zéros, placés avant les chiffres significatifs.

EXEMPLES, dont trois du n° 38 :

Nombres	1	2	8	0,	0	5	1	2	0,	0	0	2	5	2
	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓
Carrés	1	64	00	0,	00	26	20	00	0,	00	00	06	35	00

Nombres	2	4,	8	0,	0	1	4	4	0,	4	4	2
	↓	↓		↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓
Cubes	15	250		0,	000	002	980	...	0,	086	5..	...

Critique. — Cette méthode n'est à retenir que pour la recherche isolée du carré ou du cube ; la méthode des exposants, plus générale, est seule utilisable dans les calculs combinés.

40 — Compléments

- Précision — voir n° 106.
- Puissances des nombres voisins de 1 — voir n° 148-3°.

EXERCICES D'APPLICATION

Calculer d'abord le carré, puis le cube des nombres suivants :

$A = 57{,}4$	$B = 123{,}6$	$C = 8\,541$
$D = 0{,}010\,6$	$E = 5{,}41 \times 10^{+3}$	$F = 2{,}41 \times 10^{-2}$
$G = 0{,}020\,3 \times 10^{+5}$	$H = 248\,000 \times 10^{-7}$	$J = 0{,}005\,82 \times 10^{-3}$

CHAPITRE 8

RACINES CARRÉE ET CUBIQUE

41 — Racine d'un nombre repérable sur une échelle des carrés ou sur l'échelle des cubes

Il suffit de renverser la manipulation qui donne le carré ou le cube :

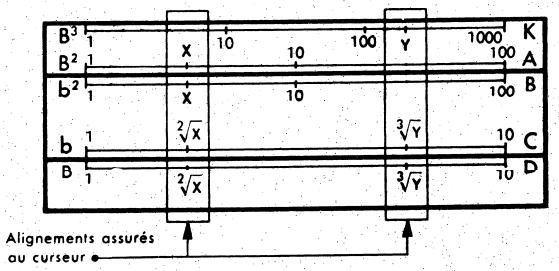
> *A l'alignement de tout nombre X, pris sur $B^2(A)$ ou $b^2(B)$, se trouve :*
>
> ● *sa racine carrée $\sqrt[2]{X}$, sur $B(D)$ ou $b(C)$.*
>
> *A l'alignement de tout nombre Y, pris sur $B^3(K)$, se trouve :*
>
> ● *sa racine cubique $\sqrt[3]{Y}$, sur $B(D)$ ou $b(C)$.*

REMARQUES

● La correspondance entre une échelle fixe et une échelle mobile n'existe que si la réglette et la règle sont préalablement ajustées.

● *Chacun des nombres X ou Y doit être pris sur la section qui le concerne : 1-10 ou 10-100 ou 100-1 000* ; les prolongements peuvent être utilisés.

Schéma. — L'observation du n° 37, concernant la règle « double-face », reste valable.



EXEMPLES

$\sqrt[2]{0{,}89} = 0{,}943$ $\quad \sqrt[2]{4{,}85} = 2{,}203$ $\quad \sqrt[2]{48{,}5} = 6{,}965$ $\quad \sqrt[2]{116} = 10{,}78$

$\sqrt[3]{4{,}85} = 1{,}693$ $\quad \sqrt[3]{48{,}5} = 3{,}647$ $\quad \sqrt[3]{584} = 8{,}36$

42 — Racine d'un nombre quelconque

La question a été traitée au n° 8-5°. Le nombre est rendu repérable sur la règle, en déplaçant sa virgule *par tranches* :

● de 2 chiffres, pour la racine carrée ;

● de 3 chiffres, pour la racine cubique.

L'exposant *définitif* est égal au nombre *algébrique* de tranches.

Disposition pratique. — *Nous écrivons directement l'exposant définitif au-dessus du nombre.*

EXEMPLES

$\sqrt[2]{\overset{+1}{5\,276}} = 7{,}26 \times 10 = 72{,}6$ $\quad (\sqrt[2]{52{,}76} \times 10^{+1})$

$\sqrt[3]{\overset{+1}{5\,276}} = 1{,}742 \times 10 = 17{,}42$ $\quad (\sqrt[3]{5{,}276} \times 10^{+1})$

$\sqrt[2]{\overset{-3}{0{,}000\,006\,81}} = 2{,}61 \times 10^{-3} = 0{,}002\,61$ $\quad (\sqrt[2]{6{,}81} \times 10^{-3})$

$\sqrt[3]{\overset{-2}{0{,}000\,681}} = 8{,}8 \times 10^{-2} = 0{,}088$ $\quad (\sqrt[3]{681} \times 10^{-2})$

43 — Procédé par tranches

Par réciprocité du n° 39, à chaque tranche du nombre correspond un chiffre à la racine.

EXEMPLES

Nombres	$\widehat{52}\,\widehat{76}\,\widehat{00}$	$\widehat{0,00}\,\widehat{0}\,\widehat{25}\,\widehat{8}$	←
Racines carrées	7 2 6	0, 0 1 6	séparation du nombre en tranches, à partir de la virgule réelle ou fictive
Nombres	$\widehat{527}\,\widehat{600}$	$\widehat{25}\,\widehat{800}$	←
Racines cubiques	8 0, 8	2 9, 55	

44 — Compléments

- Précision — voir n° 106.
- Racines des nombres voisins de 1 — voir n° 148-1°.
- Racine carrée des nombres approchant 1 par valeurs inférieures — voir n° 125.

EXERCICES D'APPLICATION

Calculer d'abord la racine carrée, puis la racine cubique des nombres suivants :

A = 5,33	B = 32,7	C = 45 700
D = 0,065	E = 0,008 56	F = 8 945 000
H = 0,000 054 6	J = $2{,}59 \times 10^{+5}$	K = $0{,}000\,574 \times 10^{+2}$.

CHAPITRE 9

AIRE ET DIAMÈTRE DU CERCLE

45 — Principe du calcul de l'aire

L'aire (1) du cercle est donnée par la formule : $S = \frac{\pi \cdot D^2}{4} = 0{,}785\ D^2$.

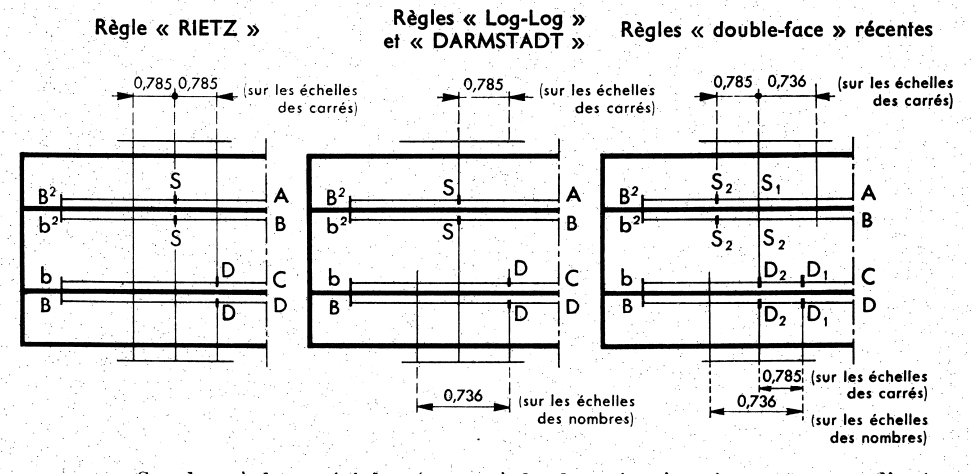
Il suffit de multiplier le carré du diamètre par la valeur *constante* 0,785.

UTILISATION DU CURSEUR

Les curseurs portent plusieurs traits qui facilitent certains calculs fréquents. Les écartements les plus courants correspondent :

- à l'intervalle 0,785-1 de l'échelle des carrés. D'après ce qui précède, il sert à calculer l'aire du cercle.
- à l'intervalle 0,736-1 soit de l'échelle des nombres, soit de l'échelle des carrés. Il sert à transformer les puissances : 1 cheval-vapeur (ch) = 0,736 kilowatt (kW).

Dans les schémas qui suivent, nous éliminons les curseurs à 1 ou 2 traits des règles archaïques (Mannheim, par exemple) :



Sur les règles spéciales (*ex.* : règle des géomètres), on trouve d'autres intervalles correspondant à des calculs particuliers. Dans sa notice, le constructeur donne leur valeur.

(1) L'aire d'une surface est la mesure de son étendue.

RÈGLE

Pour calculer l'aire S d'un cercle de diamètre D :

1° Repérer, *sous le trait droit* (d'un intervalle 0,785-1), la valeur D prise sur l'échelle B(D) ou b(C).

2° Lire S sur l'échelle B^2(A) ou b^2(B), *sous le trait gauche* (du même intervalle).

46 — Position de la virgule

En résumé, la recherche de l'aire du cercle revient, au décalage près, ***à faire le carré du diamètre.*** Conséquence : l'exposant de transformation est doublé comme dans la recherche du carré.

EXEMPLES

$S_{\text{Ø}:234}^{+4} = 4{,}3 \times 10^4 = 43\,000$

$S_{\text{Ø}:104}^{+4} = 0{,}85 \times 10^4 = 8\,500$

$S_{\text{Ø}:0{,}845}^{-2} = 56{,}1 \times 10^{-2} = 0{,}561$

$S_{\text{Ø}:0{,}0143}^{-4} = 1{,}605 \times 10^{-4} = 0{,}000\,160\,5.$

● $S_{\text{Ø}:234}$ signifie : aire du cercle de diamètre 234.

● Lecture 0,85 en avant du 1 de B^2(A). (1)

47 — Recherche du diamètre

Par réciprocité, le calcul du diamètre du cercle revient à chercher la racine carrée de son aire en décalant la lecture vers la droite.

RÈGLE

Pour calculer le diamètre D d'un cercle d'aire S :

1° Repérer, *sous le trait gauche* (d'un intervalle 0,785-1), la valeur S prise sur l'échelle B^2(A) ou b^2(B).

2° Lire le diamètre sur l'échelle B(D) ou b(C), *sous le trait droit* (du même intervalle).

● **Si l'aire est quelconque, sa virgule est déplacée par tranches** de 2 chiffres comme dans la racine carrée. L'exposant relatif à D est égal au nombre *algébrique* de tranches.

(1) Pour le calcul de $S_{\text{Ø}:104}$, si l'échelle B^2(A) n'est pas prolongée à gauche, amener l'index 100 de l'échelle b^2(B) face à l'index 1 de l'échelle B^2A. Ainsi l'échelle mobile des carrés sert de prolongement.

EXEMPLES

$\varnothing_{S\,:\,\overset{+2}{14\,816}} = 1{,}374 \times 10^{2} = 137{,}4$

● $\varnothing_{S\,:\,14\,816}$ **signifie : diamètre du cercle dont l'aire vaut 14 816.**

● **Virgule déplacée de + 2 tranches de 2 chiffres.**

$\varnothing_{S\,:\,\overset{-3}{0{,}000\,432}} = 2{,}345 \times 10^{-2} = 0{,}023\,45$

$\varnothing_{S\,:\,\overset{+1}{9\,700}} = 11{,}11 \times 10 = 111{,}1$

● **Lecture 11,11 sur le prolongement droit de B(D).** (1)

48 — Méthode par tranches

Le procédé n° 39 est applicable à la recherche de l'aire, le procédé n° 43 à la recherche du diamètre.

Diamètres	2	3	4	0,	0	8	4	5	1	0	4	
Aires	4	30	00	0,	00	56	1·	··	0	85	00	soit 8 500
Aires	14 816			0,000 432					9 700			
Diamètres	1	3	7, 4	0,	0	2	3	4 5	11	1,	1	soit 111,1

49 — Complément

● Précision — voir n° 106.

EXERCICES D'APPLICATION

I. — Calculer l'aire des cercles dont le diamètre vaut :

$D_1 = 3{,}27$ $D_2 = 1{,}02$ $D_3 = 10{,}8$

$D_4 = 172$ $D_5 = 15\,800$ $D_6 = 0{,}006\,13$

II. — Calculer les diamètres des cercles qui ont pour aire :

$S_1 = 4{,}47$ $S_2 = 629$ $S_3 = 25\,610$

$S_4 = 48{,}3$ $S_5 = 0{,}851$ $S_6 = 0{,}007\,04$

◇

(1) Pour le calcul de $\varnothing_{S\,:\,9\,700}$, si l'échelle $B^2(A)$ n'est pas prolongée à droite, amener l'index 1 de $b^2(B)$ face à l'index 100 de $B^2(A)$. L'échelle mobile des carrés sert ainsi de prolongement.

CHAPITRE 10

ÉCHELLES TRIGONOMÉTRIQUES :
Recherche des lignes

50 — Introduction à l'étude des échelles trigonométriques

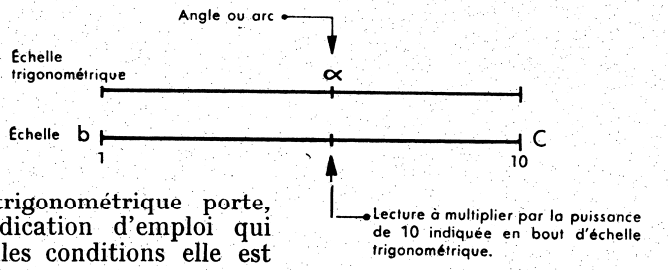
Ces échelles sont utilisées avec hésitation, leur emploi demandant une petite étude et une parfaite connaissance des relations trigonométriques. Aussi, en premier lieu, nous conseillons au lecteur de se reporter à un cours de trigonométrie.

51 — Système des 5 échelles trigonométriques

A dire vrai, l'utilisation des échelles trigonométriques sur les règles classiques demande beaucoup d'attention, même de la part des manipulateurs avertis.

C'est pourquoi, sur des modèles récents (1), apparaît *le système des 5 échelles trigonométriques permettant de déterminer toutes les lignes* (2) *de la même manière* (voir planche hors-texte). (3)

Les 5 échelles sont portées sur la réglette. Les arcs sont chiffrés *en noir*, leurs compléments *en rouge*.



Chaque échelle trigonométrique porte, en bout, une indication d'emploi qui précise dans quelles conditions elle est liée à l'échelle b(C).

---

(1) Certaines règles « double-face ».

(2) Sauf les arcs voisins de 0° et 90° (voir chapitre 12).

(3) Malgré une évolution certaine, les règles à 5 échelles trigonométriques sont encore très rares. Limitées pendant très longtemps à 2 de ces échelles (S et T_1), les règles portent presque toutes maintenant l'échelle S & T. L'échelle T_2 l'accompagne de plus en plus fréquemment ; seule l'échelle T_3 se fait difficilement admettre. Il faut reconnaître qu'il se pose, pour les constructeurs, un problème d'emplacement.

Ainsi, en bout d'échelle T_1, l'indication :

tg (*en noir*)-ctg (*en rouge*) $\rightarrow b.10^{-1}$

signifie que :

- la *tangente* des arcs marqués *en noir* sur T_1 est égale à la lecture faite *à l'alignement*, sur b(C), *multipliée* par 10^{-1} ;
- la *cotangente* des arcs marqués *en rouge* est déterminée dans les mêmes conditions.

A gauche des échelles, les indications (0,01.X), (0,1.X), (X), (10.X) donnent différemment l'emplacement de la virgule. C'est le procédé retenu par les constructeurs, mais porté à droite, en lieu et place de nos indications d'emploi. Cependant, dans les calculs combinés, le manipulateur devra revenir à nos puissances, respectivement : 10^{-2}, 10^{-1}, 10^{0} (ou 1), 10^{+1} (ou 10).

EXEMPLES

1° $\sin 1°12' = 2{,}095 \times 10^{-2} = 0{,}020\,95$
(éch. S & T (*noir*) ; éch. b)

2° $\sin 31° = 5{,}15 \times 10^{-1} = 0{,}515$
(éch. S (*noir*) ; éch. b)

3° $\text{tg}\ 23°15' = 4{,}295 \times 10^{-1} = 0{,}429\,5$
(éch. T_1 (*noir*) ; éch. b)

4° $\text{ctg}\ 32°20' = 1{,}58$
(éch. T_2 (*rouge*) ; éch. b)

5° $\text{tg}\ 86°22' = 1{,}575 \times 10^{+1} = 15{,}75.$
(éch. T_3 (*noir*) ; éch. b)

52 — Echelle cos, ou P, ou $\sqrt{1 - (0{,}1 \cdot X)^2}$

Les divisions de l'échelle S à l'approche de 90° sont trop serrées. Nous déterminons avec difficulté :

$\sin 78° = 9{,}78 \times 10^{-1} = 0{,}978$ (éch. S (*noir*) ; éch. b)

$\cos 7° = 9{,}92 \times 10^{-1} = 0{,}992.$ (éch. S (*rouge*) ; éch. b)

L'échelle cos a pour but de remédier à ce défaut. En appliquant la 2me ligne de l'indication d'emploi portée en bout d'échelle S (*voir planche hors-texte*), nous obtenons :

$\sin 78° - 0{,}978\,15$ (éch. S (*rouge*) ; éch. cos)

$\cos 7° - 0{,}992\,54.$ (éch. S (*noir*) ; éch. cos)

Nous recommandons de lire :

- *de 5° à 45° :* ● le sinus sur l'échelle b(C)) l'arc est repéré *en noir*
  ● le cosinus sur l'échelle cos) sur l'échelle S
- *de 45° à 85° :* ● le sinus sur l'échelle cos) l'arc est repéré *en rouge*
  ● le cosinus sur l'échelle b(C)) sur l'échelle S

Généralement, l'échelle cos se trouve sur la partie mobile. Si elle est portée sur la partie fixe, il faut ajuster les index des deux parties avant de procéder à la lecture par alignement.

53 — Règles ne portant pas les 5 échelles trigonométriques. Règles « RIETZ » et « Log-Log »

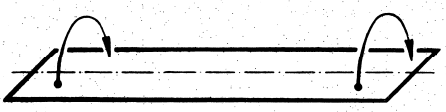
Sur ces règles, les échelles trigonométriques sont moins nombreuses et disposées différemment. Elles sont représentées sur la *planche hors-texte* avec des indications d'emploi, applications des relations trigonométriques entre les lignes d'un même arc ou d'arcs complémentaires. Ces indications sont ainsi plus chargées, mais elles permettent le calcul — plus ou moins aisé — de toutes les lignes (1). Leur utilisation appelle les commentaires suivants :

1° *En fait, les indications d'emploi n'existent pas sur les règles classiques.* L'élève doit en prendre note.

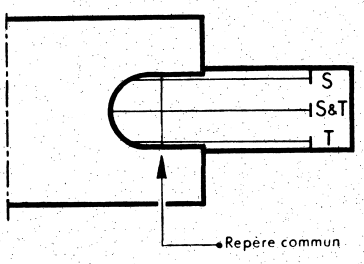
2° *Le chiffrage* en rouge *peut être absent.* Nous rappelons que les arcs chiffrés *en rouge* sont les compléments des arcs chiffrés *en noir.*

3° *Les échelles trigonométriques se trouvent au verso de la réglette.*

Pour les lire, nous retournons *la règle toute entière* autour de son grand axe. La manipulation se décompose en deux temps.



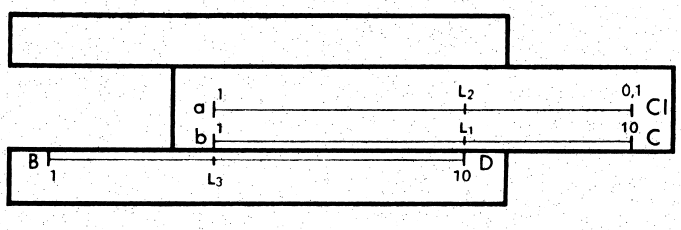
1er temps. — Dans tous les cas, *après retournement de l'ensemble,* la réglette est tirée de manière à amener, sous le repère situé à droite, l'arc pris sur l'échelle et dans la couleur données par l'indication d'emploi.



2e temps. — Retourner l'ensemble côté recto et, si l'échelle de lecture donnée par l'indication d'emploi est :

- b(C), la lecture est L_1.
- a(CI), la lecture est L_2.
- B(D), la lecture est L_3.

(1) *En cas d'absence de l'échelle* T_3 *sur une « double-face »,* utiliser l'échelle S & T en appliquant l'indication d'emploi portée en bout droit de cette échelle sur la règle Rietz de la planche hors-texte. *En outre, si l'échelle* T_2 *est fixe,* établir la correspondance entre cette échelle et l'échelle fixe B(D).



Ces lectures sont à multiplier par la puissance de 10 donnée toujours par l'indication d'emploi.

Les lectures L_2 et L_3 conduisent au même résultat.

variante . — Sur le type « Log-Log », le verso de la réglette porte une échelle des nombres b(C). La lecture L_1 peut être faite sur cette échelle, par simple correspondance, sans opérer le retournement du 2e temps.

4° Sur la plupart des règles « Log-Log », l'échelle S & T n'existe pas. Pour le calcul des lignes correspondantes, voir chapitre 12, en particulier nos 65 et 66.

5° Entre les lectures L_2 sur a(CI) et L_3 sur B(D), la lecture L_3 est préférable. Elle évite un repérage au curseur.

EXEMPLES

● *Sur toutes les règles (échelles* S *et* T_1*), nous calculons :*

$\sin 28°20' = 4{,}745 \times 10^{-1} = 0{,}4745$

verso — éch. S (*noir*) — éch. b (lecture L_1) — **recto**

$\cos 58°40' = 5{,}20 \times 10^{-1} = 0{,}520$

verso — éch. S (*rouge*) ou 31°20′ (*noir*) — éch. b (lecture L_1) — **recto**

$\operatorname{ctg} 72°45' = 3{,}105 \times 10^{-1} = 0{,}3105$

verso — éch. T (*rouge*) ou 17°15′ (*noir*) — éch. b (lecture L_1) — **recto**

$\operatorname{ctg} 32°20' = 1{,}58$

verso — éch. T (*noir*) — éch. B (lecture L_3) — **recto**

$\operatorname{tg} 68°10' = 2{,}495$

verso — éch. T (*rouge*) ou 22°50′ (*noir*) — éch. B (lecture L_3) — **recto**

Avec la règle « Log-Log », toutes les lectures *sur b* peuvent être prises, *au verso*, sur l'échelle des nombres.

● *Sur toutes les règles portant l'échelle* S & T, *nous calculons :*

$\operatorname{tg} 2°37' = 4{,}565 \times 10^{-2} = 0{,}04565$

verso — éch. S & T (*noir*) — éch. b (lecture L_1) — **recto**

$\cos 87°18' = 4{,}71 \times 10^{-2} = 0{,}0471$

verso — éch. S & T (*rouge*) ou 2°42′ (*noir*) — éch. b (lecture L_1) — **recto**

$$\underline{\text{tg } 88°22' = 3{,}505 \times 10^{+1} = 35{,}05.}$$

verso — éch. S & T (*rouge*) ou 1°38' (*noir*) — éch. B (lecture L_a) — **recto**

Pour la détermination de ces lignes avec la règle « Log-Log », sans échelle S & T, se reporter au n° 65.

54 — Règle « DARMSTADT »

Elle porte sur la partie fixe :

- l'échelle cos (ou P), au bas du recto
- l'échelle S, désignée $\underline{/sin}$ sur le champ inférieur des anciens modèles,
- l'échelle T, désignée $\underline{/tg}$ au bas du recto sur les nouveaux modèles.

Les lignes sont lues par *simple correspondance*,

- soit sur l'échelle B(D)
- soit sur l'échelle a(CI) (pour cette dernière échelle, *après ajustement des index*).

L'échelle S & T n'existe pas — voir n° 65.

Pour les indications d'emploi, se reporter à la planche hors-texte.

55 — Compléments

- Précision — voir n° 107.
- Division en degrés décimaux, en grades ou en radians — voir chapitre 21, n° 111,

EXERCICES D'APPLICATION

I. — Pour toutes règles, calculer :

sin 42°30'	sin 14°22'	cos 83°27'	tg 8°22'
tg 25°10'	ctg 76°18'	ctg 16°40'	tg 82°21'

II. — Pour toutes règles, sauf règles « Log-Log » et « DARMSTADT », calculer :

sin 1°18'	tg 47'1/2	cos 87°26'
cos 89°19'	ctg 89°23'1/2	ctg 54'

III. — Pour toutes règles, sauf règle « RIETZ », calculer :

- d'abord avec l'échelle S et l'échelle b(C),
- puis avec l'échelle S et l'échelle cos,

les lignes qui suivent, et comparer les résultats :

sin 12°33'	sin 54°18'	sin 83°15'
cos 12°15'	cos 48°37'	cos 77°32'

CHAPITRE 11

ÉCHELLES TRIGONOMÉTRIQUES :
Inversion des lignes

56 — Nature du problème

Il s'agit de déterminer un arc dont on connaît une ligne.

Nous nous limiterons :

- dans les données : à la ligne positive
- dans les solutions : à l'arc le plus simple, situé dans le 1er quadrant.

Les autres arcs pourront en être déduits.

Exemple : on donne arc tg $x = 1{,}732$ (1) ; la solution la plus simple est $x = 60°$; les solutions qui s'en déduisent sont : 240°, 420°, 600°,...

(Se reporter à un ouvrage de trigonométrie.)

57 — Inversion des lignes avec le système des 5 échelles trigonométriques (règles « double-face »)

Le problème traité au chapitre 10 se trouve renversé :

La ligne (plus exactement sa transformation entre 1 et 10, par déplacement de la virgule) est repérée sur l'échelle b(C) ; l'arc est lu, à l'alignement, sur l'échelle trigonométrique et dans la couleur qui le concernent. Il est évident que :

- si la ligne donnée est une tangente ou une cotangente, l'arc se lit sur S & T, T_1, T_2, ou T_3 (*en noir* pour la tangente, *en rouge* pour la cotangente)
- si la ligne donnée est un sinus ou un cosinus, l'arc se lit sur S & T ou S (*en noir* pour le sinus, *en rouge* pour le cosinus).

Les indications (0,01.X), (0,1.X), (X), (10.X) précisent aussi l'échelle de lecture.

(1) La nouvelle écriture normalisée (avec liaison) : arcsin x, arccos x,..., étant encore peu courante, nous avons conservé l'ancienne écriture séparée : arc sin x, arc cos x,...

UTILISATION DU TABLEAU N° 58

Ce qui précède suffit au bon emploi des 5 échelles trigonométriques ; cependant, pour le détail, le lecteur peut se reporter au tableau n° 58, établi pour les règles « Rietz » et « Log-Log », sous les réserves suivantes :

● *Les indications données pour :*

arc sin x *et arc cos* x, *quelle que soit leur valeur*
arc tg x < 1 *et arc ctg* x < 1

sont valables sans la moindre modification. Toutefois, nous rappelons que l'échelle T est désignée T_1 sur la « double-face ».

● *Les indications données pour :*

1 < *arc tg* x < 100 *et* 1 < *arc ctg* x < 100 *sont modifiées.* La ligne est repérée sur l'échelle b(C) et l'arc est lu sur une des échelles T_2 ou T_3 dans les conditions qui suivent :

1 < arc tg x < 10, lecture *en noir* sur T_2
10 < arc tg x < 100, lecture *en noir* sur T_3
1 < arc ctg x < 10, lecture *en rouge* sur T_2
10 < arc ctg x < 100, lecture *en noir* sur T_3.

● *Les indications données pour :*

100 < *arc tg* x *ou arc ctg* x

sont valables sans modification.

ADAPTATION DU COMMENTAIRE DU N° 58

Du fait de la disposition particulière des « double-face », il n'y a jamais lieu de retourner la réglette dans la règle et les lectures se prennent par simple alignement.

Règle « double-face » ne portant pas d'échelle T_3. — Suivre *strictement* les indications données dans le tableau n° 58 à propos de 10 < arc tg x < 100 et 0,01 < arc ctg x < 0,1. Il est évident que la lecture se prend encore par simple alignement entre b(C) et S & T (rouge).

Règle « double-face » dont l'échelle T_2 est fixe. — De préférence, établir la correspondance entre cette échelle et l'échelle fixe B(D). L'ajustement préalable est évité.

58 — Inversion des lignes sur les règles « RIETZ » et « Log-Log »

L'utilisation de ces règles est plus délicate. Dans le *tableau* qui suit, nous résumons les différents cas.

Conditions d'emploi	Exemple	Au recto		Au verso	
		Valeur repérée (ligne transformée)	Échelle de repérage (voir commentaire)	Échelle de lecture	Résultat
arc sin $x < 0,01$	● Voir n° 68				
$0,01 <$ arc sin $x < 0,1$	arc sin $x = 0,0343$	3,43	b(C)	S & T (*noir*) (2)	$x = 1°58'$
$0,1 <$ arc sin $x < 0,7$	arc sin $x = 0,434$	4,34	b(C)	S (*noir*)	$x = 25°43'$
$0,7 <$ arc sin $x < 0,995$	arc sin $x = 0,9666$	0,9666	éch. cos (1)	S (*rouge*)	$x = 75°09'$
$0,995 <$ arc sin x	$84°15' < x < 90°$; pour détermination précise, voir n° 148-4° (partie complémentaire)				
arc cos $x < 0,01$	● Voir n° 68				
$0,01 <$ arc cos $x < 0,1$	arc cos $x = 0,0781$	7,81	b(C)	S & T (*rouge*) (2)	$x = 85°31'1/2$
$0,1 <$ arc cos $x < 0,7$	arc cos $x = 0,635$	6,35	b(C)	S (*rouge*)	$x = 50°35'$
$0,7 <$ arc cos $x < 0,995$	arc cos $x = 0,972$	0,972	éch. cos (1)	S (*noir*)	$x = 13°35'$
$0,995 <$ arc cos x	$0° < x < 5°45'$; pour détermination précise, voir n° 148-4° (partie complémentaire)				
arc tg $x < 0,01$	● Voir n° 68				
$0,01 <$ arc tg $x < 0,1$	arc tg $x = 0,0313$	3,13	b(C)	S & T (*noir*) (2)	$x = 1°47'1/2$
$0,1 <$ arc tg $x < 1$	arc tg $x = 0,833$	8,33	b(C)	T (*noir*)	$x = 39°48'$
$1 <$ arc tg $x < 10$	arc tg $x = 6,55$	6,55	B(D)	T (*rouge*)	$x = 81°19'$
$10 <$ arc tg $x < 100$	arc tg $x = 22,8$	2,28	B(D)	S & T (*rouge*) (2)	$x = 87°29'$
$100 <$ arc tg x	● Voir n° 68				
arc ctg $x < 0,01$	● Voir n° 68				
$0,01 <$ arc ctg $x < 0,1$	arc ctg $x = 0,0728$	7,28	b(C)	S & T (*rouge*) (2)	$x = 85°50'$
$0,1 <$ arc ctg $x < 1$	arc ctg $x = 0,421$	4,21	b(C)	T (*rouge*)	$x = 67°10'$
$1 <$ arc ctg $x < 10$	arc ctg $x = 8,66$	8,66	B(D)	T (*noir*)	$x = 6°35'$
$10 <$ arc ctg $x < 100$	arc ctg $x = 53,24$	5,324	B(D)	S & T (*noir*) (2)	$x = 1°4'1/2$
$100 <$ arc ctg x	● Voir n° 68				

COMMENTAIRE DU TABLEAU

1° Lorsque l'échelle de repérage est b(C) :

● *Au recto* : déplacer la réglette de manière à amener la valeur transformée de la ligne, prise sur b(C), face à l'index 10 de l'échelle B(D).

● *Au verso :* lire sur l'échelle trigonométrique indiquée dans la colonne suivante du tableau, sous le repère à droite.

Sur la règle « Log-Log », on peut opérer, sans retournement, par correspondance entre l'échelle b(C) du verso et l'échelle trigonométrique intéressée.

2° **Lorsque l'échelle de repérage est B(D) :**

● *Au recto :* amener l'index 1 de la réglette face à la valeur transformée de la ligne prise sur B(D).

● *Au verso :* lire sous le repère droit, sur l'échelle trigonométrique indiquée dans la colonne suivante du tableau.

● *Toutes ces opérations* (1° et 2°) *sont celles indiquées au n° 53, avec renversement de l'ordre opératoire.*

3° **Renvois :**

(1) ● Si l'échelle cos se trouve sur le verso de la réglette, opérer par simple correspondance.

● Si l'échelle cos se trouve sur la partie fixe, au recto : retourner la réglette dans la règle ; ajuster les index et opérer par simple correspondance.

● Si l'échelle cos n'existe pas, le procédé indiqué pour :

$$0{,}1 \left\langle \begin{array}{c} \text{arc sin } x \\ \text{ou arc cos } x \end{array} \right\langle 0{,}7,$$

est étendu à l'intervalle 0,1-0,995.

(2) ● Si l'échelle S & T n'existe pas, voir n° 68.

59 — Règle Darmstadt

Tout ce qui précède (n° 58) est modifié comme suit :

1° Dans tous les cas, on opère par simple correspondance, les échelles étant toutes au recto.

2° Il est préférable d'effectuer sur l'échelle B(D) les repérages indiqués sur b(C), dans le tableau n° 58. L'ajustement des index est évité.

3° Les repérages indiqués dans le tableau, sur B(D), sont effectués sur a(CI). L'ajustement des index est indispensable.

4° L'échelle S & T n'existant pas, se reporter au n° 68.

● *D'une manière générale, le mode opératoire indiqué au n° 54 est renversé.*

60 — Compléments

● Précision — voir n° 108.

● Division en degrés décimaux, en grades ou en radians — voir chapitre 21.

EXERCICES D'APPLICATION

I — Pour toutes règles, calculer :

arc sin $x_1 = 0{,}435$	arc sin $x_2 = 0{,}758$	arc sin $x_3 = 0{,}983$
arc cos $x_4 = 0{,}215$	arc cos $x_5 = 0{,}9915$	arc tg $x_6 = 0{,}214$
arc tg $x_7 = 5{,}48$	arc ctg $x_8 = 0{,}356$	arc ctg $x_9 = 7{,}32$.

II — Pour les règles portant une échelle S & T, calculer :

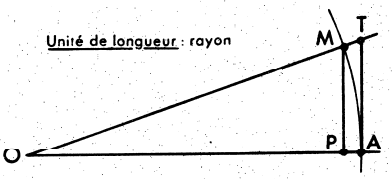
arc sin $y_1 = 0{,}0208$	arc cos $y_2 = 0{,}0602$	arc tg $y_3 = 0{,}0372$
arc tg $y_4 = 37{,}58$	arc ctg $y_5 = 0{,}0514$	arc ctg $y_6 = 45{,}6$.

CHAPITRE 12

INDEX ρ' ET ρ''

Recherche des lignes des arcs voisins de 0° et de 90°

61 — Principe du calcul



Lorsqu'un arc est très petit, les longueurs du sinus ($\overline{MP}$), de l'arc ($\overset{\frown}{AM}$) et de la tangente ($\overline{AT}$), exprimées *en fonction du rayon*, peuvent être confondues. A titre d'exemple, nous donnons les valeurs poussées des lignes de l'arc de 1° :

$$\sin\ 1^\circ = 0{,}017\ 452\ 4$$
$$\text{arc}\ 1^\circ = 0{,}017\ 453\ 3$$
$$\text{tg}\ 1^\circ = 0{,}017\ 455\ 1$$

Rappel : un arc de 1 *radian* (symbole : rd) est un arc dont la longueur est égale au rayon. L'angle au centre correspondant vaut 57°17'44".

62 — Lignes des arcs voisins de 0° (exprimés en minutes sexagésimales)

1° SINUS ET TANGENTE

La circonférence entière vaut 360° ou 2π rd, d'où :

$$\text{arc}\ 1' = \frac{2\pi}{360 \times 60} = \frac{1}{\left(\frac{360 \times 60}{2\pi}\right)} = \frac{1}{3\,437{,}75}\ \text{rd.}$$

La valeur 3 437,75 est repérée sur les échelles B(D) et b(C) par le repère ρ'(1). Plus exactement : $3\,437{,}75 = \rho' . 10^{+3}$. Par suite :

$$\sin x \text{ ou } \text{tg } x = \frac{x}{\rho' \cdot 10^{+3}} \quad \text{ou} \quad \frac{x}{\rho'} \cdot 10^{-3}$$
(x en minutes)

(1) Lire ρ' : *rô prime* ; au n° 63 nous lirons ρ'' : *rô seconde*, qui ne doit pas être confondu avec $\rho_{,,}$: *rô indice seconde* (n° 113).

2° COTANGENTE

La cotangente est l'inverse de la tangente, par suite :

$$\boxed{\begin{array}{l}\operatorname{ctg} x \\ (x \text{ en minutes})\end{array} = \frac{\rho'}{x} \cdot 10^{+3}}.$$

3° COSINUS

Il est voisin de 1 ; on peut cependant l'obtenir avec plus de précision, voir partie complémentaire n° 148-4°.

4° EXEMPLES

$$\sin \text{ ou } \operatorname{tg} 23' = \underset{-1}{\frac{\overset{+1}{23}}{\rho'}} \times 10^{-3} = 6{,}69 \times 10^{-3} = 0{,}006\,69$$

$$\sin \text{ ou } \operatorname{tg} 5' = \frac{5}{\rho'} \times 10^{-3} = 1{,}454 \times 10^{-3} = 0{,}001\,454$$

$$\operatorname{ctg} 22' = \frac{1}{\operatorname{tg} 22'} = \underset{-1}{\frac{\rho'}{22}} \times 10^{+3} = 1{,}563 \times 10^{+2} = 156{,}3.$$

63 — Lignes des arcs voisins de 0° (exprimés en secondes sexagésimales)

1° SINUS ET TANGENTE

$$\text{arc } 1'' = \frac{2\pi}{360 \times 60 \times 60} = \frac{1}{\left(\dfrac{360 \times 60 \times 60}{2\pi}\right)} = \frac{1}{206\,265} \text{ rd.}$$

La valeur 206 265 est repérée sur B(D) et b(C) par l'index ρ''. Plus exactement : $206\,265 = \rho'' \cdot 10^{+5}$, d'où :

$$\boxed{\begin{array}{l}\sin x \text{ ou } \operatorname{tg} x \\ (x \text{ en secondes})\end{array} = \frac{x}{\rho''} \cdot 10^{-5}}.$$

2° COTANGENTE

$$\boxed{\begin{array}{l}\operatorname{ctg} x \\ (x \text{ en secondes})\end{array} = \frac{\rho''}{x} \cdot 10^{+5}}.$$

3° COSINUS

Se reporter au 3° du n° 62.

4° EXEMPLES

$$\sin \text{ ou } \operatorname{tg} 12'' = \frac{\overset{+1}{12}}{\rho''} \times 10^{-5} = 5{,}82 \times \overset{-1}{10^{-5}} = 0{,}000\,058\,2$$

$$\sin \text{ ou } \operatorname{tg} 1'21'' = \frac{\overset{+1}{81}}{\rho''} \times 10^{-5} = 3{,}925 \times 10^{-4} = 0{,}000\,392\,5$$

$$\operatorname{ctg} 18'' - \frac{1}{\operatorname{tg} 18''} = \frac{\rho''}{\underset{-1}{18}} \times 10^{+5} = 1{,}145 \times 10^{+4} = 11\,450.$$

64 — Lignes des arcs voisins de 90° (exprimés dans le système sexagésimal)

Rappelons que, si deux arcs sont complémentaires :

1° le sinus de l'un est égal au cosinus de l'autre et réciproquement ;

2° la tangente de l'un est égale à la cotangente de l'autre et réciproquement.

Par suite :

- les lignes des arcs voisins de 90° se calculent avec les relations des n°s 62 et 63 ;
- le cosinus et la cotangente d'un arc voisin de 90° peuvent être confondus.

EXEMPLES

1° $\left.\begin{matrix}\cos 89°53' = \sin 7' \\ \operatorname{ctg} 89°53' = \operatorname{tg} 7'\end{matrix}\right\} = \frac{7}{\rho'} \times 10^{-3} = 2{,}035 \times 10^{-3} = 0{,}002\,035$

2° $\left.\begin{matrix}\cos 89°59'15'' = \sin 45'' \\ \operatorname{ctg} 89°59'15'' = \operatorname{tg} 45''\end{matrix}\right\} = \frac{\overset{+1}{45}}{\rho''} \times 10^{-5} = 2{,}182 \times 10^{-4} = 0{,}000\,218\,2$

3° $\operatorname{tg} 89°59'2'' - \operatorname{ctg} 58'' - \frac{1}{\operatorname{tg} 58''} = \frac{\rho''}{\underset{-1}{58}} \times 10^{+5} = \overset{-1}{3{,}555} \times 10^{+3} = 3\,555.$

65 — Absence d'échelle S & T (1)

Les sinus et cosinus, qui devraient être obtenus avec cette échelle, sont calculés avec les index ρ' et ρ'' :

EXEMPLES

$$\sin \text{ ou } \operatorname{tg} 2°12' \text{ (soit } 132') = \frac{\overset{+2}{132}}{\rho'} \times 10^{-3} = \overset{-1}{3{,}84} \times 10^{-2} = 0{,}038\,4$$

(1) Généralement sur règles « Log-Log » et « DARMSTADT ».

$$\sin \text{ ou } \operatorname{tg} 5°24' \text{ (soit } 324') = \underset{\rho'}{\overset{+3}{324}} \times 10^{-3} = \overset{-1}{9,43} \times 10^{-3} = 0,094\,3$$

$$\operatorname{ctg} 2°26' = \frac{1}{\operatorname{tg} 2°26' \text{ (soit } 146')} = \underset{-2}{\frac{\rho'}{146}} \times 10^{+3} = 2,353 \times 10 = 23,53$$

$$\operatorname{tg} 87°40' = \operatorname{ctg} 2°20' = \frac{1}{\operatorname{tg} 2°20' \text{ (soit } 140')} = \underset{-2}{\frac{\rho'}{140}} \times 10^{+3} = 2,455 \times 10 = 24,55.$$

66 — Tableau récapitulatif du calcul des lignes des arcs voisins de 0° et de 90° (division sexagésimale)

LIGNES	ARCS x VOISINS DE 0°		ARCS x VOISINS DE 90°	
	x en minutes	x en secondes	$(90° - x)$ en minutes	$(90° - x)$ en secondes
$\sin x$	$\frac{x}{\rho'} \cdot 10^{-3}$	$\frac{x}{\rho''} \cdot 10^{-5}$	Voisin de 1 ; pour plus de précision, voir n° 148-4°.	
$\operatorname{tg} x$			Calculer $\operatorname{ctg}(90° - x)$: $\frac{\rho'}{(90-x)} \cdot 10^{+3}$	$\frac{\rho''}{(90-x)} \cdot 10^{+5}$
$\cos x$	Voisin de 1 ; pour plus de précision, voir n° 148-4°		Calculer $\operatorname{tg}(90° - x)$: $\frac{(90-x)}{\rho'} \cdot 10^{-3}$	$\frac{(90-x)}{\rho''} \cdot 10^{-5}$
$\operatorname{ctg} x$	$\frac{\rho'}{x} \cdot 10^{+3}$	$\frac{\rho''}{x} \cdot 10^{+5}$		

67 — Compléments

- Division en degrés décimaux, en grades ou en radians — voir chapitre 21.
- Précision — voir n° 108.

EXERCICES D'APPLICATION

Calculer les lignes suivantes, sans jamais utiliser l'échelle S & T ou l'échelle T_3 :

sin 1°24′	sin 7′	tg 5″
ctg 30″	ctg 88°25′	tg 89°33′
ctg 37′	ctg 89°58′16″	cos 89°59′10″

CHAPITRE 13

INDEX ρ' ET ρ''

Inversion des lignes des arcs voisins de 0° et de 90°

68 — Le problème de l'inversion des lignes trigonométriques a été exposé au chapitre 11. Il a été traité par les échelles trigonométriques et, de ce fait, limité aux lignes comprises :

- entre 0,01 et 100, si l'échelle S & T existe
- ou entre 0,1 et 10, si cette échelle n'existe pas.

L'inversion des lignes extérieures à ces limites s'opère par renversement de la méthode exposée au chapitre 12.

Nous donnons directement le *tableau* qui suit :

NATURE DES LIGNES	ORDRE DE GRANDEUR	BASE : formule du tableau n° 66	VALEUR DE L'ARC (transformation de la formule du tableau n° 66)
1° *Lignes inférieures à* 0,1 (Entre 0,1 et 0,01, utiliser de préférence l'échelle S & T si elle existe)			
Sinus ou tangente	$0{,}1 > \sin x$ ou $\operatorname{tg} x > 0{,}001$	$\left.\begin{matrix}\sin x \\ \operatorname{tg} x\end{matrix}\right\} = \frac{x}{\rho'} \cdot 10^{-3}$	$x = \left(\begin{matrix}\sin x \\ \text{ou } \operatorname{tg} x\end{matrix}\right) \cdot \rho' \cdot 10^{+3}$ x en minutes
	$0{,}001 > \sin x$ ou $\operatorname{tg} x$	$\left.\begin{matrix}\sin x \\ \operatorname{tg} x\end{matrix}\right\} = \frac{x}{\rho''} \cdot 10^{-5}$	$x = \left(\begin{matrix}\sin x \\ \text{ou } \operatorname{tg} x\end{matrix}\right) \cdot \rho'' \cdot 10^{+5}$ x en secondes
Cosinus ou cotangente	$0{,}1 > \cos x$ ou $\operatorname{ctg} x > 0{,}001$	$\left.\begin{matrix}\cos x \\ \operatorname{ctg} x\end{matrix}\right\} = \frac{(90^\circ - x)}{\rho'} \cdot 10^{-3}$	$(90^\circ - x) = \left(\begin{matrix}\cos x \\ \text{ou } \operatorname{ctg} x\end{matrix}\right) \cdot \rho' \cdot 10^{+3}$ $(90^\circ - x)$ en minutes, d'où x
	$0{,}001 > \cos x$ ou $\operatorname{ctg} x$	$\left.\begin{matrix}\cos x \\ \operatorname{ctg} x\end{matrix}\right\} = \frac{(90^\circ - x)}{\rho''} \cdot 10^{-5}$	$(90^\circ - x) = \left(\begin{matrix}\cos x \\ \text{ou } \operatorname{ctg} x\end{matrix}\right) \cdot \rho'' \cdot 10^{+5}$ $(90^\circ - x)$ en secondes, d'où x
2° *Lignes supérieures à* 10 (Entre 10 et 100, utiliser de préférence l'échelle S & T — ou l'échelle T_3 — si elle existe)			
Tangente	$10 < \operatorname{tg} x < 1000$	$\operatorname{tg} x = \frac{\rho'}{(90^\circ - x)} \cdot 10^{+3}$	$(90^\circ - x) = \frac{\rho'}{\operatorname{tg} x} \cdot 10^{+3}$ $(90^\circ - x)$ en minutes, d'où x
	$1\,000 < \operatorname{tg} x$	$\operatorname{tg} x = \frac{\rho''}{(90^\circ - x)} \cdot 10^{+5}$	$(90^\circ - x) = \frac{\rho''}{\operatorname{tg} x} \cdot 10^{+5}$ $(90^\circ - x)$ en secondes, d'où x

NATURE DES LIGNES	ORDRE DE GRANDEUR	BASE : Formule du tableau n° 66	VALEUR DE L'ARC (transformation de la formule du tableau n° 66
Cotangente	$10 < \text{ctg } x < 1\,000$	$\text{ctg } x = \frac{\rho'}{x} \cdot 10^{+3}$	$x = \frac{\rho'}{\text{ctg } x} \cdot 10^{+3}$ x en minutes
	$1\,000 < \text{ctg } x$	$\text{ctg } x = \frac{\rho'}{x} \cdot 10^{+5}$	$x = \frac{\rho''}{\text{ctg } x} \cdot 10^{+5}$ x en secondes
3° *Lignes voisines de* 1 : voir n° 148-4°			

EXEMPLES

1° *arc sin* x = 0,008 48

$$\underset{\text{(minutes)}}{x} = \rho' \times 0{,}008\,48 \times 10^{+3} = 2{,}915 \times 10 = 29{,}15 \text{ ou } \mathbf{29'9''}$$

(car : 0,15 × 60 — 0)

2° *arc tg* x = 0,000 524

$$\underset{\text{(secondes)}}{x} = \rho'' \times 0{,}000\,524 \times 10^{+5} = 1{,}08 \times 10^{+2} = 108'' \text{ ou } \mathbf{1'48''}$$

3° *arc tg* x = 385

$$\underset{\text{(minutes)}}{(90^\circ - x)} = \frac{\rho'}{385} \times 10^{+3} = 8{,}93 \text{ ou } 8'56'' \text{ (car : } 0{,}93 \times 60 = 55{,}8)$$

d'où $\mathbf{x = 89°51'4''}$

4° *arc sin* x *ou tg* x = 0,088 3

$$\underset{\text{(minutes)}}{x} = \rho' \times 0{,}088\,3 \times 10^{+3} = 3{,}035 \times 10^{2} = 303{,}5 \text{ ou } \mathbf{5°3'1/2}.$$

69 — Compléments

- **Précision** — voir n°s 108, 110 et 148.
- **Division** en degrés décimaux, en grades ou en radians — voir chapitre 21.

EXERCICES D'APPLICATION

Calculer les arcs x dont on donne les lignes suivantes (ne pas utiliser les échelles S & T et T_3) :

$\sin x_1 = 0{,}000\,513$ $\quad \sin x_2 = 0{,}044\,8$ $\quad \text{tg } x_3 = 0{,}003\,41$

$\text{tg } x_4 = 0{,}000\,082\,5$ $\quad \text{tg } x_5 = 341{,}5$ $\quad \text{tg } x_6 = 6\,580$

$\text{tg } x_7 - 43{,}7$ $\quad \cos x_8 - 0{,}064\,1$ $\quad \text{ctg } x_9 = 0{,}000\,318$

$\text{ctg } x_{10} = 581.$

CHAPITRE 14

ÉCHELLE L

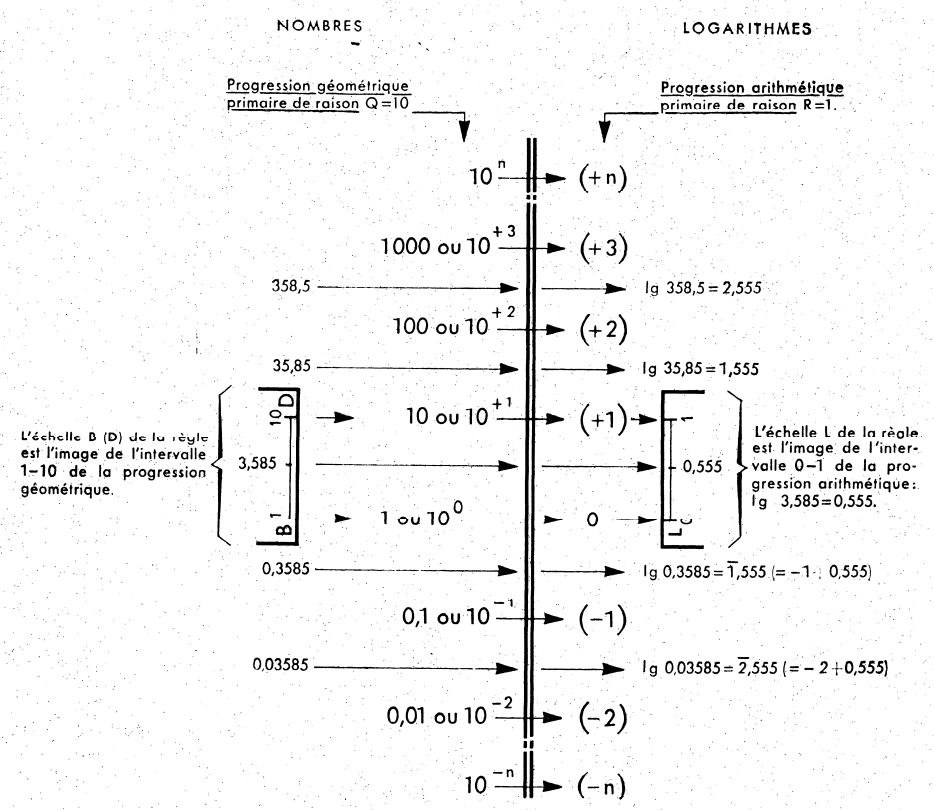
70 — Rappel : logarithmes décimaux ou vulgaires ou de Briggs

Le premier aperçu des logarithmes, donné au n° 9, ne répond plus à nos besoins. Nous renvoyons le lecteur à un cours d'algèbre ; cependant, nous estimons utile de lui rappeler l'essentiel.

On fait correspondre :

- une progression géométrique de raison Q = 10 et de terme médian 1,
- et une progression arithmétique de raison R = 1 et de terme médian 0.

Les termes médians sont alignés.



Par définition, chaque terme de la progression arithmétique est appelé

logarithme décimal

du terme correspondant de la progression géométrique.

Exemples : $\log_{10} 1 = 0$ $\log_{10} 100 = +2$ $\log_{10} 0{,}1 = -1$

Les progressions ainsi définies sont trop « lâches » ; aussi, on insère dans l'une et dans l'autre, entre les termes consécutifs, des *moyens*, termes intermédiaires formant, avec les anciens termes, des progressions du même type, mais plus serrées.

La définition du logarithme s'étend aux moyens.

Il se trouve que, par exemple :

- *dans la progression géométrique :* 3,585 occupe, dans l'intervalle 1-10, la même position que 35,85 dans l'intervalle 10-100, que 358,5 dans l'intervalle 100-1000, ..., que 0,3585 dans l'intervalle 0,1-1, ... ;
- *par correspondance, dans la progression arithmétique,* $\log_{10}$ 3,585 occupe, dans l'intervalle 0-1, la même position que $\log_{10}$ 35,85 dans l'intervalle 1-2, que $\log_{10}$ 358,5 dans l'intervalle 2-3, ..., que 0,3585 dans l'intervalle (—1)-0, ...

Autrement dit, $\log_{10}$ 3,585, $\log_{10}$ 35,85, $\log_{10}$ 358,5, ..., $\log_{10}$ 0,3585, ..., ont la même valeur décimale ou *mantisse.* Ils ne diffèrent que par la partie entière ou *caractéristique,* borne inférieure de l'intervalle (dans la progression arithmétique primaire).

En résumé, le logarithme est obtenu en ajoutant à la borne inférieure, ou *caractéristique* (*positive ou négative*), la *mantisse toujours positive.*

Exploitant cette propriété, *les règles, comme les tables, ne donnent que les logarithmes des nombres compris entre* 1 *et* 10, soit d'un seul intervalle. Pour ramener un nombre entre 1 et 10, on déplace sa virgule d'un certain nombre *algébrique* de rangs, qui est la caractéristique du logarithme. Le signe négatif *surligne* la caractéristique, car il n'engage que celle-ci.

71 — Recherche de lg X sur la règle à calculs

RÈGLE

1° Déplacer la virgule de X, de manière à le ramener entre 1 et 10. Soit X′ le nombre transformé.

2° Lire la *mantisse* sur l'échelle L, à l'alignement de X′ repéré sur l'échelle B(D).

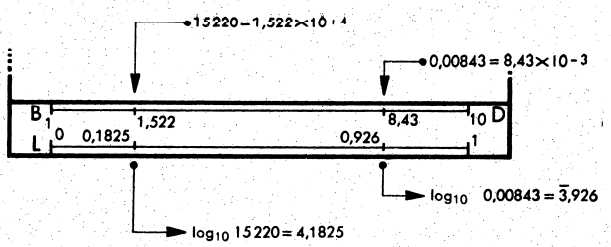
☞ *Note.* — L'échelle L doit être lue de 0 à 1 et non de 0 à 10.

3° La *caractéristique* est égale au nombre *algébrique* de rangs dont a été déplacée la virgule de X (la caractéristique est déterminée comme l'exposant de transformation d'un facteur).

4° Le $\log_{10}$ X est formé :

- de la caractéristique placée avant la virgule ; si elle est négative, le signe (—) la surligne ;
- de la mantisse placée après la virgule ; elle est toujours positive.

EXEMPLES



72 — Problème inverse. Recherche du nombre X dont on connait le logarithme L (X est dit l'*antilogarithme* de L)

RÈGLE

Soient x la caractéristique et m la mantisse de L.

1° Repérer m au curseur sur l'échelle L (lue de 0 à 1) ; à l'alignement, lire X′ sur l'échelle B(D).

2° Multiplier X′ par 10^x.

EXEMPLES

X = *antilog* 3,423

A la mantisse 0,423, prise sur l'échelle L, correspond 2,649 sur l'échelle B(D). La caractéristique est + 3, d'où :

$$\mathbf{X = 2,649 \times 10^3 = 2\,649.}$$

Y = *antilog* $\bar{4}$,897

A la mantisse 0,897, prise sur l'échelle L, correspond 7,89 sur l'échelle B(D). La caractéristique est — 4, d'où :

$$\mathbf{Y = 7,89 \times 10^{-4} = 0,000\,789.}$$

73 — Cologarithme (1)

Pour éviter la délicate soustraction du logarithme, ce dernier est remplacé par son opposé, le *cologarithme* : colog X = — lg X.

Nous verrons également (n° 74-1°) que : $\operatorname{colog} X = \lg \frac{1}{X}$.

Le cologarithme est conçu comme le logarithme : sa partie entière (caractéristique) est positive ou négative ; sa partie décimale (mantisse) est toujours positive.

La combinaison judicieuse des lg et colog permet de n'effectuer que des additions avec des mantisses toutes positives.

(1) Symbole du cologarithme (décimal) de x : colog x (NF. X. 02-101).

PROCÉDÉ CLASSIQUE D'OBTENTION DU COLOGARITHME

(Voir justification sur un cours d'algèbre.)

Le cologarithme se déduit du logarithme de la manière suivante :

1° *Caractéristique :* ajouter d'abord + 1 à la caractéristique du lg, puis changer le signe.

2° *Mantisse :* chercher le complément à 9 de chaque chiffre de la mantisse du lg ; exceptionnellement, pour le dernier chiffre significatif à droite, chercher le complément à 10.

EXEMPLES

Si lg A = 3,687

colog A = $\bar{4}$,313

$-(3+1) = -4$

$9-6=3$

$9-8=1$

$10-7=3$

Si lg B = $\bar{2}$,304

colog B = 1,696

$-(-2+1) = +1$

$9-3=6$

$9-0=9$

$10-4=6$

Ce procédé, le seul valable avec la table, peut être utilisé avec la règle ; nous lui préférons le calcul direct.

CALCUL DIRECT D'UN COLOGARITHME AVEC LA RÈGLE A CALCULS

Le colog d'un nombre étant aussi le lg de son inverse, il suffit de repérer le nombre (après déplacement de sa virgule) sur l'échelle des inverses a(CI) et de lire la mantisse sur l'échelle L.

RÈGLE *Recherche directe de colog X sur la règle.*

1° Déplacer la virgule de X, de manière à le comprendre entre 0,1 et 1.

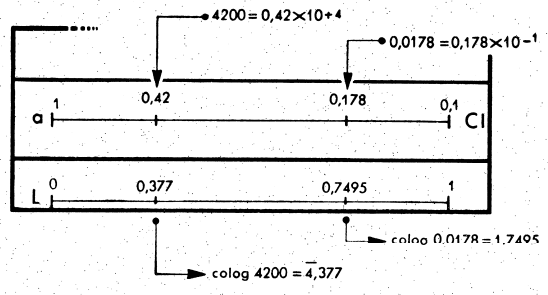
Soit X′ le nombre transformé.

2° Ajuster les index de la règle et de la réglette ; lire la *mantisse* sur l'échelle L, à l'alignement de X′ repéré sur l'échelle a(CI).

Note. — L'échelle a(CI) est lue de 0,1 à 1, l'échelle L de 0 à 1.

3° La *caractéristique* est l'*opposé* du nombre de rangs dont la virgule a été déplacée (la caractéristique est déterminée comme l'exposant de transformation d'un *diviseur*).

EXEMPLES



PROBLÈME INVERSE. RECHERCHE D'UN NOMBRE X DONT ON CONNAIT LE COLOGARITHME L′ (X est dit l'*anticologarithme* de L′)

Avec la table, nous devons passer par le logarithme.

Avec la règle, le nombre X s'obtient directement.

RÈGLE

Soient x la caractéristique et m la mantisse de L′.

1° Repérer m au curseur sur l'échelle L (lue de 0 à 1) ; à l'alignement, lire X′ sur l'échelle a(CI), préalablement ajustée sur B(D).

2° Multiplier X′ par 10^{-x} (caractéristique x *changée* de signe).

EXEMPLES

$X = \textit{anticolog}\ 3{,}852$

A la mantisse 0,852, prise sur L, correspond

0,140 6 sur a(CI) ; exposant : — (+ 3) = — 3.

$$\mathbf{X = 0{,}140\,6 \times 10^{-3} = 0{,}000\,140\,6.}$$

$Y = \textit{anticolog}\ \overline{2}{,}731$

A la mantisse 0,731, prise sur L, correspond

0,185 8 sur a(CI) ; exposant : —(—2) = +2.

$$\mathbf{Y = 0{,}185\,8 \times 10^{+2} = 18{,}58.}$$

74 — Calculs avec l'échelle L

1° RAPPEL DES PROPRIÉTÉS ESSENTIELLES DES LOGARITHMES (quelle que soit leur base)

Produit - $\log X \cdot Y \cdot Z \cdots = \log X + \log Y + \log Z + \cdots$

Puissance - $\log X^n = n \log X$; donc $\log \frac{1}{X} = \log X^{-1} = -\log X = \operatorname{colog} X$

Quotient - $\log \frac{X}{Y} = \log X - \log Y$ ou $\log X + \operatorname{colog} Y$

Racine - $\log \sqrt[n]{X} = \frac{1}{n} \log X$ (pour démonstrations, se reporter à un cours d'algèbre).

2° PROCÉDÉ GÉNÉRAL

C'est le procédé employé avec les tables ; il consiste à appliquer les propriétés qui précèdent.

EXEMPLES SIMPLES :

$$X = (0{,}0755)^5 \Rightarrow \lg X = 5 \lg 0{,}0755 = 5 \times (\bar{2}{,}878) = -10 + 4{,}390 = \bar{6}{,}390$$
$$\Rightarrow X = 2{,}455 \times 10^{-6} = 0{,}000\,002\,455$$

$$Y = \sqrt[5]{0{,}000\,041\,3} \Rightarrow \lg Y = \frac{1}{5} \lg 0{,}000\,041\,3 = \frac{1}{5} \times \bar{5}{,}616 = \bar{1}{,}1232$$
$$\Rightarrow Y = 1{,}329 \times 10^{-1} = 0{,}13\,29.$$

Les opérations sur la caractéristique négative (qui ne présente ici aucune difficulté) et la mantisse positive sont effectuées séparément. Les résultats sont ensuite associés.

Avec une caractéristique positive, il ne se pose absolument aucun problème. L'opération s'effectue directement sur l'ensemble du logarithme.

COMBINAISON D'OPÉRATIONS :

$$A = \frac{487 \times (0{,}006\,88)^{2,6} \times \sqrt[5]{42\,700}}{(22\,600)^{0,8} \times \sqrt[1,3]{(0{,}000\,748)^2 \times \pi}}.$$

Nous groupons à part $\lg (0{,}006\,88)^{2,6}$ et $\operatorname{colog} (22\,600)^{0,8}$ dont la caractéristique est négative. Nous les remplaçons par leurs opposés (1) sur lesquels nous opérons plus facilement, puis nous prenons l'opposé du résultat de leur ensemble.

$$\lg 487 = 2{,}687\,5$$
$$(\lg 42\,700 = 4{,}630\,5) : 5 = 0{,}926\,1$$
$$(\operatorname{colog} 0{,}000\,748 = 3{,}126) \times (2/1{,}3) = 4{,}809\,2$$
$$\operatorname{colog} \pi = \bar{1}{,}502\,8$$

Groupe particulier :

$$(\operatorname{colog} 0{,}006\,88 = 2{,}625) \times 2{,}6 = 6{,}825\,0$$
$$(\lg 22\,600 = 4{,}354) \times 0{,}8 = 3{,}483\,2$$
$$10{,}308\,2, \quad \operatorname{colog} = \overline{11}{,}691\,8$$
$$\lg A = \bar{3}{,}617\,4$$

d'où $\mathbf{A = 4{,}145 \times 10^{-3} = 0{,}004\,145.}$

3° PROCÉDÉ MIXTE

Souvent, il est avantageux de grouper et de calculer par les procédés habituels (2) les facteurs nombres ordinaires et racines simples, comme si la lecture devait être prise sur B(D).

La mantisse du résultat de ce calcul partiel est lue sur l'échelle L, à l'alignement de la lecture, en fait inutile, sur B(D). La caractéristique est égale à l'exposant de 10 qui devrait affecter la lecture. Le log, ainsi déterminé, est incorporé dans le calcul logarithmique général.

---

(1) Nous considérons que lg X est l'opposé de colog X et, réciproquement, puisque $\lg X = -\operatorname{colog} X$.

(2) Ces procédés sont en outre généralisés dans les chapitres 16, 17, 18 et 19.

EXEMPLE

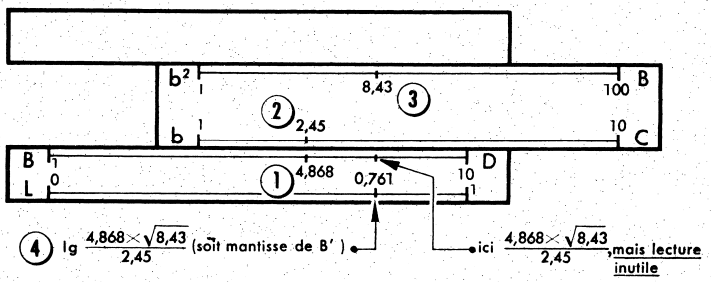
$$\boxed{B = \frac{48{,}68 \times \sqrt[2]{0{,}084\,3} \times (127)^{1{,}5}}{\sqrt[5]{0{,}008\,75} \times 245}}.$$

Nous effectuons d'abord :

$$\lg B' = \lg \left(\frac{\overset{(B)+1}{48{,}68} \times \overset{(b^2)-1}{\sqrt[2]{0{,}084\,3}}}{\underset{(b)-2}{245}} \right) = \overset{(L)}{\bar{2}{,}761}$$

(caractéristique : $+1 - 1 - 2 = -2$).

● C'est l'exposant affectant le résultat habituel.



Calcul logarithmique :

$$\begin{aligned} \lg B' &= \bar{2}{,}761 \\ (\lg 127 = 2{,}104) \times 1{,}5 &= 3{,}156 \\ (\text{colog } 0{,}008\,75 = 2{,}058) : 5 &= 0{,}411\,6 \\ \lg B &= 2{,}328\,6 \end{aligned}$$

d'où **B** $= 2{,}13 \times 10^2 =$ **213.**

4° RENVERSEMENT GÉNÉRAL DES LOGARITHMES ET COLOGARITHMES

Ce renversement est intéressant lorsque les caractéristiques négatives sont plus nombreuses que les caractéristiques positives. Il est très avantageux avec la règle qui permet le calcul direct de l'anticolog (n° 73).

EXEMPLE SIMPLE :

$$C = \sqrt[7]{(0{,}006\,14)^{11}}.$$

lg 0,006 14 ayant une caractéristique négative, nous faisons :

$$\text{colog } C = \frac{11}{7} \text{ colog } 0{,}006\,14 = \frac{11}{7} \times 2{,}212 = 3{,}476,$$

d'où **C** $= 0{,}334 \times 10^{-3} =$ **0,000 334** ● face à 0,476 de L, nous lisons 0,334 sur a(C1) ; exposant de 10 : $-(+3) = -3$.

75 — Compléments

- voir chapitre 24 — n° 126 : calcul d'une puissance quelconque de 10.
- $\log_{10}$ des nombres voisins de 1 — voir n° 148-5°.
- détermination des $\log_{10}$ avec les échelles LL — voir n° 152.
- précision — voir n° 109.

EXERCICES D'APPLICATION

I — Calculer *directement* le log des nombres :

$A = 85\,820$ $\quad B = 0{,}931$ $\quad C = 0{,}072\,7$ $\quad D = 48 \times 10^4$

et le colog des nombres :

$E = 0{,}164\,30$ $\quad F = 0{,}006\,48$ $\quad G = 1{,}433$ $\quad H = 42{,}8 \times 10^{-6}$

II — Calculer A, B, C, D, E, F, G, H, J, sachant que :

$\log A = 0{,}649$ $\quad \log B = 1{,}533$ $\quad \log C = 4{,}894$

$\log D = \bar{1}{,}658\,5$ $\quad \log E = \bar{2}{,}837\,5$ $\quad \log F = 7{,}033$

$\operatorname{colog} G = 0{,}329$ $\quad \operatorname{colog} H = 3{,}537$ $\quad \operatorname{colog} J = \bar{3}{,}085$

III — Calculer :

$K = (358)^{1,3}$ $\quad L = (0{,}003\,36)^{0,9}$ $\quad M = \sqrt[5]{254{,}8}$

$N = \dfrac{1}{\sqrt[5]{0{,}008\,31}}$ $\quad P = \dfrac{1}{618)^{1,6}}$ $\quad Q = \dfrac{(214)^{0,6}}{(0{,}0612)^{1,4}}$

$R = \dfrac{24{,}8 \times (0{,}648)^{1,9}}{(14{,}45)^{2,1}}$ $\quad S = (671)^{1,5} \times \sqrt[5]{\dfrac{92{,}1}{(6{,}04)^{1,6}}}$

◇