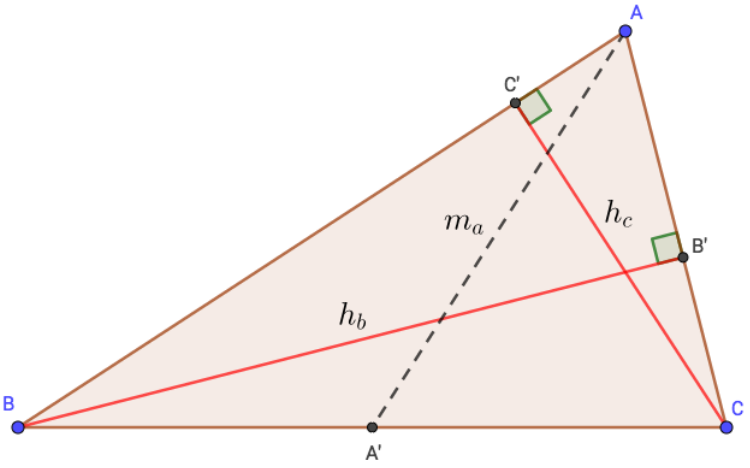
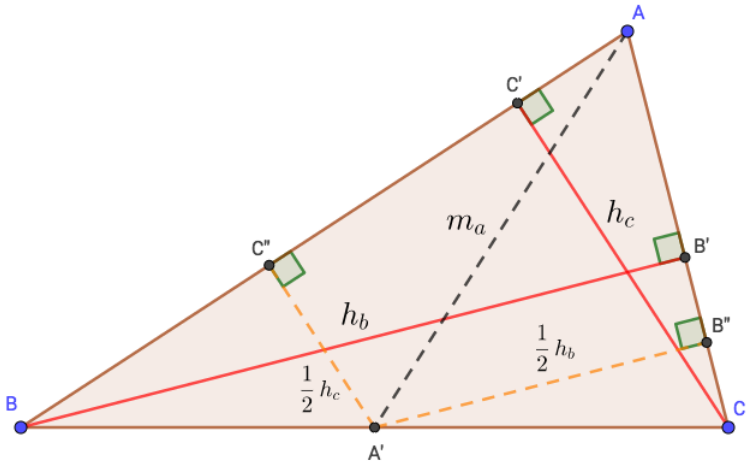
Dans cet article on se propose de résoudre l'exercice suivant :

Exercice : Construire un triangle ABC sachant h_b, h_c et m_a.[1]



Nous disposons dans ce problème de trois longueurs mais aussi de deux angles droits. L'idée serait donc de compléter la figure ci-dessus avec des éléments auxiliaires constructibles afin de pouvoir récupérer tout le triangle. Les angles droits nous font penser à construire des triangles rectangles. Les triangles AC'C et AB'B le sont. Toutefois, nous n'avons pas suffisamment d'éléments pour les construire. Impasse !

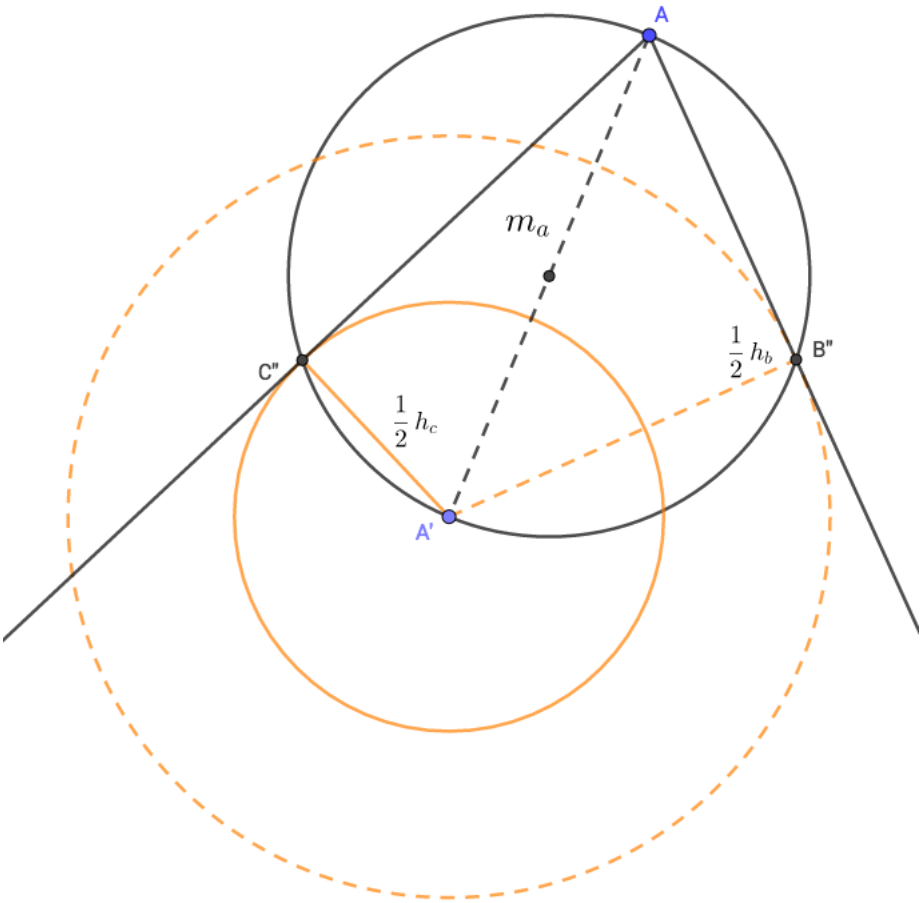
Mais n'abandonnons pas de suite cette idée. Une longueur supplémentaire permettrait peut-être d'y arriver. Peut-on utiliser judicieusement la longueur m_a ? En gardant en tête que A' est milieu de [BC] et que la construction d'un triangle rectangle est relativement triviale en connaissant son hypoténuse et la longueur d'un autre côté, nous pouvons penser à compléter la figure de la façon suivante :



1.
- h_b : longueur de la hauteur issue de B.
- h_c : longueur de la hauteur issue de C.
- m_a : longueur de la médiane issue de A.

Je vous laisse démontrer seul que $A'B'' = h_b/2$ et que $A'C'' = h_c/2$. Dans le triangle rectangle $AA'B''$, nous connaissons son hypoténuse $AA' = m_a$ et le côté $A'B'' = 1/2h_b$. Sa construction s'en déduit de la manière suivante :

- Nous commençons par placer le segment $[AA']$ de longueur m_a.
- Construire le cercle de diamètre $[AA']$.
- Le point B'' appartient à ce cercle et au cercle de centre A' et de rayon $h_b/2$. (On a le choix entre deux points).



On fait de même pour construire le triangle $AA'C''$. On a ainsi obtenu une partie de la figure, à savoir, la demi-droite $[AB)$ et la demi-droite $[AC)$. Il reste donc à placer B et C. Qu'a-t-on ? Et de quoi a-t-on besoin ? Le segment $[BC]$ est la deuxième diagonale du parallélogramme ABDC, où D désigne le symétrique de A par rapport à A'. Ce quadrilatère se construit en menant la parallèle à (AB) passant par D et la parallèle à (AC) passant par ce même point. Bingo !