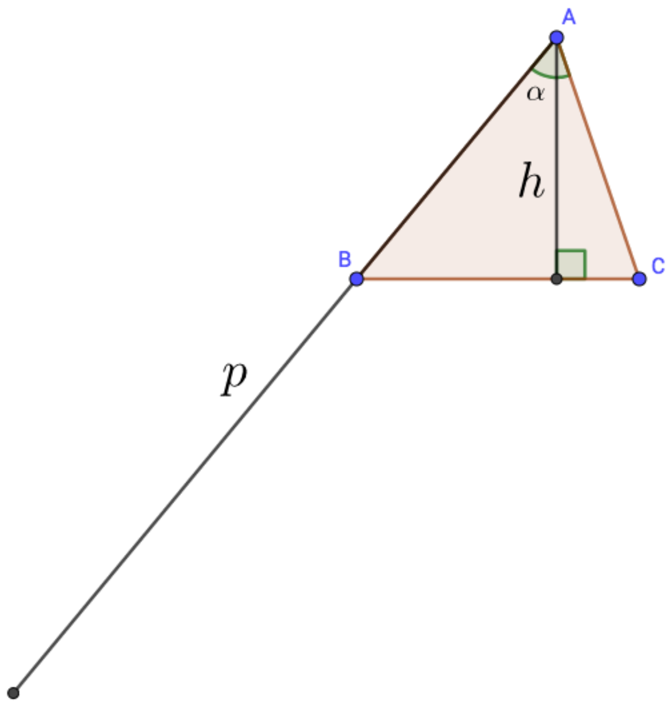
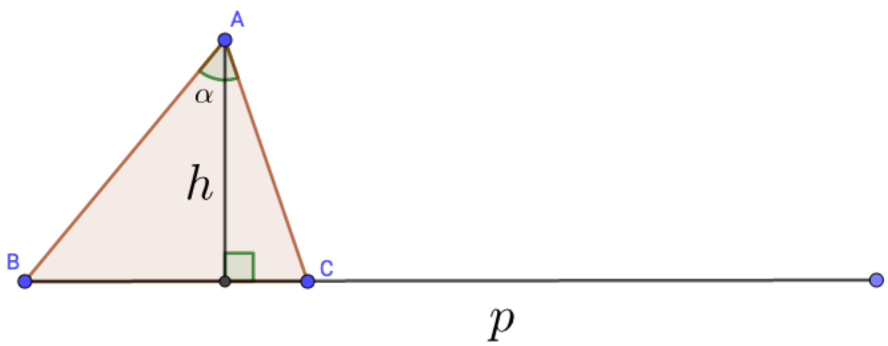
How to solve it [1]

On se propose dans cet article de résoudre l'exercice suivant :

Construire un triangle ABC sachant l'angle en A, la longueur de la hauteur issue de ce point et le périmètre de ce triangle.

Commençons par introduire une notation convenable. Notons α l'angle en A, h la longueur de la hauteur issue de ce point et p le périmètre donné du triangle. En géométrie, le premier réflexe consiste à faire une figure, même si on n'a pas encore réussi à trouver l'algorithme permettant de faire cette construction. On place donc aisément α et h. A-t-on utilisé toutes les données du problème ? Bien sûr que non, nous n'avons pas placé le périmètre p. Nous devons donc utiliser cette donnée, mais comment ?

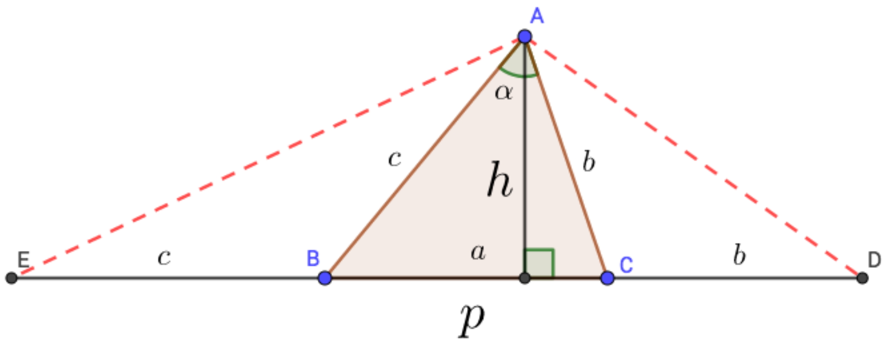




1. Cet article est une traduction adaptée d'un passage tiré du livre de *G.Polya, How to Solve It, A new aspect of mathematical method - Princeton University Press (1957)*.

Il existe plusieurs manières pour introduire p. Les deux tentatives ci-dessus semblent mauvaises. Pour le comprendre, il suffit de se plonger davantage dans l'analyse du problème. En effet, en notant a, b et c les trois côtés du triangle ABC, où comme d'habitude a désigne le côté opposé au sommet A, on s'aperçoit que b et c jouent le même rôle par rapport à ce qu'on cherche à faire, ils sont interchangeables ; notre problème est donc symétrique par rapport à b et c. Par conséquent, nos deux figures ne sont pas satisfaisantes puisque nous y traitons b et c différemment. Nous devons donc placer p de façon à ce qu'il ait la même relation avec b et c.

Cette dernière remarque sera d'une grande aide pour nous et suggère la figure suivante :



On rajoute au côté a du triangle le segment $[BE]$ de longueur c et le segment $[CD]$ de longueur b. De cette manière, le périmètre p apparait comme la longueur du segment $[ED]$, à savoir

$$b + a + c = p.$$

Le lecteur familier avec les problèmes de constructibilité sait, qu'à ce stade, il serait bon d'introduire quelques éléments auxiliaires sur notre figure. En effet, en complétant les segments $[AD]$ et $[AE]$ on obtient deux triangles isocèles. Nous avançons, pour l'instant lentement, mais sûrement ; introduire de nouveaux éléments simples et familiers, à savoir des triangles isocèles, sera la clef de notre problème.

Il n'est pas souvent évident de pouvoir introduire des élèments auxilaires clefs mais cette fois nous avons eu de la chance. En effet, en examinant notre figure, on pourrait trouver un lien entre l'angle $\widehat{EAD}$ et l'angle α. Une petite chasse à l'angle permet d'établir que

$$\widehat{EAD} = \frac{\alpha}{2} + 90°.$$

Je prétends que l'exercice est fini. La construction de l'angle $\widehat{EAD}$ permettra de construire le triangle ABC. Les étapes sont les suivantes :

1. D'abord contruire la droite portant p et le côté a du triangle.

2. Le point A est à une distance égale à h de cette droite. Il appartient donc à la parallèle à cette droite d'écart égal à h, construbtible à la règle non graduée et au compas.

3. A se balade ainsi sur ce premier lieu géométrique, nous avons donc besoin d'un deuxième lieu pour le localiser de façon exacte. La construction de $\widehat{EAD}$ permettra de conclure. En effet, A appartient à l'arc capable $\widehat{EAD}$ d'angle $\widehat{EAD} = \alpha/2 + 90°$.

4. En somme, le point A appartient à l'intersection de la droite parallèle à a et à cet arc de cercle. Il reste maintenant à placer les points B et C. Trivial, me diriez-vous ! Tout à fait, il s'agit d'exploiter les deux triangles isocèles ABE et ACD afin de reporter les angles, opération constructible à la règle non graduée et au compas.