a) Soient $a_1, a_2 \in]0, 2\pi[$ tels que $a_1 < a < a_2$ et $\epsilon > 0$. Puisque $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est équirépartie sur $[0, 2\pi]$, on a $\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} e^{iU_n t} = 0$ uniformément pour tout $t \in [0, 2\pi]$. En particulier, il existe un entier N_0 tel que pour tout $N \geq N_0$,

$$\left| \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} e^{ia_2 U_n} - \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} e^{ia_1 U_n} \right| < \epsilon.$$

On pose $A_N = \{n \in \mathbb{N}, n \leq N \mid U_n \in [0, a_1]\}$, $B_N = \{n \in \mathbb{N}, n \leq N \mid U_n \in [0, a_2]\}$ et $C_N = \{n \in \mathbb{N}, n \leq N \mid U_n \in]a_1, a_2[\}$. Alors pour tout $N \geq N_0$,

$$\begin{aligned} \left| \frac{|A_N|}{N} a_1 + \frac{|B_N|}{N} a_2 - \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} U_n \right| \quad & \leq \left| \frac{1}{N}\sum_{n\in A_N} e^{ia_2 U_n} \right| + \left| \frac{1}{N}\sum_{n\in B_N} e^{ia_1 U_n} \right| + \left| \frac{1}{N}\sum_{n\in C_N} e^{ia_2 U_n} - e^{ia_1 U_n} \right| \\ & < \epsilon a_2 + \epsilon a_1 + 2\epsilon = \epsilon(a_2 - a_1 + 2) < \epsilon(2\pi + 2). \end{aligned}$$

Ainsi, on a $\lim_{N\to\infty} \frac{|A_N|}{N} = \frac{a_2}{2\pi}$ et $\lim_{N\to\infty} \frac{|B_N|}{N} = \frac{a_1}{2\pi}$. On en déduit que $\lim_{N\to\infty} F_N(a_2) - F_N(a_1) = \frac{a_2 - a_1}{2\pi}$.