Proposition de corrigé des

Olympiades académiques de mathématiques 2023 Orient

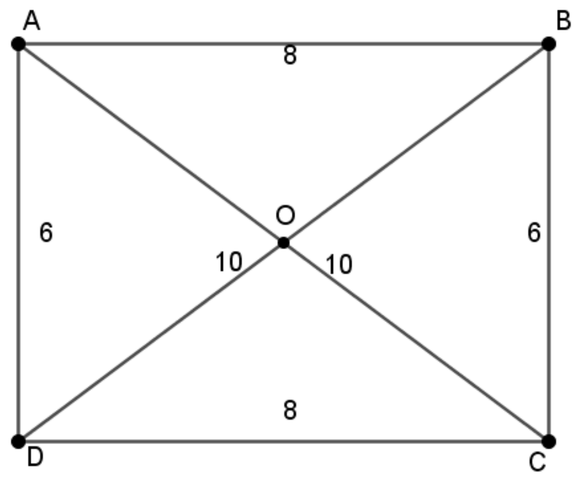
EXERCICES ACADEMIQUES

Exercice 1 : PARTIES INTEGRALES DU PLAN.

Partie A.

1. **a.** AB = $\sqrt{4^2+3^2}$ = 5 , AC=5 , BC = $\sqrt{4^2+2^2}$ = $2\sqrt{5}$. Donc {A,B,C} n'est pas une partie intégrale du plan.

   b. EF = 4 , FG = 3 , EG = $\sqrt{4^2+3^2}$ = 5 $\Rightarrow$ {E,F,G} est une partie intégrale du plan.
2. Oui, il suffit par exemple de compléter EFG en le rectangle EFGH.
3. Non, car la longueur de la diagonale d'un carré de côté a est $a\sqrt{2}$.



4. {A,B,C,D,O} est une partie intégrale du plan.
5. **a.** Il suffit de placer les n points sur les abscisses entières de l'axe des x.

   b. Il suffit de placer les n points sur l'axe des x et d'abscisses $\pm\frac{1}{3}$, $\pm\frac{1}{5}$, $\pm\frac{1}{7}$, $\pm\frac{1}{11}$, ….où les dénominateurs sont des nombres premiers supérieurs ou égaux à 3 (voir annexe à la dernière page).

Partie B.

1. **a.** (D_t) : $y = tx + t$.

   b. (x, y) vérifie le système suivant $\begin{cases} x^2+y^2-1=0 \\ y = tx + t \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2+(tx+t)^2-1=0 \\ y = tx + t \end{cases}$ $\Leftrightarrow \begin{cases} (x-1)(x+1)+t^2(x+1)^2=0 \\ y = tx + t \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} (x+1)[t^2(x+1)+x-1]=0 \\ y = tx + t \end{cases}$ $\Leftrightarrow \begin{cases} (x+1)[(t^2+1)x+t^2-1]=0 \\ y = tx + t \end{cases}$

c. $(x+1)[(t^2+1)x+t^2-1]=0 \Rightarrow$

$x+1=0$ ou $(t^2+1)x+t^2-1=0 \Rightarrow$

$x=-1$ (c'est le point A) ; $x=\frac{1-t^2}{1+t^2} \Rightarrow y = t\times\frac{1-t^2}{1+t^2}+t=\frac{2t}{1+t^2} \Rightarrow$ B$\left(\frac{1-t^2}{1+t^2};\frac{2t}{1+t^2}\right)$

d. $a=\frac{1-t^2}{1+t^2}$ et $b=\frac{2t}{1+t^2}$. Or, $t \in \mathbb{Z} \Rightarrow$ a et b sont rationnels sachant que $a^2+b^2=1$. En variant t, on obtient une infinité de couples (a;b).

2. **a.** $(a^2-b^2)^2+(2ab)^2 = a^4-2a^2b^2+b^4+4a^2b^2 = a^4+2a^2b^2+b^4 = (a^2+b^2)^2 = 1^2 = 1 \Rightarrow$ M $\in$ (C).

   b. M=N $\Rightarrow a^2-b^2 = c^2-d^2$

   Or, $b^2 = 1-a^2$ et $d^2 = 1-c^2$

   $\Rightarrow a^2-(1-a^2) = c^2-(1-c^2) \Rightarrow 2a^2 = 2c^2 \Rightarrow a^2 = c^2 \Rightarrow |a|=|c|$

   De même, $a^2 = 1-b^2$ et $c^2 = 1-d^2$

   $\Rightarrow 1-b^2-b^2 = 1-d^2-d^2 \Rightarrow 2b^2 = 2d^2 \Rightarrow b^2 = d^2 \Rightarrow |b|=|d|$.

   c. Tout point de (P) est un point de (C). Alors, (P) est une partie de (C) et (P) contient un nombre infini de points.

3. **a.** M $\in$ (C) $\Rightarrow {x_M}^2+{y_M}^2=1$. N $\in$ (C) $\Rightarrow {x_N}^2+{y_N}^2=1$.

   $MN^2 = (x_N-x_M)^2+(y_N-y_M)^2 = {x_N}^2-2\,x_N\,x_M+{x_M}^2+{y_N}^2-2\,y_N\,y_M+{y_M}^2$

   $= 1+1-2\,(x_M\,x_N+y_M\,y_N)$

   $= 2(1-(x_M\,x_N+y_M\,y_N))$

   $(a^2+b^2)(c^2+d^2)=1$

   $\Rightarrow a^2c^2+a^2d^2+b^2c^2+b^2d^2=1$

   $\Rightarrow a^2d^2+b^2c^2 = 1-a^2c^2-b^2d^2$.

   b. M(a^2-b^2;2ab) et N(c^2-d^2;2cd) appartiennent à (P) et (C).

   $\Rightarrow MN^2 = 2[\,1-[(a^2-b^2)(c^2-d^2)+2ab\times 2cd]\,]$

   $= 2[\,1-(a^2c^2-a^2d^2-b^2c^2+b^2d^2+4abcd)]$

   $= 2[\,1-a^2c^2-b^2d^2+a^2d^2+b^2c^2-4abcd]$

   $= 2[a^2d^2+b^2c^2+a^2d^2+b^2c^2-4abcd]$

   $= 2[2a^2d^2+2b^2c^2-4abcd]$

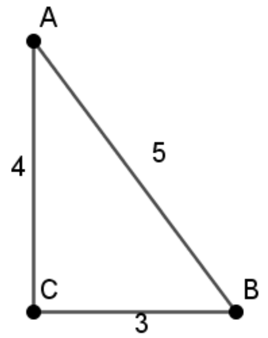
   $= 4[a^2d^2+b^2c^2-2abcd]$

   $= 4(ad-bc)^2 \Rightarrow MN = 2|ad-bc|$ qui est rationnel car a, b, c et d le sont.

4. En choisissant a, b, c et d des entiers, on obtient MN = entier $\Rightarrow$ les points de (P) $\cap$ (C) forment une partie intégrale du plan et en plus ne sont pas alignés car appartiennent à (C).

Exercice 2 : LES TRIPLETS HERONIENS.

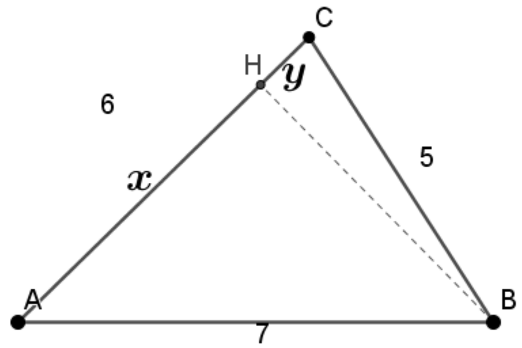
Partie A – Un exemple de triplets héroniens.

1. 

2. ABC est rectangle en C.

3. 3, 4 et 5 sont des entiers. En plus Aire = (3×4)/2=6 qui est entier.
d'où, (3;4;5) est héronien.

Partie B – Un triplet héronien?



1. $x^2 = 49 - BH^2$
$y^2 = 25 - BH^2$
$\Rightarrow x^2 - y^2 = 24$

2. $(x - y)(x + y) = 24 \Rightarrow (x - y) \times 6 = 24 \Rightarrow x - y = 4$.

3. $BH^2 = 25 - y^2 = 25 - (x - 4)^2 = -x^2 + 8x + 9$
En plus, $BH^2 = 49 - x^2$
$\Rightarrow 49 - x^2 = -x^2 + 8x + 9 \Rightarrow x = 5$
$\Rightarrow BH^2 = 49 - 5^2 = 24 \Rightarrow BH = 2\sqrt{6}$.

4. Aire = $\dfrac{6\times2\sqrt{6}}{2} = 6\sqrt{6} \Rightarrow$ (5;6;7) n'est pas héronien.

Partie C – Un triangle héronien dont l'aire est un nombre sphénique.

1. Les nombres sphéniques:

a. $30 = 2\times3\times5$

$70 = 2\times5\times7$

$110 = 2\times5\times11$

$130 = 2\times5\times13$

b. $114 = 2\times3\times19$

2. Les nombres hexagonaux centrés :

a. $h_3 = 19 = 1 + 1\times6 + 2\times6$

$h_4 = 1 + 1\times6 + 2\times6 + 3\times6 = 37$.

b. $h_n = 1 + 1\times6 + 2\times6 + 3\times6 + ... + (n-1)\times6$

$= 1 + 6(1 + 2 + 3 + ... + n-1)$

$= 1 + 6 \times \frac{(n-1)(1+n-1)}{2}$

$= 1 + 6 \times \frac{n(n-1)}{2}$.

3. Un triplet héronien dont l'aire est un nombre sphénique:

a. $x = h_3 = 19$ et $z = h_4 = 37$ alors $19 < y < 37$.

$s = \frac{x+y+z}{2} = \frac{19+y+37}{2} = \frac{56+y}{2}$

$s - x = \frac{56+y}{2} - 19 = \frac{18+y}{2}$

$s - y = \frac{56+y}{2} - y = \frac{56-y}{2}$

$s - z = \frac{56+y}{2} - 37 = \frac{y-18}{2}$

Aire = 114 $\Rightarrow$ Aire^2 = 114^2 = 12996

$\Rightarrow s(s-x)(s-y)(s-z) = 12996$

$\Rightarrow \frac{56+y}{2} \times \frac{18+y}{2} \times \frac{56-y}{2} \times \frac{y-18}{2} = 12996$

$\Rightarrow (56+y)(56-y)(y+18)(y-18)=16\times12996$

$\Rightarrow (56^2-y^2)(y^2-18^2)=16\times12996$

b. $(56^2-y^2)(y^2-18^2)=16\times12996 \Rightarrow (3136-y^2)(y^2-324)-207936=0$

$\Rightarrow 3136\, y^2 - 1016064 - y^4 + 324\, y^2 - 207936 = 0$

$\Rightarrow y^4 - 3460\, y^2 + 1224000 = 0$

Or, $(y^2-400)(y^2-3060) = y^4 - 3460\, y^2 + 1224000$

D'où, $(y^2-400)(y^2-3060) = 0$

c. $y^2 = 400 \Rightarrow y = 20$

ou y^2 = 3060 $\Rightarrow$ y = 55,3 à rejeter.
D'où, y = 20.

Partie D – Recherche de triangles isocèles formant des triplets héroniens.

1. s=$\frac{5+5+6}{2}$=8 $\Rightarrow$ Aire = $\sqrt{8(8-5)(8-5)(8-6)}$ = $\sqrt{8 \times 3 \times 3 \times 2}$ = 12 $\Rightarrow$ le triangle est héronien.
2. (13;13;10) est héronien.
   En effet, s=$\frac{13+13+10}{2}$=18 $\Rightarrow$ Aire = $\sqrt{18(18-13)(18-13)(18-10)}$ = $\sqrt{18 \times 5 \times 5 \times 8}$ = 60.

Annexe :

$\frac{1}{7} - \left(-\frac{1}{3}\right) = \frac{7+3}{7\times3}$, $\frac{1}{3} - \frac{1}{7} = \frac{7-3}{7\times3}$.

p et q étant 2 nombres premiers supérieurs ou égaux à 3.

- Démontrons que p+q n'est pas divisible par pq :
  Si p+q était divisible par pq, on aurait p+q=kpq où k est un entier supérieur ou égal à 1.
  $\Rightarrow \frac{p}{kpq} + \frac{q}{kpq} = 1 \Rightarrow \frac{1}{kq} + \frac{1}{kp} = 1 \Rightarrow \frac{1}{kq} = \frac{1}{kp} = \frac{1}{2}$ ce qui est impossible car kp $\geq$ 3 ainsi que kq $\geq$ 3.
  D'où, p+q ne peut pas être divisible par pq.
- Démontrons que p-q (p>q) n'est pas divisible par pq :
  Si p-q était divisible par pq, on aurait p-q=kpq où k est un entier supérieur ou égal à 1.
  $\Rightarrow \frac{p}{kpq} - \frac{q}{kpq} = 1 \Rightarrow \frac{1}{kq} - \frac{1}{kp} = 1 \Rightarrow \frac{1}{kq} = 1 + \frac{1}{kp}$ ce qui est impossible car $\frac{1}{kq}$ ne peut pas être supérieur à 1.
  D'où, p-q ne peut pas être divisible par pq.