

Exercice 22

Partie I : Etude d'une fonction f

Soit f la fonction définie sur $I =]-1; +\infty[$ par $f(x) = 2 \ln(1+x)$.

1. Justifier que f est de classe C^2 , croissante et concave sur I .
2. Montrer qu'il existe une unique solution, que l'on notera α , de l'équation $f(x) = x$ sur $[2; 3]$.
(On pourra admettre que $\ln(4) \leq 1,4$)
3. Montrer que pour tout $x \in [2; \alpha]$, $f(x) \in [2; \alpha]$.
4. En utilisant la concavité de f , montrer que pour tout $x \in [0, \alpha]$, $f(x) \geq x$.

Partie II : Etude d'une suite récurrente (u_n)

On définit la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ par $u_0 = 2$ et $u_{n+1} = f(u_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

5. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, u_n est bien défini et $u_n \in [2; \alpha]$.
6. Montrer que la suite (u_n) est croissante.