

La durée de vie d'un certain modèle d'ampoule électrique, exprimée en heures, peut être modélisée par une variable aléatoire X de loi exponentielle $\mathcal{E}(\lambda)$ avec $\lambda = 1/1000$. On contrôle l'état d'une ampoule neuve après 300h d'utilisation.

1. Déterminer la probabilité que l'ampoule soit hors d'usage.
2. Si elle fonctionne, calculer la probabilité que sa durée de vie soit inférieure à 400h.
3. On équipe un local d'un nombre $n \geq 2$ d'ampoules électriques neuves. On suppose que les durées de vie $X_1, \dots, X_n$ de ces ampoules sont des variables aléatoires indépendantes et de même loi $\mathcal{E}(\lambda)$ avec $\lambda = 1/1000$. On contrôle l'état des ampoules après 300h d'utilisation. Avec quelle probabilité deux ampoules exactement sont-elles hors d'usage?

Exercice 11:

$$X \sim \mathcal{E}(\lambda), \lambda = \frac{1}{10000}$$

1) On regarde la proba qu'au bout de 300h, l'ampoule soit hors d'usage

$$P(X \leq 300) = F_X(300); \text{ Or } F_X(t) = \int_0^t \lambda e^{-\lambda z} \mathbb{1}_{t \geq z}(z) dz$$

$$F_X(t) = \int_0^t \lambda e^{-\lambda z} dz = - \left[e^{-\lambda z} \right]_0^t = 1 - e^{-\lambda t}$$

$$\rightarrow F_X(300) = 1 - e^{-\lambda(300)}$$

$$\begin{aligned}
 2) \quad P(X \in]300; 400]) &= P(300 \leq X \leq 400) \\
 &= P(X \leq 400) - P(X \leq 300) \\
 &= (1 - e^{-\lambda 400}) - (1 - e^{-\lambda 300}) \\
 &= e^{-\lambda 300} - e^{-\lambda 400}
 \end{aligned}$$

3) On considère $X_1, X_2, \dots, X_n$; n variables aléatoires indépendantes
 tq $\forall i \in \{1, \dots, n\}, X_i \sim \mathcal{E}(\lambda)$

Soient $i, j \in \{1, \dots, n\}$ tel que $i \neq j$

On cherche $P(X_1 \geq 300; \dots; X_i \leq 300; \dots; X_j \leq 300; \dots; X_n \geq 300)$

$$\begin{aligned}
 \text{Indépendance} \quad &= \prod_{\substack{k \in \{1, \dots, n\} \\ k \neq i \\ k \neq j}} P(X_k \geq 300) \times P(X_i \leq 300) \times P(X_j \leq 300) \\
 &= \prod_{\substack{k \in \{1, \dots, n\} \\ k \neq i \\ k \neq j}} (1 - F_{X_k}(300)) \times \underbrace{F_{X_i}(300)}_{1 - e^{-300\lambda}} \times \underbrace{F_{X_j}(300)}_{1 - e^{-300\lambda}}
 \end{aligned}$$

$$\forall k \in \{1, \dots, n\}, 1 - F_{X_k}(300) = e^{-\lambda 300}$$

$$\Rightarrow P(X_1 \geq 300; \dots; X_i \leq 300; \dots; X_j \leq 300; \dots; X_n \geq 300) = (e^{-300\lambda})^{n-2} (1 - e^{-300\lambda})^2$$