

Soit $\gamma: I \rightarrow \mathbf{R}^n$ ($n \geq 2$) un arc paramétré de classe C^1 d'image notée Γ . Si $P \in \Gamma$, un vecteur v non nul dans $\mathbf{R}^n$ est dit « vecteur de direction limite en P » s'il existe une suite de points $(M_k)_{k \in \mathbf{N}}$ de Γ et une suite de réels λ_k telles que $\lim_k M_k = P$ et $\lim_k \lambda_k \overrightarrow{PM_k} = v$. Si tous les vecteurs de direction limite en P sont colinéaires, on dit que Γ admet une tangente en P et on appelle *tangente en P* la droite passant par P et portée par ces vecteurs.

On suppose que γ est un homéomorphisme sur son image. Soit $P = \gamma(t)$ ($t \in I$).

1. Si P est régulier pour γ , prouver que tout vecteur limite est colinéaire à $\gamma'(t)$.
2. Que peut-on dire si γ est C^2 avec $\gamma'(t) = 0$ et $\gamma''(t) \neq 0$? Et plus généralement si γ est C^m et si $\gamma^{(m)}(t)$ est la première dérivée non nulle en t ? Que peut-on déduire?
3. On suppose que γ est régulier. L'espace $\mathbf{R}^n$ étant muni de la norme euclidienne, montrer que parmi toutes les droites D de $\mathbf{R}^n$ passant par P , la tangente à Γ est la plus proche de la courbe : on étudiera la distance à D du point $M = \gamma(t+h)$ quand h tend vers 0.
4. Soit $g: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ l'application définie par $g(t) = e^{-1/t^2}$ si $t \neq 0$ et $g(0) = 0$. On pose $\epsilon(t) = -1$ si $t < 0$ et $\epsilon(t) = 1$ si $t \geq 0$. Montrer que l'arc $(\mathbf{R}, f)$ défini par $f(t) = (g(t), \epsilon(t)g(t))$ est lisse, mais qu'il ne possède pas de tangente en 0.