Outils du Discret – Devoir à la maison

Le but de ce devoir est de proposer des constructions de « droites discrètes » définies sur des matrices de pixels, et de voir les liens de ces constructions avec l'arithmétique. L'équation de la droite réelle que l'on souhaite représenter de façon discrète est *$y=(a/b)x+(c/b)$*.

Les quantités *a*, *b* et *c* considérées dans ce problème sont des entiers.

Une droite discrète (une droite composée de pixels) de pente a/b et de décalage c, avec $0 \leq a \leq b$, est définie par

$$D(a,b,c) = \{ (x,y) \in \mathbf{Z}^2 \text{ tel que } 0 \leq R_{a,b,c}(x,y) < b \}$$

avec $R_{a,b,c}(x,y) = a\,x - b\,y + c$.

Sauf mention du contraire, on supposera que a et b sont premiers entre eux, c'est-à-dire que $PGCD(a,b) = 1$.

Question 1 : Soit la fenêtre F de pixels $[0,7] \times [0,3]$ ci-dessous (qui correspond aux pixels de coordonnées entières (x,y) avec $0 \leq x \leq 7$ et $0 \leq y \leq 3$). Mettez une couleur dans les pixels de F appartenant à la droite $D(3,7,0)$. Pour chaque point (x,y) de la droite, indiquez dans le pixel correspondant la valeur $R_{3,7,0}(x,y)$.

3								
2								
1								
0								
	0	1	2	3	4	5	6	7

Marquez également la valeur $R_{3,7,0}(x,y)$ dans tous les autres pixels de F.

Que constatez-vous sur la forme que vous obtenez ? Et sur les valeurs $R_{3,7,0}(x,y)$ appartenant à la droite sur F ?

Question 2 : Que vaut $R_{a,b,c}(x + b, y + a)$? Qu'en concluez-vous sur la structure de la droite discrète $D(a,b,c)$?

Question 3 : Que peut-on dire sur les droites *D(a,b,c)*, *D(a,b,c+b)* et *D(a,b,c-b)* ?

Question 4 : Soient les points $A(x_A,y_A)$ et $B(x_B,y_B)$ avec $x_A \leq x_B$, $y_A \leq y_B$ et $y_B-y_A \leq x_B-x_A$. Montrez qu'il existe *a*, *b* et *c* entiers tels que *A* et *B* appartiennent à la droite *D(a,b,c)* et tels que $R_{a,b,c}(x_A,y_A) = 0$ et $R_{a,b,c}(x_B,y_B) = 0$.

Question 5 : Pour une valeur *x* donnée, peut-on avoir deux points $A(x,y_A)$ et $B(x,y_B)$ d'ordonnées différentes qui appartiennent à la droite *D(a,b,c)* ?

Question 6 : Soit *u* et *v*, deux entiers positifs, notons *[u/v]* le quotient de la division euclidienne de *u* par *v*. Soit un point *(x,y)* à coordonnées positives appartenant à *D(a,b,c)*, exprimez *y* en fonction de *x* et d'autres paramètres éventuels.

Question 7 : Soit une droite *D(a,b,0)* avec *PGCD(a,b) = k>1*. Pouvez vous proposer un couple *(a',b')* avec *PGCD(a',b')=1*, tel que la droite *D(a',b',0)* soit formé des mêmes pixels que la droite *D(a,b,0)* ?

Question 8 : un peu plus difficile que la question précédente. Soit une droite *D(a,b,c)* avec *PGCD(a,b) = k>1*. Pouvez vous proposer un triplet *(a',b',c')* avec *PGCD(a',b')=1*, tel que la droite *D(a',b',c')* soit formé des mêmes pixels que la droite *D(a,b,c)* ?

Question 9 : Donnez la complexité en temps (au pire) de l'algorithme de tracé d'un segment de la droite *D(a,b,0)* sur la fenêtre *F* de pixels *[0,b-1] x [0,a-1]* qui consiste à tester l'ensemble des points *F* de la fenêtre pour savoir s'ils appartiennent à la droite.

Question 10 : Proposez un algorithme de complexité en temps linéaire (en *O(b)*) qui permet de tracer (déterminer) l'ensemble de points de la droite *D(a,b,0)* qui relie le point *(0,0)* au point *(b,a)* ?

On rappelle la relation de Bézout qui relie les nombres a et b lorsque leur PGCD est égal à 1 :

Il existe u_0 et v_0 entiers tels que $au_0+bv_0=1$.

Question 11 : On considère les points *(x,y)* de la droite *D(a,b,0)* vérifiant $0 \leq x \leq b-1$, lorsque le PGCD de *a* et *b* est égal à *1* : montrez, en vous aidant de cette relation de Bézout, que $R_{a,b,0}(x,y)$ prend toutes les valeurs de *0* à *b-1*.
Qu'en est-il pour la droite *D(a,b,c)* ?

Question 12 : Toujours en vous servant de la relation de Bézout, si $R_{a,b,0}(x,y) = u$ avec $0 \leq u \leq b-1$ et $0 \leq x \leq b-1$, déterminez y. (Attention, on souhaite une réponse exprimée « dans le monde » des entiers relatifs, une fraction ne sera donc pas considérée comme une réponse satisfaisante !)

Question 13 : Supposons à présent que nous ayons une nouvelle forme de droite définie par $D'(a,b,c) = \{ (x,y) \in \mathbf{Z}^2 \text{ tel que } 0 \leq R_{a,b,c}(x,y) < a+b \}$. Dessinez la droite $D'(3,7,0)$ sur la fenêtre $[0,b] \times [0,a]$ en indiquant les valeurs $R_{a,b,c}(x,y)$ dans chaque pixel. Que constatez-vous ?

Question 14 (ouverte) : En informatique graphique, préféreriez-vous utiliser la droite $D(a,b,c)$ ou la droite $D'(a,b,c)$? Pourquoi ?