

### Exercice 6.

Soit  $p \in ]0, 1[$ . On effectue une suite de tirages successifs avec remise dans une urne contenant des jetons de 2 types : des jetons portant le numéro 1 en proportion  $p$  et des jetons portant le numéro 0 en proportion  $q = 1 - p$ . On désigne par série une suite de numéros identiques. Soit  $X$  la longueur de la première "série" et  $Y$  la longueur de la deuxième "série". Ainsi, par exemple :

- pour la suite de tirages 111001011 ..., on a :  $X = 3$  et  $Y = 2$ ,

- pour 01101 ..., on a :  $X = 1$  et  $Y = 2$ .

1. a. Pour tout  $i \in \mathbb{N}^*$ , on définit l'évènement :

$A_i = \text{"le } i^{\text{ème}} \text{ jeton tiré porte le numéro 1"}$ .

Soit  $k \in \mathbb{N}^*$ . Exprimer l'évènement  $\{X = k\}$  en fonction des évènements  $A_i$ . En déduire la loi de  $X$ .

b. Calculer l'espérance de  $X$ .

2. Montrer que pour tout  $(i, j) \in (\mathbb{N}^*)^2$ ,  $P[\{X = i\} \cap \{Y = j\}] = p^{i+1}q^j + q^{i+1}p^j$ .

3. En utilisant la question 2.,

a. Montrer que :  $P[X = Y] = \frac{pq}{1 - pq}$ .

b. Déterminer la loi de la variable  $Y$ .

4. On suppose ici que  $p = 1/2$ . Dans ce cas,  $X$  et  $Y$  sont de même loi avec :  $\forall i \in \mathbb{N}^*$ ,  $P[X = i] = (1/2)^i$ .

a. Montrer que les variables  $X$  et  $Y$  sont indépendantes.

b. Donner  $P[X = Y]$ . En déduire que :  $P[X < Y] = P[X > Y] = 1/3$ .