Exercice 1 : $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = 0\}$

1) Soit $(\mathbb{R}, f)$ qui paramétrise A et de support D.
Considérons que $(J, g : J \to \mathbb{R}^2)$

- Supposons $(\mathbb{R}, f) \sim (J, g)$:

Alors par définition, il existe un C^k-difféomorphisme φ tel que :
$f = g \circ \varphi$

Comme $g : J \to \mathbb{R}^2$, on peut écrire $g = (g_1, g_2) \left| \begin{array}{l} g_1 : J \to \mathbb{R} \\ g_2 : J \to \mathbb{R} \end{array} \right.$

$\Rightarrow f(t) = (g \circ \varphi)(t) \Leftrightarrow (t, 0) = \left(g_1(\varphi(t)) ; g_2(\varphi(t))\right)$

Alors on déduit que $\begin{array}{l} g_2 : J \to \mathbb{R} \\ \quad t \mapsto 0 \end{array}$ et que $g_1(\varphi(t)) = t$

Soit $g_1 \circ \varphi = Id$; Or comme φ un C^k-difféomorphisme, φ^{-1} existe et $g_1 = \varphi^{-1}$. Alors g_1 est également un <u>C^k-difféomorphisme</u>.

- <u>Considérons désormais (J, g) un paramétrage régulier de A.</u>

On cherche à montrer qu'il existe un C^k-difféomorphisme φ tel que $f = g \circ \varphi$. Montrons que $\varphi = g_1^{-1}$ convient :
g est un C^k-difféomorphisme par définition, il en est de même pour g_1, alors $\varphi = g_1^{-1}$ existe ; φ est <u>bien bijectif</u>.

<u>Montrons que φ est C^k :</u>

g est régulier, alors $\forall t \in J$, $g'(t) \neq (0,0) \Leftrightarrow \forall t \in J$, $g_1'(t) \neq 0$

<u>Théorème</u> : Si une fonction réelle de la variable réelle est bijective et a une dérivé ne s'annulant pas, alors si elle est C^k il en est de même de la réciproque.

On applique ce théorème à g_1. Donc φ est C^k, donc φ un C^k-difféomorphisme. Donc $\varphi = g_1^{-1}$ convient

Vérifions $g \circ f = f$ avec $f = g_1^{-1}$ et $g = (g_1 ; g_2 : t \mapsto 0)$

$g \circ f = g \circ g_1^{-1} = (g_1 \circ g_1^{-1} ; 0) = (Id ; 0) = f$

$f = g_1^{-1}$ fonctionne