Exercice 1 : $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = 0\}$

On considère l'arc géométrique A paramétré par $(\mathbb{R}, f(t) = (t,0))$ de support D

1) Montrons que c'est le seul arc géométrique régulier de support D.

Considérons $(J, g : J \to \mathbb{R}^2)$, montrons que $(\mathbb{R}, f)$ et (J, g) sont C^k-équivalents ; (ie.) $\exists \varphi : \mathbb{R} \to J$ tq $f = g \circ \varphi$ avec φ un C^k-difféomorphisme.

$g : J \to \mathbb{R}^2$, alors $g = (g_1 ; g_2)$ avec $g_1 : J \to \mathbb{R}$
$g_2 : J \to \mathbb{R}$

$f(t) = (g \circ \varphi)(t) \iff (t,0) = (g_1(\varphi(t)) ; g_2(\varphi(t)))$

Alors $g_2 : J \to \mathbb{R}$, $t \mapsto 0$; De plus $t = (g_1 \circ \varphi)(t) \iff Id = g_1 \circ \varphi$
$\iff \varphi = g_1^{-1}$

Il reste a montrer que φ est toujour un C^k-difféomorphisme

- φ est bien bijective : $Id = g_1 \circ \varphi$
- g est de classe C^k (voir définition arc paramétré) donc il en est de même pour g_1

Or comme g est régulier, $g_1'(J) \neq 0$ par théorème des fonctions réciproques φ est également de classe C^k.

Alors φ est bien un C^k-difféomorphisme ; donc $(\mathbb{R}, f) \sim (J, g)$.

Ce qui prouve l'unicité de A.