Exercice 1 : $D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid y=0\}$

Considérons A un arc géométrique de support D et de paramétrage $(\mathbb{R}, f: t \longmapsto (0,t))$.

1) Montrons que A est le seul arc géométrique régulier de support D (i.e.) $\forall t\in\mathbb{R},\ f'(t)\neq 0$

Supposons $(J, g: J \longrightarrow \mathbb{R}^2)$ est régulier et de support D, avec $J\subset\mathbb{R}$.

$g(J)=D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid y=0\}$, De plus $\forall t\in J,\ g'(t)\neq 0$

On cherche $\varphi:\mathbb{R}\longrightarrow J$ tq $f=g\circ\varphi$ avec φ C^k-difféomorphisme

Supposons que ce φ existe ; alors soit $t\in\mathbb{R}$, $\exists s\in J$ tq $\varphi(t)=s$ de sorte que $f(t)=g(s)$

$$\Rightarrow f'(t)=g'(s)=(g\circ\varphi)'(t)=g'(\varphi(t))\,\varphi'(t)$$
$$=g'(s)\,\varphi'(t)$$

$\Rightarrow g'(s)=g'(s)\,\varphi'(t)$ or comme g est régulier, $\varphi'(t)=1$

Donc toutes applications φ de la forme $\varphi: t\longmapsto t+\underbrace{a}_{\in\mathbb{R}}$ fonctionnent

$\Rightarrow (\mathbb{R},f)$ et (J,g) sont bien dans le même arc géométrique

D'où l'unicité de A.