

On considère la droite $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | y = 0\}$. On peut voir D comme le support de l'arc géométrique A dont un paramétrage est $(\mathbb{R}, f)$ avec $f(t) = (t, 0)$ ou comme le support de l'arc géométrique B dont un paramétrage est $(\mathbb{R}, g)$ avec $g(t) = (t^3, 0)$. Ces deux arcs sont différents car seul A est régulier.

1. Montrer que A est le seul arc géométrique régulier dont le support est D .
2. En déduire qu'il n'existe qu'un seul arc géométrique régulier dont le support est $\varphi(D)$, où φ est un difféomorphisme (lisse) de $\mathbb{R}^2$.
3. Soit $\theta \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et pour tout $1 \leq k \leq n$, on a

$$(\theta^n(t))^{(k)} = \frac{n!}{(n-k)!} \theta'(t)^k \theta^{n-k}(t) + \sum_{i=1}^{k-1} \theta^{n-i}(t) \cdot \varphi_{k,i}(t) \quad \text{avec } \varphi_{k,i} \in \mathcal{C}^\infty.$$

4. En déduire l'existence d'une infinité d'arcs géométriques distincts (non réguliers!) de support D [on pourra considérer $\gamma_n(t) = (t^{2n+1}, 0)$ pour $n \in \mathbb{N}$].