Exercice 8 :

1) R : "on tire deux boules rouges"

U_k : "On choisit l'urne k" $k \in [\![1, n]\!]$

Les U_k forment un système complet d'évènements :

$$P(R) = P(R \cap U_1) + P(R \cap U_2) + \dots + P(R \cap U_n)$$

$$= P(R|U_1) \times P(U_1) + \dots + P(R|U_n) \times P(U_n)$$

$\forall k \in [\![0, n]\!]$; $P(U_k) = \frac{1}{n}$

$$\Rightarrow P(R) = \frac{1}{n} \times \left[P(R|U_1) + P(R|U_2) + \dots + P(R|U_n) \right]$$

$$P(R|U_1) = \left(\frac{1}{n}\right)^2 ; P(R|U_2) = \left(\frac{2}{n}\right)^2 ; \dots ; P(R|U_n) = 1$$

Alors : $P(R) = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{2} \left(\frac{k}{n}\right)^2 = \frac{1}{n^3} \sum_{k=0}^{2} k^2 = \frac{1}{n^3} \left[\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \right]$

$$\Rightarrow P(R) = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6n^2}$$