

Alors $P(A^c) = \sum_{k=2}^n \frac{1}{n} - \sum_{1 \leq i < j \leq n} \frac{1}{n(n-1)} + \sum_{1 \leq i < j < k \leq n} \frac{1}{n(n-1)(n-2)} - \dots + (-1)^{n-1} \times \frac{1}{n!}$

Si on applique la formule de Poincaré simplifiée à A^c :

$$P(M_1 \cup M_2 \cup \dots \cup M_n) = \sum_{k=2}^n (-1)^{k-2} \binom{n}{k} P(M_1 \cap M_2 \cap \dots \cap M_k)$$

$$= \sum_{k=2}^n (-1)^{k-2} \frac{n!}{k!(n-k)!} \times \frac{1}{n \times (n-1) \times \dots \times (n-k+1)}$$

$$= \sum_{k=2}^n (-1)^{k-2} \frac{(n-k)!}{k!(n-k)!} = \sum_{k=2}^n \frac{(-1)^{k-2}}{k!}$$

$$e^x = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^k}{k!}$$

le terme de rang 0 est -1

$$\Rightarrow \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k-2}}{k!} = \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^{k-2}}{k!} - (-1)$$

$$= 1 + \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^{k-1}}{k!}$$

Alors $n \rightarrow +\infty$:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k!} = 1 + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k!} = 1 - \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!} = 1 - e^{-1}$$