

## Chapitre 5

# Suites arithmétiques et suites géométriques

### I/ Généralités sur les suites

#### Définition



On appelle suite réelle toute application d'une partie non vide de  $\mathbb{N}$  dans  $\mathbb{R}$ .



#### Notations et vocabulaire

Soit  $I$  une partie non vide de  $\mathbb{N}$ . Désignons par  $u$  la suite réelle définie sur  $I$ .

- Soit  $n$  un élément de  $I$ .  $u(n)$ , l'image de  $n$  par  $u$ , est aussi noté  $u_n$  (c'est l'écriture indicielle)  $u_n$  est le terme d'indice  $n$  de la suite  $u$ .
- Désignons par  $n_0$  le plus petit élément de  $I$ . Le réel  $u_{n_0}$  est dit le premier terme de la suite  $u$ .
- La suite  $u$  est aussi notée  $(u_n)_{n \in I}$ .
- $u_n$  est le terme général de la suite  $u$ .
- Soit  $n \in I$ . les réels  $u_{n+1}$  et  $u_n$  sont deux termes consécutifs de la suite  $(u_n)_{n \in I}$ .

#### Exercice 1

Soit  $v : \mathbb{N}^* \rightarrow \mathbb{R}; n \mapsto \frac{n-5}{n^2+n}$

1/ Déterminer les deux premiers termes de la suite  $v$ .

2/ Déterminer l'entier  $n$  tel que  $v_n = \frac{-1}{20}$ .

3/ Exprimer  $v_{n+1}$  puis  $v_{2n}$  en fonction de  $n$ .

#### Exercice 2

Soit la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  définie par :  $u_2 = -5$  et pour tout  $n$  de  $\mathbb{N}$ ;  $u_{n+1} = -2u_n$

1/ Calculer  $u_3$  et  $u_0$ .

2/ Exprimer  $u_{n+2}$  en fonction de  $u_n$  avec  $n$  un entier naturel.

### Exercice 3

On considère la suite  $(S_n)_{n \geq 2}$  définie par  $S_n = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n-1}$ .

- 1/ Calculer  $S_6$ .
- 2/ Déterminer le premier terme de la suite  $(S_n)_{n \geq 2}$ .
- 3/ Pour un  $n$  de  $\mathbb{N}^* \setminus \{1\}$ ; exprimer  $S_{n+1} - S_n$  en fonction de  $n$ .

## II/ Suite arithmétique

### 1/ Définition d'une suite arithmétique

#### Définition



Soient  $n_0 \in \mathbb{N}$ ;  $I = \{n \in \mathbb{N} \text{ tel que } n \geq n_0\}$ ;  $r$  est un réel non nul et  $(u_n)_{n \in I}$  une suite réelle. On a par définition:

$(u_n)_{n \in I}$  une suite **arithmétique** de raison  $r$   
si et seulement si

Pour tout  $n \in I$ ;  $u_{n+1} - u_n = r$



### Exercice 4

Soit la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  définie par :  $u_n = -5n + 7$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$

Montrer que  $(u_n)$  est une suite arithmétique dont on précisera la raison  $r$ .

### Exercice 5

Soit la suite  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$  définie par :  $v_n = n^2 + 3n - 2007$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$

$(v_n)$  est elle une suite arithmétique ? Justifier votre réponse

### Exercice 6

Soit la suite arithmétique  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  telle que  $u_3 = 10$  et  $u_4 = 7$ .

1/ Déterminer la raison  $r$  de  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ .

2/ Calculer  $u_5$  et  $u_0$ .

### 2/ Relation entre trois termes consécutifs d'une suite arithmétique

#### Théorème 1



Soient  $a$ ,  $b$  et  $c$  sont trois réels. On a :

## Cours : Suites arithmétiques et géométriques

a, b et c sont trois termes consécutifs d'une suite arithmétique

si et seulement si  $(\Leftrightarrow)$

$$a + c = 2b$$

### Exercice 7

Pour tout réel x on considère les réels  $A=3x^2 - 5$  ;  $B=-x - \frac{7}{2}$  et  $C=-x^2 + 3x$

Déterminer x pour que A, B et C soient trois termes consécutifs d'une suite arithmétique.

### Exercice 8

Soit  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$  la suite réelle telle que :  $v_0 = 1$  et  $\forall n \in \mathbb{N}, v_{n+1} = \frac{1-2n}{-1-2n} v_n$

1/ Calculer  $v_1$  et  $v_2$ .

2/ Justifier que  $(v_n)$  n'est pas une suite arithmétique.

### 3/ Terme général d'une suite arithmétique

#### Théorème 2

Soient  $n_0 \in \mathbb{N}$ ;  $I = \{n \in \mathbb{N} \text{ tel que } n \geq n_0\}$ ; r est un réel non nul et  $(u_n)_{n \in I}$  une suite réelle. On a :

$(u_n)_{n \in I}$  une suite arithmétique de raison r

si et seulement si

$$\forall n \in I; u_n = u_{n_0} + (n - n_0)r$$

#### Remarque

quand  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est une suite arithmétique de raison un réel r

on a :  $\forall n \in \mathbb{N}; u_n = u_0 + nr$

### Exercice 9

Soit  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite arithmétique telle que  $u_0 = 3$  et  $u_8 = -27$ .

Exprimer  $u_n$  en fonction de n.

### Exercice 10

u est une suite arithmétique de raison r et de premier terme  $u_0$ .

On sait que  $u_1 + u_2 + u_3 = 3$  et  $u_5 = -5$ .

## Cours : Suites arithmétiques et géométriques

1/ Montrer que  $u_1 + u_2 + u_3 = 3u_0 + 6r$ .

2/ Déterminer enfin  $u_0$  et  $r$ .

### 4/ Somme des termes consécutifs d'une suite arithmétique

#### **Théorème 3**

$(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite arithmétique de raison  $r$ .

1)  $u_0 + u_1 + u_2 + \dots + u_n = (n+1) \frac{u_0 + u_n}{2}$

2)  $p$  et  $n$  sont deux entiers naturels tels que  $p \leq n$ .

$$u_p + u_{p+1} + u_{p+2} + \dots + u_n = (n-p+1) \frac{u_p + u_n}{2}$$

#### **Exercice 11**

Soit  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite arithmétique de raison  $r = -2$  et  $u_0 = 3$ .

Calculer les sommes suivantes:

$$S = u_0 + u_1 + u_2 + \dots + u_{27} \quad S' = u_{10} + u_{11} + u_{12} + \dots + u_{35}$$

#### **Exercice 12**

Soit  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite arithmétique de raison  $r$ .

Pour  $n \in \mathbb{N}$  on pose  $S_n = u_0 + u_1 + u_2 + \dots + u_n$

1/ Déterminer  $u_n$  et  $S_n$  sachant que  $r = -3$ ;  $u_0 = -13$  et  $n = 15$ .

2/ Déterminer  $u_0$  et  $r$  sachant que  $S_n = 100$ ,  $n = 35$  et  $u_n = 28$ .

3/ Déterminer  $u_0$  et  $u_n$  sachant que  $S_n = 56$ ;  $r = -3$  et  $n = 9$ .

#### **Théorème 4**

$$\forall n \in \mathbb{N}^*; 1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

#### **Exercice 13**

Sans calculer les valeurs exactes des deux nombres suivants, dire lequel est le plus grand ?

$$A = 2007(1 + 2 + 3 + \dots + 2006)$$

$$B = 2006(1 + 2 + 3 + \dots + 2007)$$

Cours : Suites arithmétiques et géométriques

**Exercice 14**

Soit la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  définie par  $u_n = \frac{n}{n^2 + 5}$  pour tout  $n$  de  $\mathbb{N}$

1/ Justifier que pour tout  $k \in \mathbb{N}^*$ ;  $u_k < k$

2/ Dédurre en procédant par itération que pour tout  $n$  de  $\mathbb{N}^*$  on a :

$$u_1 + u_2 + u_3 + \dots + u_n < \frac{n^2 + n}{2}.$$

**III/ Suite géométrique**

**1/ Définition d'une suite géométrique**

**Définition**

Soient  $n_0 \in \mathbb{N}$ ;  $I = \{n \in \mathbb{N} \text{ tel que } n \geq n_0\}$ ;  $q$  est un réel non nul  
 $(u_n)_{n \in I}$  une suite géométrique de raison  $q$   
si et seulement si  
Pour tout  $n \in I$ ;  $u_{n+1} = qu_n$

**Exercice 15**

Soit  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite géométrique de raison négatif  $q$  telle que  $u_3 = -7$   
et  $u_5 = -112$ .

1/ Déterminer la valeur de  $q$ .

2/ Calculer  $u_2$ .

**Exercice 16**

Soit la suite  $(t_n)_{n \in \mathbb{N}}$  définie par  $\forall n \in \mathbb{N}; t_n = \frac{-5}{7^{n-2}}$ .

Montrer que  $(t_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est une suite géométrique dont on précisera la raison et le premier terme  $t_0$ .

**Exercice 17**

Soit  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  la suite définie par 
$$\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = \frac{2u_n + 1}{u_n + 2}; \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

1/a- Calculer  $u_1$  puis  $u_2$ .

b- Prouver que  $(u_n)$  n'est pas géométrique.

2/ Soit la suite  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$  définie sur  $\mathbb{N}$  par  $v_n = \frac{u_n - 1}{u_n + 1}; \forall n \in \mathbb{N}$ .

Cours : Suites arithmétiques et géométriques

Montrer que  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est une suite géométrique dont on précisera la raison et le premier terme  $v_0$ .

2/ Relation entre trois termes consécutifs d'une suite géométrique

**Théorème 5**

Soient A, B et C sont trois réels.

A, B et C sont trois termes consécutifs d'une suite géométrique si et seulement si

$$A \times C = B^2$$

**Exercice 18** (c'est le début de l'exercice 17)

Soit la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  définie par 
$$\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = \frac{2u_n + 1}{u_n + 2}; \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

1/ Calculer  $u_1$  puis  $u_2$ .

2/ Montrer, à l'aide du théorème 5, que  $(u_n)$  n'est pas géométrique.

**Exercice 19**

Pour tout réel x on considère les réels  $A=2x-1$ ;  $B=\sqrt{x^2+7}$  et  $C=x+\frac{5}{7}$

Déterminer x pour que A, B et C soient trois termes consécutifs d'une suite géométrique.

3/ Terme général d'une suite géométrique

**Théorème 6**

Soient  $n_0 \in \mathbb{N}$ ;  $I = \{n \in \mathbb{N} \text{ tel que } n \geq n_0\}$ ; q est un réel non nul

$(u_n)_{n \in I}$  une suite géométrique de raison q

si et seulement si

$$\forall n \in I; u_n = u_{n_0} \times q^{n-n_0}.$$

**Remarque**

## Cours : Suites arithmétiques et géométriques

quand  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est une suite géométrique de raison un réel  $q$   
on a :  $\forall n \in \mathbb{N}; u_n = u_0 \times q^n$ .

### Exercice 20 (c'est l'exercice 16)

Soit la suite  $(t_n)_{n \in \mathbb{N}}$  définie par  $\forall n \in \mathbb{N}; t_n = \frac{-5}{7^{n-2}}$ .

A l'aide du théorème précédent montrer que  $(t_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est une suite géométrique dont on précisera la raison et le premier terme  $t_0$ .

### Exercice 21

Soient les suites réelles  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  et  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$  définies par :

$$\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = 3u_n - 5; \forall n \in \mathbb{N} \end{cases} \quad \text{et } v_n = u_n - \frac{5}{2}; \forall n \in \mathbb{N}$$

- 1/ Prouver que  $(v_n)$  est une suite géométrique dont précisera la raison.
- 2/ Exprimer donc  $v_n$  puis  $u_n$  en fonction de  $n$ .

### 4/ Somme des termes consécutifs d'une suite géométrique

#### **Théorème 7**

$(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite géométrique de raison  $q \neq 1$ .

Soit  $n$  un entier naturel non nul.

- $u_0 + u_1 + u_2 + \dots + u_n = u_0 \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$ .
- $p$  et  $n$  sont deux entiers naturels tels que  $p \leq n$ .  
 $u_p + u_{p+1} + u_{p+2} + \dots + u_n = u_p \frac{1 - q^{n-p+1}}{1 - q}$

### Exercice 22

Soit  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite géométrique telle que  $u_1 = -3$  et  $u_2 = 6$ .

- 1/ Calculer  $S$  la somme des 5 premiers termes de  $(u_n)$ .
- 2/ Calculer  $S' = u_3 + u_4 + u_5 + \dots + u_{10}$ .

### Exercice 23

Soit  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite réelle définie par :  $u_0 = 0$  et  $u_{n+1} = \sqrt{1 + \frac{1}{3}u_n^2}$  ;  $\forall n \in \mathbb{N}$

## Cours : Suites arithmétiques et géométriques

Soit la suite  $(v_n)$  définie sur  $\mathbb{N}$  par  $v_n = u_n^2 - \frac{3}{2}$

1/ Montrer que  $(v_n)$  soit géométrique dont on précisera la raison.

2/ Pour  $n$  de  $\mathbb{N}$  on pose:  $S_n = v_0 + v_1 + v_3 + \dots + v_n$

et  $S'_n = (u_0)^2 + (u_1)^2 + (u_3)^2 + \dots + (u_n)^2$ .

Exprimer  $S_n$  puis  $S'_n$  en fonction de  $n$ .

### Théorème 8

Soit  $q$  un réel différent de 1.

Pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ ;  $1 + q + q^2 + \dots + q^{n-1} = \frac{1 - q^n}{1 - q}$ .

### Exercice 24

On pose les polynômes suivants:

$$P(x) = 1 + x + x^2 + \dots + x^{19}; \forall x \in \mathbb{R}$$

$$Q(x) = x + x^3 + x^5 + x^7 + \dots + x^{19}; \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{-1; 1\}.$$

1/ Calculer  $P(1)$  et  $P(\sqrt{2})$ .

2/ Donner une expression simple de  $P(x)$  pour  $x \neq 1$

3/ Montrer que  $Q(x) = \frac{x - x^{21}}{1 - x^2}$ .

### Exercice 25

On considère la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  définie par:  $u_0 = 0$  et pour tout  $n$  de  $\mathbb{N}$

$$u_{n+1} = u_n + \frac{1}{2^n}.$$

Prouver que  $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = 2\left(1 - \frac{1}{2^{n+1}}\right)$  (on pourra procéder par itération)

## une correction des exercices du cours

### Réponse de l'exercice 1

1/  $v$  est définie sur  $\mathbb{N}^*$  donc les deux premiers termes de  $v$  sont  $v_1$  et  $v_2$

$$v_1 = \frac{1-5}{1^2+1} = \frac{-4}{2} = -2. \quad v_2 = \frac{2-5}{2^2+2} = \frac{-3}{6} = \frac{-1}{2}.$$

$$\begin{aligned} 2/ v_n &= \frac{-1}{20} \Leftrightarrow \frac{n-5}{n^2+n} = \frac{-1}{20} \Leftrightarrow 20(n-5) = -n^2 - n \\ &\Leftrightarrow n^2 + 21n - 100 = 0 \end{aligned}$$

### Cours : Suites arithmétiques et géométriques

$$\begin{aligned}(\Delta = 21^2 - 4 \times (-100) = 841 = 29^2) \\ \Leftrightarrow n = \frac{-21-29}{2} \quad \text{ou} \quad n = \frac{-21+29}{2} \\ \Leftrightarrow n = -25 \quad \text{ou} \quad n = 4 \\ \Leftrightarrow n = 4 \quad (\text{la solution } n = -25 \text{ est rejetée car } -25 \notin \mathbb{N}^*)\end{aligned}$$

3/ Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ ;

$$v_{n+1} = \frac{(n+1) - 5}{(n+1)^2 + (n+1)} = \frac{n-4}{n^2 + 3n + 2}.$$

$$v_{2n} = \frac{(2n) - 5}{(2n)^2 + (2n)} = \frac{2n-5}{4n^2 + 2n}.$$

### Réponse de l'exercice 2

1/ •  $u_3 = -2 u_2$  d'après la relation entre deux termes consécutifs de cette suite  
 $= -2(-5) = 10.$

• Soit  $n \in \mathbb{N}$ ;

$$u_{n+1} = -2 u_n \Leftrightarrow u_n = -\frac{1}{2} u_{n+1}$$

$$\text{par suite } u_0 = -\frac{1}{2} u_1 = -\frac{1}{2} \left[ -\frac{1}{2} u_2 \right] = -\frac{1}{2} \left[ -\frac{1}{2}(-5) \right] = \frac{-5}{4}.$$

2/ Soit  $n \in \mathbb{N}$ ;  $u_{n+2} = -2 u_{n+1}$  car  $u_{n+2}$  et  $u_{n+1}$  sont deux termes consécutifs.  
 $= -2(-2 \times u_n)$   
 $= 4 u_n.$

### Réponse de l'exercice 3

1/  $S_6$  est la somme des fractions dont le premier  $\frac{1}{1}$  et le dernier  $\frac{1}{6-1} = \frac{1}{5}$ .

$$\text{d'où } S_6 = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} = \frac{137}{60}.$$

2/ La suite  $(S_n)_{n \geq 2}$  est définie pour les entiers naturels  $n \geq 2$

$$\text{donc le premier terme est } S_2 = \frac{1}{1} = 1 \quad \text{car } S_6 \text{ est la somme des}$$

$$\text{fractions dont le premier } \frac{1}{1} \text{ et le dernier } \frac{1}{2-1} = \frac{1}{1}.$$

3/ Soit  $n$  de  $\mathbb{N}^* \setminus \{1\}$ ;

$$\begin{aligned}S_{n+1} - S_n &= \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n-1} + \frac{1}{(n+1)-1} - \left( \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n-1} \right) \\ &= \frac{1}{n} \quad \text{après simplification.}\end{aligned}$$

### Réponse de l'exercice 4

$$\forall n \in \mathbb{N}; u_{n+1} - u_n = -5(n+1) + 7 - [-5n + 7]$$

$$= -5n - 5 + 7 + 5n - 7$$

$$= -5 \quad \text{c'est une constante réelle}$$

$$\Rightarrow (u_n) \text{ est une suite arithmétique de raison } r = -5.$$

### Réponse de l'exercice 5

$$\begin{aligned}\forall n \in \mathbb{N}; v_{n+1} - v_n &= (n+1)^2 + 3(n+1) - 2007 - (n^2 + 3n - 2007) \\ &= n^2 + 2n + 1 + 3n + 3 - 2007 - n^2 - 3n + 2007 \\ &= 2n + 4 \quad \text{c'est une quantité variable qui dépend de } n \\ \Rightarrow (v_n) &\text{ n'est pas une suite arithmétique.}\end{aligned}$$

### Réponse de l'exercice 6

$$1/ r = u_4 - u_3 \quad \text{car } (u_n) \text{ est arithmétique} \\ = 7 - 10 = -3.$$

$$2/ u_5 = u_4 + r = 7 + (-3) = 4$$

$$u_0 = u_1 - r = u_2 - r - r = u_3 - r - 2r = 10 - 3r = 10 - 3(-3) = 16$$

### Réponse de l'exercice 7

A, B et C sont trois termes consécutifs d'une suite arithmétique.

$$\begin{aligned}\stackrel{\text{th}}{\Leftrightarrow} A + C &= 2B \Leftrightarrow 3x^2 - 5 + (-x^2 + 3x) = 2\left(-x - \frac{7}{2}\right) \\ \Leftrightarrow 2x^2 + 5x - 3 &= 0 \\ (\Delta &= 5^2 - 4 \times 2 \times (-3) = 49 = 7^2) \\ \Leftrightarrow x &= \frac{-5-7}{4} \quad \text{ou} \quad x = \frac{-5+7}{4} \\ \Leftrightarrow x &= -3 \quad \text{ou} \quad x = \frac{1}{2}.\end{aligned}$$

### Réponse de l'exercice 8

$$1/ v_1 = \frac{1-2 \times 0}{-1-2 \times 0} v_0 = -1 \quad ; \quad v_2 = \frac{1-2 \times 1}{-1-2 \times 1} v_1 = \frac{-1}{-3}(-1) = \frac{-1}{3}.$$

$$2/ v_0 + v_2 = 1 + \frac{-1}{3} = \frac{2}{3} \quad \text{et} \quad 2v_1 = -2$$

$$\text{donc } v_0 + v_2 \neq 2v_1$$

par suite  $(v_n)$  n'est pas une suite arithmétique.

### Réponse de l'exercice 9

$(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est une suite arithmétique telle que  $u_0 = 5$

$$\stackrel{\text{th}}{\Rightarrow} \forall n \in \mathbb{N}; u_n = u_0 + nr \quad \text{avec } r \text{ la raison de } (u_n).$$

$$\text{Or } u_8 = u_0 + 8r \Leftrightarrow r = \frac{u_8 - u_0}{8} = \frac{-27 - 5}{8} = -5$$

$$\text{Par suite } \forall n \in \mathbb{N}; u_n = 5 - 5n$$

### Réponse de l'exercice 10

$$1/ u_1 + u_2 + u_3 = (u_0 + r) + (u_0 + 2r) + (u_0 + 3r) = 3u_0 + 6r.$$

Cours : Suites arithmétiques et géométriques

$$2/ \begin{cases} u_5 = -5 \\ u_1 + u_2 + u_3 = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_0 + 5r = -5 \\ 3u_0 + 6r = 3 \end{cases} \begin{array}{l} \text{d'après théo.} \\ \text{d'après 1/} \end{array}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} u_0 = -5 - 5r \\ 3(-5 - 5r) + 6r = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_0 = -5 - 5r \\ -9r = 18 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_0 = 5 \\ r = -2 \end{cases}$$

**Réponse de l'exercice 11**

D'après le théorème 3 on a :

$$S = u_0 + u_1 + u_2 + \dots + u_{27} = (27 + 1) \frac{u_0 + u_{27}}{2} = 28 \frac{3 + 3 + 27(-2)}{2} = -672.$$

$$S' = u_{10} + u_{11} + u_{12} + \dots + u_{35} = (35 - 10 + 1) \frac{u_{10} + u_{35}}{2}$$

$$= 11 \frac{3 + 10(-2) + 3 + 35(-2)}{2} = -462$$

**Réponse de l'exercice 12**

$$1/ u_n = u_0 + nr = -13 + 15(-3) = -58$$

$$S_n = (n + 1) \frac{u_0 + u_n}{2} = (15 + 1) \frac{-13 - 58}{2} = -568.$$

$$2/ S_n = (n + 1) \frac{u_0 + u_n}{2} \Leftrightarrow u_0 = \frac{2S_n}{n + 1} - u_n = \frac{2 \times 100}{35 + 1} - 28 = -\frac{202}{9}$$

$$u_n = u_0 + nr \Leftrightarrow r = \frac{u_n - u_0}{n} \Leftrightarrow r = \frac{28 - \left(-\frac{202}{9}\right)}{35} = \frac{454}{315}$$

$$3/ \begin{cases} S_n = (n + 1) \frac{u_0 + u_n}{2} \\ u_n = u_0 + nr \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_0 + u_n = \frac{2S_n}{n + 1} \\ u_n - u_0 = nr \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2u_0 = \frac{2S_n}{n + 1} - nr \\ 2u_n = \frac{2S_n}{n + 1} + nr \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_0 = \frac{S_n}{n + 1} - \frac{nr}{2} \\ u_n = \frac{S_n}{n + 1} + \frac{nr}{2} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} u_0 = \frac{56}{10} - \frac{9(-3)}{2} = \frac{191}{10} \\ u_n = \frac{56}{10} + \frac{9(-3)}{2} = -\frac{79}{10} \end{cases}$$

**Réponse de l'exercice 13**

D'après le théorème 4 on peut dire que:

$$A = 2007 (1 + 2 + 3 + \dots + 2006) = 2007 \frac{2006 \times (2006 + 1)}{2} = \frac{2006 \times 2007^2}{2}$$

$$B = 2006 (1 + 2 + 3 + \dots + 2007) = 2006 \frac{2007 \times (2007 + 1)}{2} = \frac{2006 \times 2007 \times 2008}{2}$$

D'où  $A < B$ .

### Réponse de l'exercice 14

$$\begin{aligned} 1/ \text{ Soit } k \in \mathbb{N}; u_k - k &= \frac{k}{k^2 + 5} - k = k \left( \frac{1}{k^2 + 5} - 1 \right) \\ &= k \frac{1 - k^2 - 5}{k^2 + 5} = k \frac{-k^2 - 4}{k^2 + 5} < 0 \quad \text{car } k \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

D'où  $u_k < k$ .

2/ Soit  $n$  un élément de  $\mathbb{N}^*$

Donc d'après la question précédente on peut dire que pour tout  $k \in \{1, 2, 3, \dots, n\}$ ;  $u_k < k$  alors on a:

$$\left. \begin{array}{l} u_1 < 1 \\ u_2 < 2 \\ u_3 < 3 \\ \dots\dots\dots \\ \dots\dots\dots \\ u_n < n \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{aligned} &u_1 + u_2 + u_3 + \dots + u_n < 1 + 2 + 3 + \dots + n \\ &\Leftrightarrow u_1 + u_2 + u_3 + \dots + u_n < \frac{n(n+1)}{2} \\ &\Leftrightarrow u_1 + u_2 + u_3 + \dots + u_n < \frac{n^2 + n}{2} \end{aligned}$$

### Réponse de l'exercice 15

$$1/ u_5 = q \times u_4 = q [q \times u_3] = q^2 u_3$$

$$\text{D'où } q^2 = \frac{u_5}{u_3} = \frac{-112}{-7} = 16$$

$$\text{alors } q = -\sqrt{16} = -4 \quad \text{car par hypothèse } q \text{ est négatif}$$

$$2/ u_3 = q \times u_2 \Leftrightarrow u_2 = \frac{1}{q} u_3 \Leftrightarrow u_2 = \frac{1}{-4} (-7) = \frac{7}{4}$$

### Réponse de l'exercice 16

$$\forall n \in \mathbb{N}; t_{n+1} = \frac{-5}{7^{(n+1)-2}} = \frac{-5}{7^{n-2+1}} = \frac{-5}{7^1 \times 7^{n-2}} = \frac{1}{7} \times \frac{-5}{7^{n-2}} = \frac{1}{7} t_n$$

Ainsi  $\forall n \in \mathbb{N}; t_{n+1} = \frac{1}{7} t_n \xRightarrow{\text{déf}} (t_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est une suite géométrique de raison  $q = \frac{1}{7}$  et de premier terme  $t_0 = \frac{-5}{7^{0-2}} = -5 \times 7^2 = -245$ .

### Réponse de l'exercice 17

$$1/a- u_1 = \frac{2u_0+1}{u_0+2} = \frac{2 \times 2+1}{2+2} = \frac{5}{4}; \quad u_2 = \frac{2u_1+1}{u_1+2} = \frac{2 \times \frac{5}{4}+1}{\frac{5}{4}+2} = \frac{17}{13}$$

$$b- \frac{u_1}{u_0} = \frac{\frac{5}{4}}{2} = \frac{5}{8} \quad \text{et} \quad \frac{u_2}{u_1} = \frac{\frac{17}{13}}{\frac{5}{4}} = \frac{68}{65}$$

**Cours : Suites arithmétiques et géométriques**

$$\Rightarrow \frac{u_1}{u_0} \neq \frac{u_2}{u_1} \stackrel{\text{déf}}{\Rightarrow} (u_n) \text{ n'est pas géométrique.}$$

$$2/ \quad \forall n \in \mathbb{N}; v_{n+1} = \frac{u_{n+1} - 1}{u_{n+1} + 1} = \frac{\frac{2u_n + 1}{u_n + 2} - 1}{\frac{2u_n + 1}{u_n + 2} + 1} = \frac{\frac{2u_n + 1 - u_n - 2}{u_n + 2}}{\frac{2u_n + 1 + u_n + 2}{u_n + 2}} = \frac{u_n - 1}{3u_n + 3}$$

$$\Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{N}; v_{n+1} = \frac{u_n - 1}{3u_n + 3} = \frac{1}{3} \frac{u_n - 1}{u_n + 1} = \frac{1}{3} \times v_n$$

donc par définition  $(v_n)$  est une suite géométrique de raison  $\frac{1}{3}$

$$\text{et de premier terme } v_0 = \frac{u_0 - 1}{u_0 + 1} = \frac{2 - 1}{2 + 1} = \frac{1}{3}.$$

**Réponse de l'exercice 18**

$$1/ u_1 = \frac{2u_0 + 1}{u_0 + 2} = \frac{2 \times 2 + 1}{2 + 2} = \frac{5}{4}; \quad u_2 = \frac{2u_1 + 1}{u_1 + 2} = \frac{2 \times \frac{5}{4} + 1}{\frac{5}{4} + 2} = \frac{17}{13}$$

$$2/ \quad u_0 \times u_2 = 2 \times \frac{17}{13} = \frac{34}{13} \quad \text{et} \quad (u_1)^2 = \left(\frac{5}{4}\right)^2 = \frac{25}{16}$$

$$\Rightarrow u_0 \times u_2 \neq (u_1)^2$$

$\stackrel{\text{th}}{\Rightarrow} (u_n)$  n'est pas géométrique.

**Réponse de l'exercice 19**

A, B et C sont trois termes consécutifs d'une suite géométrique.

$$\stackrel{\text{th}}{\Leftrightarrow} A \times C = B^2 \Leftrightarrow (2x - 1) \left(x + \frac{5}{7}\right) = \left(\sqrt{x^2 + 7}\right)^2$$

$$\Leftrightarrow 2x^2 + \left(\frac{10}{7} - 1\right)x - \frac{5}{7} = x^2 + 7$$

$$\Leftrightarrow x^2 + \frac{3}{7}x - \frac{54}{7} = 0$$

$$\Leftrightarrow 7x^2 + 3x - 54 = 0$$

$$(\Delta = 3^2 - 4 \times 7 \times (-54) = 1521 = 39^2)$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{-3 - 39}{14} = -3 \quad \text{ou} \quad x = \frac{-3 + 39}{14} = \frac{18}{7}$$

Enfin : A, B et C sont trois termes consécutifs d'une suite géométrique.

si et seulement si  $x = -3$  ou  $x = \frac{18}{7}$ .

**Réponse de l'exercice 20**

$$\forall n \in \mathbb{N}; t_n = \frac{-5}{7^{n-2}} = \frac{-5}{7^{-2} \times 7^n} = \frac{-5}{7^{-2}} \times \left(\frac{1}{7}\right)^n = t_0 \times q^n \text{ avec } q = \frac{1}{7}$$

Ainsi  $\forall n \in \mathbb{N}; t_n = t_0 \times q^n \stackrel{\text{th}}{\Rightarrow} (t_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est une suite géométrique

de raison  $q = \frac{1}{7}$  et de premier terme  $t_0 = \frac{-5}{7^{-2}}$ .

**Réponse de l'exercice 21**

Cours : Suites arithmétiques et géométriques

$$1/ \forall n \in \mathbb{N}; v_{n+1} = u_{n+1} - \frac{5}{2} = 3u_n - 5 - \frac{5}{2} = 3u_n - \frac{15}{2} = 3\left(u_n - \frac{5}{2}\right)$$

$$\text{Ainsi } \forall n \in \mathbb{N}; v_{n+1} = 3 \times v_n$$

donc  $(v_n)$  est une suite géométrique de raison  $q = 3$ .

$$2/ \bullet (v_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ est géométrique de raison } q = 3 \text{ et } v_0 = u_0 - \frac{5}{2} = -\frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \forall n \in \mathbb{N}; v_n = v_0 \times q^n = -\frac{1}{2} \times 3^n.$$

$$\bullet \forall n \in \mathbb{N}; v_n = u_n - \frac{5}{2} \Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{N}; u_n = v_n + \frac{5}{2}$$

$$\Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{N}; u_n = -\frac{1}{2} \times 3^n + \frac{5}{2}$$

**Réponse de l'exercice 22**

$$1/ (u_n) \text{ est définie sur } \mathbb{N} \text{ donc } S = u_0 + u_1 + u_2 + u_3 + u_4$$

$$= u_0 \frac{1 - q^5}{1 - q} \text{ avec } q \text{ la raison de } (u_n).$$

$$\text{Or } u_1 = -3 \text{ et } u_2 = 6 \text{ alors } q = \frac{u_2}{u_1} = -2$$

$$\text{par suite } u_0 = \frac{u_1}{q} = \frac{-3}{-2} = \frac{3}{2}.$$

$$\text{On a donc } S = u_0 \frac{1 - q^5}{1 - q} = \frac{3}{2} \times \frac{1 - (-2)^5}{1 - (-2)} = \frac{33}{2}.$$

$$2/ S' = u_3 + u_4 + u_5 + \dots + u_{10} = u_3 \frac{1 - q^{10-3+1}}{1 - q} \quad \text{d'après le théo. 7}$$

$$= q \times u_2 \frac{1 - q^8}{1 - q} = (-2) \times 6 \times \frac{1 - (-2)^8}{1 - (-2)} = 1020.$$

**Réponse de l'exercice 23**

$$1/ \forall n \in \mathbb{N}; v_{n+1} = u_{n+1}^2 - \frac{3}{2} = \left(\sqrt{1 + \frac{1}{3}u_n^2}\right)^2 - \frac{3}{2} = \frac{1}{3}u_n^2 + 1 - \frac{3}{2} = \frac{1}{3}u_n^2 - \frac{1}{2}$$

$$\text{D'où } \forall n \in \mathbb{N}; v_{n+1} = \frac{1}{3}\left(u_n^2 - \frac{3}{2}\right) = \frac{1}{3}v_n$$

Donc  $(v_n)$  est géométrique de raison  $q = \frac{1}{3}$ .

2/ Pour  $n$  de  $\mathbb{N}$  ;

$$\bullet S_n = v_0 + v_1 + v_2 + \dots + v_n = v_0 \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q} \quad \text{d'après le théorème 7}$$

$$= \left(\underbrace{u_0^2}_0 - \frac{3}{2}\right) \frac{1 - \left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}}{1 - \frac{1}{3}} = -\frac{9}{4} \left[1 - \left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}\right]$$

$$\bullet \text{ Pour tout } k \in \mathbb{N} \text{ on a par hypothèse } v_k = u_k^2 - \frac{3}{2}$$

$$\Leftrightarrow u_k^2 = v_k + \frac{3}{2}.$$

$$\text{Ainsi } S'_n = (u_0)^2 + (u_1)^2 + (u_2)^2 + \dots + (u_n)^2$$

Cours : Suites arithmétiques et géométriques

$$\begin{aligned}
 &= \left(v_0 + \frac{3}{2}\right) + \left(v_1 + \frac{3}{2}\right) + \left(v_2 + \frac{3}{2}\right) + \dots + \left(v_n + \frac{3}{2}\right) \\
 &= v_0 + v_1 + v_2 + \dots + v_n + (n+1)\frac{3}{2}. \\
 &= -\frac{9}{4} \left[ 1 - \left(\frac{1}{3}\right)^{n+1} \right] + (n+1)\frac{3}{2}.
 \end{aligned}$$

**Réponse de l'exercice 24**

1/ •  $P(1) = 1 + 1 + 1^2 + \dots + 1^{19} = 20.$

•  $P(\sqrt{2}) = 1 + \sqrt{2} + \sqrt{2}^2 + \dots + \sqrt{2}^{19} = \frac{1 - \sqrt{2}^{20}}{1 - \sqrt{2}}$   
 $= -\frac{1023}{1 - \sqrt{2}}.$

d'après théo. 8

2/  $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}; P(x) = 1 + x + x^2 + \dots + x^{19} = \frac{1 - x^{20}}{1 - x}$

d'après théo. 8

3/  $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{-1; 1\}; Q(x) = x + x^3 + x^5 + x^7 + \dots + x^{19} = x[1 + x^2 + x^4 + \dots + x^{18}]$   
 $= x[1 + x^2 + (x^2)^2 + \dots + (x^2)^9]$   
 $= x \left[ \frac{1 - (x^2)^{10}}{1 - (x^2)} \right]$   
 $= x \left[ \frac{1 - x^{20}}{1 - x^2} \right] = \frac{x - x^{21}}{1 - x^2}$

d'après théo. 8

**Réponse de l'exercice 25**

$$\begin{aligned}
 u_1 &= u_0 + \frac{1}{2^0} \\
 u_2 &= u_1 + \frac{1}{2^1} \\
 u_3 &= u_2 + \frac{1}{2^2} \\
 u_4 &= u_3 + \frac{1}{2^3} \\
 &\dots \\
 &\dots \\
 u_{n-1} &= u_{n-2} + \frac{1}{2^{n-1}} \\
 u_n &= u_{n-1} + \frac{1}{2^n}
 \end{aligned}$$

$$\stackrel{(+)}{\Rightarrow} u_n = \underbrace{u_0}_0 + \frac{1}{2^0} + \frac{1}{2^1} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{2^n}$$

$$\Leftrightarrow u_n = 1 + \left(\frac{1}{2}\right)^1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \dots + \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

$$\Leftrightarrow u_n = \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{1 - \frac{1}{2}} \quad \text{d'après théo. 8}$$

$$\Leftrightarrow u_n = 2 \left( 1 - \frac{1}{2^{n+1}} \right)$$

## Exercices : Suites arithmétiques – géométriques

### I- Exercices ★

1 ★

$(u_n)$  est une suite réelle définie sur  $\mathbb{N}$ .

Compléter par : arithmétique - géométrique - ni arithmétique ni géométrique puis justifier.

| suite                     | nature . | Justification |
|---------------------------|----------|---------------|
| $u_n = -3n + 22$          |          |               |
| $u_n = 3 + u_{n+1}$       |          |               |
| $u_{n+1} = \frac{2}{3^n}$ |          |               |

2 ★

Répondre par V si vrai ou X si faux

1/ si  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  est une suite géométrique de raison  $q \neq 1$  alors

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n = u_1 q^n \quad \square$$

2/ si  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  est une suite arithmétique de raison  $r$  alors  $u_6 = u_2 + 4r \quad \square$

3/ Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $2 + 4 + 6 + 8 + \dots + (2n) = n(n+1) \quad \square$

4/ une suite est soit arithmétique soit géométrique  $\square$

5/  $\forall n \in \mathbb{N}; 1 + 2 + 2^2 + 2^3 + \dots + 2^n = 2^{n+1} - 1 \quad \square$

3 ★

Déterminer le terme générale d'une suite arithmétique  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  telle que  $u_{10} = 14$  et  $u_{17} = -56$ .

4 ★

Soit la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  définie par :  $u_0 = 5$  et  $u_n = 3 + u_{n+1}$ ;  $\forall n \in \mathbb{N}$

1/ Déterminer la nature de la suite  $(u_n)$  puis donner son terme général.

2/ Soit la suite  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$  définie par :  $v_n = 7^{u_n}$ ;  $\forall n \in \mathbb{N}$ .

Prouver que  $(v_n)$  est une suite géométrique dont on déterminera la raison.

5 ★

Soit  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est une suite arithmétique telle que  $u_1 = -7$  et  $u_5 = 21$ .

Désignons par  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$  la suite définie par  $\forall n \in \mathbb{N}; v_n = u_{n+1}^2 - u_n^2$ .

1/ Déterminer la raison  $r$  de la suite  $(u_n)$ .

## Exercices : Suites arithmétiques – géométriques

2/a- Calculer  $v_0$ .

b- Prouver que  $(v_n)$  est une suite arithmétique.

c- Donner le terme général de la suite  $(v_n)$ .

**6 ★**

Calculer les sommes suivantes en fonction de  $n$  avec  $n \in \mathbb{N}$

$$S_n = 25 + 28 + 31 + \dots + (25 + 3n)$$

$$S'_n = \frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \frac{1}{27} + \dots + \frac{1}{3^{2n}}$$

$$S''_n = -5^8 - 5^9 - 5^{10} - \dots - 5^{2007}.$$

**7 ★**

Déterminer les réels  $a$ ,  $b$  et  $c$  sachant que :

$$\begin{cases} a, b \text{ et } c \text{ sont trois termes consécutifs d'une suite arithmétique} \\ a + b + c = 105 \\ abc = 41160 \end{cases}$$

**8 ★**

Soit  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est une suite géométrique de raison  $q$  et telles que

$$u_0 = 4; u_2 = 15 \text{ et } u_{2007} < 0. \text{ Déterminer } q.$$

**9 ★**

Montrer que  $\frac{1}{\sqrt{2}-1}$ ,  $-1$  et  $\frac{1}{\sqrt{2}+1}$  sont trois termes consécutifs d'une suite géométrique.

**10 ★**

Soit  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  la suite arithmétique de raison  $r = 2$  et  $u_0 = 1$ .

1/ Exprimer  $u_0 + u_1 + u_2 + \dots + u_{n-1}$  en fonction de  $n$  avec  $n \in \mathbb{N}^*$

2/ En déduire l'entier naturel  $n$  tel que :  $3 + 5 + 7 + \dots + [1 + 2(n-1)] = 99$ .

## II- Exercices ★★

**Ex 11 ★★**

**c**

Soit  $u$  définie par  $u_0 = 3$  et pour tout  $n$  de  $\mathbb{N}$ ;  $u_{n+1} = \frac{u_n}{1 + 5u_n}$ .

1/a- Calculer  $u_1$  puis  $u_2$ .

### Exercices : Suites arithmétiques – géométriques

b- Prouver que  $u$  n'est pas une suite arithmétique.

2/ On considère la suite  $v$  définie par  $v_n = \frac{2}{u_n}$ .

a- Calculer  $v_1$ .

b- Prouver que  $v$  est une suite arithmétique dont on précisera la raison.

c- Exprimer  $v_n$  en fonction de  $n$  puis  $u_n$  en fonction de  $n$ .

### Ex 12 ★★

On considère la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  définie par :  $u_0 = 1$  et pour tout  $n$  de  $\mathbb{N}$

$$u_{n+1} = u_n + n.$$

1/ Prouver que  $(u_n)$  n'est pas une suite arithmétique.

2/ En procédant par itération prouver que  $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \frac{2 + (n-1)n}{2}$ .

### Ex 13 ★★

Soient  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  et  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$  deux suites réelles telles que  $\forall n \in \mathbb{N}; v_n = 3u_n - 5$ .

1/ Montrer que si  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est arithmétique de raison  $r=7$  alors  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est aussi arithmétique de raison  $r'$  que l'on déterminera.

2/ On suppose que  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est arithmétique de raison  $r = 7$  et  $u_1 = -9$ .

Exprimer  $v_n$  en fonction de  $n$ .

### Ex 14 ★★

Soit  $u$  définie par  $u_0 = 1$  et pour tout  $n$  de  $\mathbb{N}; u_{n+1} = \frac{3u_n}{3 - 2u_n}$ .

1/a- Calculer  $u_1$  puis  $u_2$ .

b- Prouver que  $u$  n'est pas une suite arithmétique ni géométrique.

2/ On considère la suite  $v$  définie par  $v_n = \frac{3}{u_n}$ .

a- Prouver que  $v$  est une suite arithmétique dont on précisera la raison.

b- Exprimer  $v_n$  en fonction de  $n$  puis  $u_n$  en fonction de  $n$ .

3/ Calculer  $S = \frac{1}{u_0} + \frac{1}{u_1} + \frac{1}{u_2} + \dots + \frac{1}{u_{20}}$

### Ex 15 ★★

Soit  $(u_n)$  une suite arithmétique telle que  $u_3 = 5$  et  $u_3 + u_4 + u_5 + \dots + u_{20} = 1386$ .

1/ Calculer  $u_{20}$ .

2/ Déterminer la raison  $r$  de la suite  $(u_n)$ .

3/ Donner l'expression de  $u_n$  en fonction  $n$ .

4/ Calculer la valeur de  $A = u_{106} + u_{107} + u_{108} + \dots + u_{206}$ .

**Exercices : Suites arithmétiques – géométriques**

**Ex 16 ★★**

Soit  $(u_n)$  la suite réelle à termes positifs définie par 
$$\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_{n+1} = \frac{3}{\sqrt{6-u_n^2}}; \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

1/a- Calculer  $u_1$  et  $u_2$ .

b- Prouver que  $(u_n)$  n'est pas arithmétique.

2/ Soit  $(v_n)$  la suite définie sur  $\mathbb{N}$  par :  $\forall n \in \mathbb{N}; v_n = \frac{u_n^2}{3 - u_n^2}$

a) Montrer que  $(v_n)$  est une suite arithmétique de raison 1.

b) Exprimer  $v_n$  en fonction de  $n$ .

c) Exprimer  $u_n$  en fonction de  $v_n$ , déduire enfin  $u_n$  en fonction de  $n$ .

**Ex 17 ★★ (bac 2006 - section lettres)**

Soit  $U$  la suite réelle définie sur  $\mathbb{N}$  par : 
$$\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = 3 - 2u_n \end{cases}$$

1/a- Calculer  $u_1$  et  $u_2$ .

b- En déduire que  $U$  n'est ni arithmétique ni géométrique.

2) Soit  $V$  la suite réelle définie sur  $\mathbb{N}$  par  $v_n = u_n - 1$ .

Montrer que  $V$  est une suite géométrique de raison  $q = -2$ .

3/a- Calculer  $v_0$ .

b- Calculer  $v_n$  en fonction de  $n$ .

c- En déduire l'expression de  $u_n$  en fonction de  $n$ .

**Ex 18 ★★**

Soit la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  à termes positifs définie par :  $u_0 = \sqrt{2}$  et pour tout  $n \in \mathbb{N}; u_{n+1} = \sqrt{u_n^2 + 7}$ .

1/a- Calculer  $u_1$  et  $u_2$ .

b- Prouver que  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  n'est pas une suite arithmétique.

2/ On considère la suite  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$  définie par  $v_n = u_n^2$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$

a- Montrer que  $(v_n)$  est une suite arithmétique.

b- Donner donc le terme général de la suite  $(v_n)$ .

c- En déduire  $u_n$  en fonction de  $n$ .

**Ex 19 ★★**

Soit  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite réelle telle que :

### Exercices : Suites arithmétiques – géométriques

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_0 + u_1 + u_2 + \dots + u_n = n^2 + 2n + 1.$$

1/ Calculer  $u_n$  en fonction de  $n$

2/ En déduire la nature de la suite  $(u_n)$ .

3/ Donner la valeur de  $A = u_{1000} + u_{1001} + u_{1002} + \dots + u_{2007}$ .

### Ex 20 ★★

On dépose une somme de 5000 dinars à la caisse d'épargne à un taux d'intérêt composé de 5%.

1/ Quel est la somme dans la caisse à près un ans.

2/ Donner le nombre minimal d'années nécessaires pour que la somme dans la caisse dépasse  $\frac{3}{2}$  la somme initiale.

### Ex 21 ★★

Un jeune homme projette d'acheter une voiture coûtant 14000 dinars. Pour cela il décide de placer une somme dans une banque à 5% d'intérêt composé annuel. Quelle somme doit-il placer pour réaliser son projet au bout de 8 ans.

### Ex 22 ★★

Soit  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  la suite arithmétique de raison  $r = 3$  et  $u_0 = 2$

1/ Calculer  $u_2$  et  $u_{2007}$ .

2/ Justifier que  $\forall n \in \mathbb{N}$ ;  $u_n$  est un entier naturel.

3/ Soit la suite  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$  définie par  $v_n = 7^{u_n}$ ;  $\forall n \in \mathbb{N}$

a- Calculer  $v_1$ .

b- Montrer que  $(v_n)$  est une suite géométrique dont on déterminera la raison  $q$ .

### Ex 23 ★★

Soit  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  la suite géométrique de raison  $q = \frac{-1}{2}$  et  $u_0 = 1$

1/ Exprimer  $u_n$  en fonction de  $n$ .

2/ Calculer  $u_0 + u_1 + u_2 + \dots + u_{10}$ .

3/a- Calculer  $2^{15}$ .

b- Calculer  $S = \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{8}\right) + \left(\frac{1}{16} - \frac{1}{32}\right) + \dots + \left(\frac{1}{16384} - \frac{1}{32768}\right)$

### Ex 24 ★★

Soit  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  la suite arithmétique tel que  $u_0 = 2$  et  $u_0 + u_1 + u_2 + \dots + u_{20} = 2007$

### Exercices : Suites arithmétiques – géométriques

- 1/ Calculer  $u_{20}$ .
- 2/ Déterminer la raison  $r$  de la suite  $(u_n)$ .
- 3/ Déterminer le terme général de  $(u_n)$ .
- 4/ Déterminer le plus petit entier naturel  $n$  tel que  $u_0 + u_1 + u_2 + \dots + u_n > 1000$ .

#### Ex 25 ★★

Soit la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  définie par  $u_0 = 0$  et  $u_{n+1} = \frac{-u_n - 3}{2u_n + 3}$ ;  $\forall n \in \mathbb{N}$

1/a- Calculer  $u_1$  et  $u_2$ .

b- Montrer que  $(u_n)$  n'est ni arithmétique ni géométrique.

2/a- Vérifier que  $u_{n+1} = -\frac{1}{2} + \frac{-3}{2u_n + 3}$

b- Soit  $n \in \mathbb{N}$ ; montrer que si  $u_n \neq -1$  alors  $u_{n+1} \neq -1$

3/ Soit la suite  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$  définie par  $v_n = \frac{1}{u_n + 1}$ ;  $\forall n \in \mathbb{N}$

a- Vérifier que  $\forall n \in \mathbb{N}$ ;  $v_{n+1} - v_n = 2$

b- Dédurre  $v_n$  en fonction de  $n$

c- Montrer enfin que  $u_n = \frac{-2n}{1 + 2n}$ .

#### Ex 26 ★★

Farouk possède dans son tirelire une somme de 500 dinars, son père lui a promis de lui donner 25 dinars par mois pour les mettre dans son tirelire.

1/ Farouk veut savoir combien aura-t-il d'argent après 2 ans. Peut-tu l'aider?

2/ Combien faut-il de mois pour que la somme dépasse le triple de la somme initiale?

#### Ex 27 ★★

Soit  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  la suite définie par  $u_0 = 1$  et  $u_{n+1} = 2u_n + 1$ ;  $\forall n \in \mathbb{N}$

1/ Calculer  $u_1$  et  $u_2$  puis montrer que  $(u_n)$  n'est ni arithmétique ni géométrique.

2/ Soit la suite  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$  définie par  $v_n = u_n + 1$

a- Montrer que  $(v_n)$  est une suite géométrique de raison 2.

b- Dédurre que  $\forall n \in \mathbb{N}$ ;  $u_n = 2^{n+1} - 1$ .

c- Exprimer alors en fonction de  $n$  le réel  $S_n = u_0 + u_1 + u_2 + \dots + u_n$ .

#### Ex 28 ★★

Soit  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite réelle telle que :

$\forall n \in \mathbb{N}$ ,  $u_0 + u_1 + u_2 + \dots + u_n = n^2 + 3n - 4$ .

### Exercices : Suites arithmétiques – géométriques

- 1/ Calculer  $u_0$  et  $u_1$ .
- 2/ Montrer que  $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = 2n + 2$ .
- 3/ Exprimer en fonction de  $n$  le réel  $S_n = u_n + u_{n+1} + u_{n+2} + \dots + u_{2n}$ .

### III- Exercices ★★★

#### Exercice 29 ★★★

Soit  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite réelle définie par : 
$$\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_{n+1} = \sqrt{1 + \frac{1}{4}u_n^2} ; \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

- 1/ Soit  $p \in \mathbb{N}$ , Montrer que si  $0 \leq u_p \leq \sqrt{\frac{4}{3}}$  alors  $0 \leq u_{p+1} \leq \sqrt{\frac{4}{3}}$ .

On admet dans la suite que  $\forall n \in \mathbb{N}; 0 \leq u_n \leq \sqrt{\frac{4}{3}}$ .

- 2/ Soit  $(v_n)$  la suite réelle définie sur  $\mathbb{N}$   $v_n = u_n^2 + a$  où  $a$  un réel.

a) Vérifier que  $v_{n+1} = \frac{1}{4}v_n + \frac{3}{4}a + 1; \forall n \in \mathbb{N}$

b) Trouver la valeur convenable de  $a$  pour que  $(v_n)$  soit géométrique.

- 3/ Dans tout ce qui reste on prend  $a = -\frac{4}{3}$ .

a) Exprimer  $v_n$  en fonction de  $n$ .

b) Exprimer enfin  $u_n$  en fonction de  $n$ .

#### Exercice 30 ★★★

Soit la suite réelle  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  définie par 
$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = \frac{1 - u_n^2}{2^{n+1}} \end{cases}$$

- 1/ Montrer que pour tout  $k$  de  $\mathbb{N}^*$ ;  $u_k \leq \frac{1}{2^k}$ .

- 2/ Pour  $n \in \mathbb{N}^*$  on pose  $S_n = u_0 + u_1 + u_2 + \dots + u_n$   
Montrer que  $S_n \leq 2$ .

#### Exercice 31 ★★★

Du devoir de synthèse n:2 L.P. Monastir (légèrement modifié)

### Exercices : Suites arithmétiques – géométriques

On considère la suite  $(u_n)$  définie sur  $\mathbb{N}$  par :

$$\begin{cases} u_0 = \frac{1}{3} \\ u_{n+1} = \frac{3u_n}{1+2u_n}; \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

1/ Montrer que si  $0 < u_n < 1$  alors  $0 < u_{n+1} < 1$ .

On admet que pour tout entier  $n$  de  $\mathbb{N}$  on a :  $0 < u_n < 1$ .

2/a- Vérifier que  $\forall n \in \mathbb{N}; u_{n+1} - u_n = \frac{2u_n(1-u_n)}{1+2u_n}$ .

b- En déduire que  $u_{n+1} > u_n$ .

3/ Soit la suite  $(v_n)$  définie sur  $\mathbb{N}$  par  $v_n = \frac{1-u_n}{2u_n}$ .

a- Montrer que  $(v_n)$  est une suite géométrique de raison  $q = \frac{1}{3}$ .

b- Déterminer  $v_0$  et exprimer  $v_n$  en fonction de  $n$ .

c- En déduire que  $u_n = \frac{3^n}{2+3^n}$ .

4/a- Montrer  $1+2u_n = \frac{u_n-1}{u_{n+1}-1}$ .

b- En déduire que  $(1+2u_0)(1+2u_1)(1+2u_2)\dots(1+2u_n) = \frac{2}{3} + 3^n$ .

### Exercice 32 ★★★

Calculer la somme des entiers naturels multiples de 17 inférieur à 2007.

### Exercice 33 ★★★

On considère la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  définie par  $u_n = \underbrace{333\dots3}_{n \text{ fois}} + \frac{1}{3}; \forall n \in \mathbb{N}^*$

1/ Montrer que  $(u_n)$  est une suite géométrique.

2/ Exprimer en fonction  $n$  ( $n \in \mathbb{N}$ ) la quantité  $S_n = 3 + 33 + 333 + \dots + \underbrace{333\dots3}_{n \text{ fois}}$

### Exercice 34 ★★★

Soit la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  définie par :  $u_0 = 0$  et  $u_{n+1} = u_n + 2n + 1; \forall n \in \mathbb{N}$

Montrer que pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $u_n$  est un carré parfait.

### Exercice 35 ★★★

Soit  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite réelle définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_{n+1} = \sqrt{\frac{1}{2}u_n^2 + 1}; \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

1/ Soit  $n \in \mathbb{N}$ ; montrer que si  $0 \leq u_n \leq \sqrt{2}$  alors  $0 \leq u_{n+1} \leq \sqrt{2}$

### Exercices : Suites arithmétiques – géométriques

2/ Soit  $(v_n)$  la suite réelle définie sur  $\mathbb{N}$   $v_n = u_n^2 - 2$ .

a) Montrer que  $(v_n)$  est une suite géométrique.

b) Exprimer  $v_n$  puis  $u_n$  en fonction de  $n$  (on **admettra** que  $\forall n \in \mathbb{N}; u_n \geq 0$ )

c) Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ . On pose  $S_n = v_0 + v_1 + v_2 + \dots + v_n$ . Calculer  $S_n$  en fonction de  $n$ .

3/ Soit  $(w_n)$  la suite réelle définie sur  $\mathbb{N}$  par : 
$$\begin{cases} w_0 = 0 \\ w_{n+1} = \frac{1}{2}w_n + v_n; \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

$\forall n \in \mathbb{N}$ ; on pose  $t_n = 2^n w_n$ .

a- Montrer que  $(t_n)$  est une suite arithmétique de raison  $r = -4$ .

b- Exprimer  $t_n$  puis  $w_n$  en fonction de  $n$ .

### Exercice 36 ★★

Soit la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  définie par :

$$u_0 = 1; u_1 = 2 \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}^*; u_{n+2} = \frac{1}{4}u_{n+1} + \frac{3}{8}u_n.$$

1/ Calculer  $u_3$ .

2/ Soit la suite  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  définie par  $v_n = u_{n+1} + \frac{1}{2}u_n; \forall n \in \mathbb{N}^*$

a- Prouver que  $(v_n)$  est géométrique.

b- Exprimer  $v_n$  en fonction de  $n$ .

3/ Soit la suite  $(w_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  définie par  $w_n = u_{n+1} - \frac{3}{4}u_n; \forall n \in \mathbb{N}^*$ .

a- Prouver que  $(w_n)$  est une suite géométrique.

b- Exprimer  $w_n$  en fonction de  $n$ .

4/ Dédurre de tout ce qui précède  $u_n$  en fonction de  $n$ .

### Exercice 37 ★★

Soit  $(a_n)$  une suite arithmétique de raison  $r = 3$  et de premier terme

$$a_0 = 4.$$

1/ Montrer que  $\forall n \in \mathbb{N}; a_n \in \mathbb{N}^*$ .

2/ Pour tout  $n$  de  $\mathbb{N}$  on pose

$$S_n = \frac{1}{\sqrt{a_1} + \sqrt{a_0}} + \frac{1}{\sqrt{a_2} + \sqrt{a_1}} + \frac{1}{\sqrt{a_3} + \sqrt{a_2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{a_{n+1}} + \sqrt{a_n}}$$

a- Montrer que  $\forall k \in \mathbb{N}; \frac{1}{\sqrt{a_{k+1}} + \sqrt{a_k}} = \frac{\sqrt{a_{k+1}} - \sqrt{a_k}}{r}$ .

b- Dédurre  $S_n$  en fonction de  $n$ .

### Exercice 38 ★★

### Exercices : Suites arithmétiques – géométriques

On considère les suites réelles  $(u_n)$  et  $(v_n)$  définies sur  $\mathbb{N}$  par :

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = \frac{u_n + 4v_n}{5}; \forall n \in \mathbb{N} \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} v_0 = 2 \\ v_{n+1} = \frac{u_n + 5v_n}{6}; \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

1/ Soit la suite  $(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$  définie par :  $w_n = v_n - u_n; \forall n \in \mathbb{N}$

a- Montrer que  $(w_n)$  est une suite géométrique.

b- Exprimer  $w_n$  en fonction de  $n$ .

2/ Montrer que  $\forall n \in \mathbb{N}; v_n > u_n$

3/ Soit la suite  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  définie par :  $x_n = 5u_n + 24v_n; \forall n \in \mathbb{N}$

Montrer que  $(x_n)$  est une suite constante sur  $\mathbb{N}$  puis calculer la valeur de  $x_n$ .

4/ Dédurre de ce qui précède  $u_n$  et  $v_n$  en fonction de  $n$ .

### Exercice 39 ★★★

(devoir de contrôle n:4- Lycée pilote Monastir)

A- On considère la suite  $(w_n)$  définie sur  $\mathbb{N}$  par : 
$$\begin{cases} w_0 = 1 \\ w_{n+1} = 5w_n + 5^n \end{cases}$$

1/ Calculer  $w_1$  et  $w_2$ .

2/ En déduire que la suite  $(w_n)$  n'est ni arithmétique ni géométrique.

3/ Soit  $S_n = (w_1 - 5w_0) + (w_2 - 5w_1) + (w_3 - 5w_2) + \dots + (w_{n+1} - 5w_n)$

Montrer que  $S_n = \frac{1}{4}(5^{n+1} - 1)$ .

B- Soit  $\alpha$  un réel strictement supérieur à 1.

On considère les suites  $(u_n)$  et  $(v_n)$  définies sur  $\mathbb{N}$  par :

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = \alpha u_n + \alpha^n \end{cases} \quad \text{et} \quad v_n = \frac{u_n}{\alpha^n}$$

1/a- Montrer que  $(v_n)$  est une suite arithmétique de raison  $r = \frac{1}{\alpha}$ .

b- Exprimer  $v_n$  et  $u_n$  en fonction de  $n$  et  $\alpha$ .

2/a- Montrer que  $v_0 + v_1 + v_3 + \dots + v_{12} = 13\left(1 + \frac{6}{\alpha}\right)$ .

b- En déduire  $\frac{2^0 + u_0}{2^0} + \frac{2^1 + u_1}{2^1} + \frac{2^2 + u_2}{2^2} + \dots + \frac{2^{12} + u_{12}}{2^{12}} = 65$ .

### Exercice 40 ★★★

Soit  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  la suite géométrique de raison  $q > 0$  et  $u_2 = 7$  et  $u_4 = 63$ .

1/ Déterminer  $q$ .

2/ Donner le terme général de la suite  $(u_n)$ .

### Exercices : Suites arithmétiques – géométriques

ii) Calculer  $S = u_4 + u_5 + u_6 + \dots + u_{10}$ .

2/ Déterminer  $a$  pour que  $(u_n)$  soit une suite arithmétique.

### Exercice 44 ★★★

Soit  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  définie par : 
$$\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_{n+1} = \frac{2u_n + 1}{u_n + 2}; \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

1/a- Déterminer les réels  $a$  et  $b$  tels que  $\frac{2x+1}{x+2} = a + \frac{b}{x+2}; \forall x \neq -2$

b- Soit  $n \in \mathbb{N}$ . Montrer que si  $0 \leq u_n \leq 1$  alors  $0 \leq u_{n+1} \leq 1$

On admet que  $\forall n \in \mathbb{N}; 0 \leq u_n \leq 1$

2/ Montrer que  $\forall n \in \mathbb{N}; u_{n+1} \leq u_n$ .

3/ Pouvez-vous que  $(u_n)$  n'est ni arithmétique ni géométrique.

4/ Soit la suite  $V$  définie sur  $\mathbb{N}$  par  $v_n = \frac{u_n - 1}{u_n + 1}; \forall n \in \mathbb{N}$ .

a) Montrer que  $V$  est une suite géométrique dont on précisera la raison et le premier terme  $v_0$ .

b) Exprimer  $v_n$  puis  $u_n$  en fonction de  $n$ .

5/a- Pour  $n \in \mathbb{N}$ , exprimer  $u_n - 1$  en fonction de  $n$ .

b- Dédurre l'expression en fonction de  $n$  de

$$S_n = \frac{1}{u_0 + 1} + \frac{1}{u_1 + 1} + \frac{1}{u_2 + 1} + \dots + \frac{1}{u_n + 1}.$$

### Exercice 45 ★★★

Soit  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  la suite définie par :  $u_0 \in \mathbb{R}$  et  $u_{n+1} = 3u_n + 5; \forall n \in \mathbb{N}$

1/ Déterminer la valeur de  $a$  de  $u_0$  pour que  $u_1 = u_0$ .

2/ Dans ce qui suit on suppose que  $u_0 \neq a$  (la valeur trouvée en 1/)

a- Vérifier que  $\forall n \in \mathbb{N}; u_{n+1} - a = 3(u_n - a)$

b- Dédurre que  $\forall n \in \mathbb{N}; u_n = 3^n(u_0 - a) + a$ .

3/ On suppose que  $u_0 = -\frac{3}{2}$ .

Calculer en fonction de  $n$  la valeur de  $S_n = u_0 + u_1 + u_2 + \dots + u_n$ .

### Exercice 46 ★★★ (bac Tunisie 1989)

Soit la suite  $u$  définie sur  $\mathbb{N}$  par :  $u_0 = 1$  et  $\forall n \in \mathbb{N}; u_{n+1} = \frac{1}{3}u_n + n - 1$

Soit  $v$  suite définie par :  $\forall n \in \mathbb{N}; v_n = 4u_n - 6n + 15$ .

1/ Montrer que  $v$  est une suite géométrique.

2/a- Calculer  $v_0$  puis Calculer  $v_n$  en fonction de  $n$ .

### Exercices : Suites arithmétiques – géométriques

b- En déduire que  $\forall n \in \mathbb{N}; u_n = \frac{19}{4} \times \frac{1}{3^n} + \frac{6n-15}{4}$ .

3/ Montrer que la suite  $u$  peut s'écrire sous la forme  $u = t + w$  où  $t$  est une suite géométrique et  $w$  une suite arithmétique.

4/ Calculer  $T_n = t_0 + t_1 + t_2 + \dots + t_n$  et  $W_n = w_0 + w_1 + w_2 + \dots + w_n$ .

En déduire  $U_n = u_0 + u_1 + u_2 + \dots + u_n$ .

### Exercice 47 ★★★★★

Soit la suite réelle  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  définie par 
$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = u_n + \left(\frac{1}{2}\right)^n; \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

On considère la suite  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  définie par  $x_n = u_{n+1} - u_n; \forall n \in \mathbb{N}$ .

1/ Prouver que  $(x_n)$  est une suite géométrique dont on précisera la raison.

2/  $\forall n \in \mathbb{N}^*$  on pose  $S_n = x_0 + x_1 + x_2 + \dots + x_{n-1}$ .

Exprimer  $S_n$  en fonction de  $n$ .

3/ Profiter de 3/ pour exprimer  $u_n$  en fonction de  $n$ .

4/ Calculer en fonction de  $n$ ;  $P_n = x_0 \cdot x_1 \cdot x_2 \cdot \dots \cdot x_{n-1}$ .

### IV- Exercices ★★★★★

#### EXERCICE 48 ★★★★★

Soit  $x = 3333\dots 3$  le 3 est répété 2007 fois.

Déterminer la somme des chiffres de  $x^2$ .

#### EXERCICE 49 ★★★★★

Soit la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  définie par :

$$u_0 = 2006 \text{ et } u_{n+1} = u_0 + u_1 + u_2 + \dots + u_n - (2007 - n - 1) \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}.$$

Calculer  $u_{2007}$ .

#### EXERCICE 50 ★★★★★

Soit  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite réelle à termes strictement positifs.

Montrer que  $\forall n \in \mathbb{N}^*; \frac{u_1}{u_n} + \frac{u_2}{u_{n-1}} + \frac{u_3}{u_{n-2}} + \dots + \frac{u_n}{u_1} \geq n$ .

#### EXERCICE 51 ★★★★★

Soit  $f$  une application de  $\mathbb{N}$  dans  $\mathbb{R}$  vérifiant :