Limites et Continuité

Rappel de cours :

1°/ Limites et ordre :

. Soit f et g deux fonctions définies sur un intervalle ouvert I, sauf peut-être en un réel x_0, si $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \ell$ et $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = \ell'$ et pour tout x de I, différent de x_0 $f(x) \leq g(x)$ alors $\leq$

. Soit f, g et h trois fonctions définies sur un intervalle ouvert I, sauf peut-être en un réel x_0 si $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = \lim\limits_{x \to x_0} h(x) = \ell$ et pour tout x de I, différent de x_0, $h(x) \leq f(x) \leq g(x)$ alors $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) =$

2°/ Operations sur les limites:

. Limite d'une somme :

Si f a pour limite	ℓ	ℓ	ℓ	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$
Si g a pour limite	ℓ'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
Alors (f+g) a pour limite	$\ell+\ell'$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	pas de résultat général

. Limite d'un produit :

lim g \ lim f	$\ell<0$	$\ell>0$	$+\infty$	$-\infty$	0
$\ell'<0$	$\ell \times \ell'$		$-\infty$	$+\infty$	0
$\ell'>0$			$+\infty$	$-\infty$	
$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	pas de résultat général
$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	
0	0				

. Limite d'un quotient

lim g \ lim f	$\ell<0$	$\ell>0$	0 par des valeurs positives	0 par des valeurs négatives	$+\infty$	$-\infty$
$\ell'<0$	$\frac{\ell}{\ell'}$		0	0	$-\infty$	$+\infty$
$\ell'>0$					$+\infty$	$+\infty$
0 par des valeurs positives	$+\infty$	$-\infty$	pas de résultat général		$+\infty$	$-\infty$
0 par des valeurs négatives	$-\infty$	$+\infty$			$-\infty$	$+\infty$
$+\infty$	0		0	0	pas de résultat général	
$-\infty$						

. Lorsque le tableau ne donne pas de résultat général, on parle souvent de "forme indéterminée" Les formes indéterminées sont de 4 types exprimés sous forme abrégée par $\infty - \infty$, $0 \times \infty$ $\frac{\infty}{\infty}$ et $\frac{0}{0}$.

3°/ Quelques techniques usuelles pour lever les indéterminations:

. Mise en facteur du terme prépondérant (dominant) exemple:

$$\lim_{x \to +\infty} \sqrt{4x^2+x} - x = \lim_{x \to +\infty} \sqrt{4x^2\left(1+\frac{x}{4x^2}\right)} - x = \lim_{x \to +\infty} \sqrt{4x^2}\sqrt{1+\frac{1}{4x}} - x = \lim_{x \to +\infty} 2x\sqrt{1+\frac{1}{4x}} - x$$

$$= \lim_{x \to +\infty} x\left(2\sqrt{1+\frac{1}{4x}} - 1\right)$$

$$= +\infty$$

. Utilisation d'une quantité conjuguée exmple:

$$\lim_{x \to +\infty} \sqrt{x+1} - \sqrt{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{(\sqrt{x+1}-\sqrt{x})(\sqrt{x+1}+\sqrt{x})}{(\sqrt{x+1}+\sqrt{x})} = \lim_{x \to +\infty} \frac{(x+1)-x}{(\sqrt{x+1}+\sqrt{x})} = \lim_{x \to +\infty}$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{(\sqrt{x+1}+\sqrt{x})} = 0$$

. Utilisation d'une factorisation exemple:

$$\lim_{x \to 1} \frac{x^3-1}{x^2+2x-3} = \lim_{x \to 1} \frac{(x-1)(x^2+x+1)}{(x-1)(x+3)} = \lim_{x \to 1} \frac{x^2+x+1}{(x+3)} = \frac{3}{4}$$

4°/ Continuité:

. Une fonction f est continue en a si, et seulement si, $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$

5°/ Théorème des valeurs intermédiaires:

. Enoncée 1:

f est une fonction **continue** sur un intervalle I, a et b sont deux réels de I. Pour tout réel K compris entre f(a) et f(b) il existe au moins un réel c compris entre a et b telque $f(c) = K$

. Enoncée 2:

f est une fonction **continue** sur un intervalle $[a, b]$ et vérifiant $f(a)\, f(b) < 0$ alors il existe au moins un réel c appartenant à l'intervalle ouvert $]a, b[$ telque $f(c) = 0$

. Enoncée 3:

f est une fonction **continue** sur un interval $[a, b]$ et **strictement monotone** sur $[a, b]$

et vérifiant $f(a)\,f(b) < 0$ alors il existe un réel **Unique** c appartenant à l'intervalle ouvert $]a,b[$ tel que $f(c) = 0$

6°/ Fonctions polynômes et Fonctions rationnelles :

. Toute fonctions polynome est définie continue sur $\mathbb{R}$

. Toute fonctions rationnelle est continue sur son domaine de définition

Attention !

. une forme indéterminée ne veut pas dire que la fonction ne possède pas de limite ! il faut juste trouver un autre moyen de calcul de cette limite

Les exercices

Exercice 1:

Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sqrt{2x+1}-1}{x} & \text{si } x>0 \\ x^2+1 & \text{si } x \leq 0 \end{cases}$

1/ calculer $f(0)$

2/ a) Montrer que si $x \neq 0$ alors $\dfrac{\sqrt{2x+1}-1}{x} = \dfrac{2}{\sqrt{2x+1}+1}$

b) Montrer que f est continue en 0

3/ Déterminer le domaine de continuité de f

4/ Montrer que l'équation $f(x) = 3$ possède une solution uniques dans $[-2,0]$

Exercice 2:

Partie A

Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = 3x^3 + 5x - 6$

1/ Montrer que g est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$

2/ a) Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une solution unique α dans l'intervalle $[0,1]$

b) Déterminer un encadrement de α à 10^{-1} près

Partie B

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \begin{cases} g(x) & \text{si } x \geq 1 \\ \dfrac{x^2-1}{x-1} & \text{si } x < 1 \end{cases}$

1/ Etudier la continuité de f en 1

2/ En déduire que f est continue sur $\mathbb{R}$

Exercice 3:

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \begin{cases} x - \sqrt{x^2-1} & \text{si } x \leq -1 \\ x^2+3x+1 & \text{si } x > -1 \end{cases}$

1/ Calculer $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$

2/ Montrer que f est continue en -1

3/ a) Montrer que f est strictement croissante sur $]-1,+\infty[$

b) Déterminer $f(]-1,+\infty[)$

4/ a) Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique $\alpha \in]-1,0[$

b) Donner un encadrement de α à 10^{-1} près

c) En déduire le signe de $f(x)$ sur $\mathbb{R}$

Exercice 4 :

Soit la fonction f définie sur $[0,+\infty[$ par $f(x)=x+\sqrt{x}-3$

1/ calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$

2/ Montrer que f est continue sur $[0,+\infty[$

3/ Montrer que f est croissante sur $[0,+\infty[$

4/ Montrer que l'équation $f(x)=0$ admet une unique solution $\alpha\in\,]1,2[$

5/ Montrer que f réalise une bijection de $[0,+\infty[$ sur un intervalle J qu'on précisera

Exercice 5 :

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=\dfrac{\sqrt{x(x+1)}}{x^2}$

1/ a) Déterminer le domaine de définition de f

b) calculer $\lim\limits_{x\to0^+} f(x)$

2/ a) Vérifier que $x<\sqrt{x(x+1)}<x+1$, pour tout $x>0$

b) En déduire que $\dfrac{1}{x}<f(x)<\dfrac{x+1}{x^2}$, pour tout $x>0$

c) calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$

3/ a) Montrer l'équation $f(x)=1$ admet au moins une solution $\alpha\in[1,2]$

b) Donner un encadrement de α à 10^{-1} près

Exercice 6 :

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2+6x+4}{x} & \text{si } x<-1\\ 2\sqrt{x+1} & \text{si } x\geq-1\end{cases}$

1/ a) calculer $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$

b) calculer $\lim\limits_{x\to-1^-} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to-1^+} f(x)$

c) La fonction f est-elle continue en -1 ? Justifier

2/ On donne le tableau de variation de f sur $]-\infty,-1[$

x	$-\infty$		-2		-1
f	$-\infty$	↗	2	↘	1

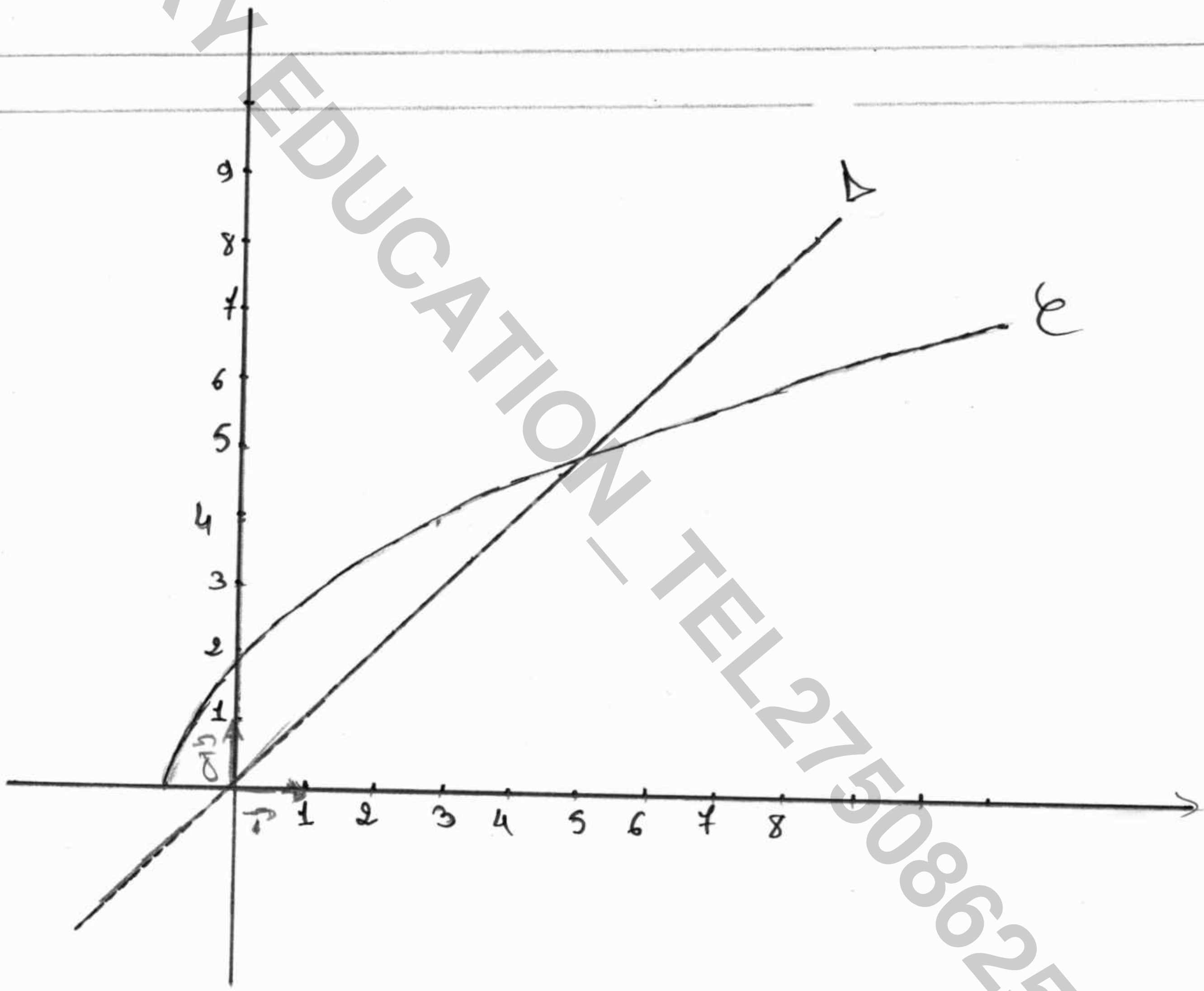
La restriction de f à $]-\infty,-1[$ réalise-t-elle une bijection ? Justifier

3/ On a représenté dans un repère orthonormé $\mathcal{C}$ la courbe représentative de la restriction de f à l'intervalle $[-1,+\infty[$, ainsi que la droite d'équation $y = x$

a) Montrer que f réalise une bijection de $[-1,+\infty[$ sur un intervalle que l'on précisera

b) Tracer dans le même repère $\mathcal{C}$ la courbe représentative de f^{-1}

4/ Montrer que l'équation $f(x) = 3$ admet une solution unique α dans $[1,2]$



Correction des exercices

Exercice 1 :

1°) $f(0) = 1$

2°) a) pour $x \neq 0$ $\dfrac{\sqrt{2x+1}-1}{x} = \dfrac{(\sqrt{2x+1}-1)(\sqrt{2x+1}+1)}{x(\sqrt{2x+1}+1)} = \dfrac{2x+1-1}{x(\sqrt{2x+1}+1)}$

$$= \frac{2x}{x(\sqrt{2x+1}+1)} = \frac{2}{\sqrt{2x+1}+1}$$

b) $\lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^-} x^2+1 = 1 = f(0)$ donc f est continue à gauche en 0

$\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{\sqrt{2x+1}-1}{x}$ $\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{2}{\sqrt{2x+1}+1} = 1 = f(0)$ donc f est continue à droit en 0

$\Rightarrow$ f est continue en 0

3°/ La fonction f est continue sur $]-\infty, 0[$ comme étant un polynôme, continue sur $]0, +\infty[$ comme étant quotient et racine de fonctions continues et continue en 0 donc f est continue sur $\mathbb{R}$.

4°/. La fonction f est continue sur $\mathbb{R}$ donc elle est continue sur $[-2, 0]$

. $f(2) = 5$
. $f(0) = 1$ } donc $f(0) \leq 3 \leq f(-2)$
. Soit $a, b \in]-\infty, 0]$ tel que $a < b$. On a $f(b) - f(a) = b^2 - a^2 = (b-a)(b+a) < 0$

décroissante sur $]-\infty, 0]$ donc sur $[-2, 0]$

$\Rightarrow$ L'équation $f(x) = 3$ possède une solution unique dans $[-2, 0]$

Exercice 2 :

Partie A :

1°/ Soit $a, b \in \mathbb{R}_+$ tel que $a < b$. On a :

$f(b) - f(a) = (3b^3 + 5b - 6) - (3a^3 + 5a - 6) = 3(b^3 - a^3) + 5(b-a)$

$$= 3(b-a)(b^2 + ab + a^2) + 5(b-a) > 0$$

donc g est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$

2°/ a). La fonction g est continue sur $\mathbb{R}$ comme étant un polynôme donc elle est continue sur $[0, 1]$

• $g(0) = -6$
$\quad = 2$ } donc $g(0) \leq 0 \leq g(1)$

$\Rightarrow$ L'equation $g(x) = 0$ admet une solution unique α dans l'intervalle $[0, 1]$

b) $g(0{,}8) = -0{,}46$
$g(0{,}9) = 0{,}69$ } donc $0{,}8 \leq \alpha \leq 0{,}9$

Partie B:

1/ $\lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 1^-} \dfrac{x^2 - 1}{x - 1} = \lim\limits_{x \to 1^-} \dfrac{(\cancel{x-1})(x+1)}{\cancel{x-1}} = \lim\limits_{x \to 1^-} (x+1) = 2$

et $\lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 1^+} g(x) = \lim\limits_{x \to 1^+} 3x^3 + 5x - 6 = 2$ donc $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = 2 = f(1)$

et par suit f et continue en 1

2/ La fonction f et continue sur $]-\infty, 1[$ comme étant une fonction rationelle, continue sur $]1, +\infty[$ comme étant un polynôme et continue en 1 donc f est continue sur $\mathbb{R}$

Exercice 3:

1/ $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} x - \sqrt{x^2 - 1} = -\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} x^2 + 3x + 1 = +\infty$

2/ $\lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 1^-} x - \sqrt{x^2 - 1} = -1 = f(-1)$ donc f est continue à gauche en 1

$\lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x} x^2 + 3x + 1 = -1 = f(-1)$ donc f est continue à droite en -1

$\Longrightarrow$ f est continue en -1

3/ a) soit $a, b \in]-1, +\infty[$ tel que $a < b$

$f(b) - f(a) = (b^2 + 3b + 1) - (a^2 + 3a + 1) = b^2 \; a^2 + 3(b - a) = (b - a)(b + a + 3)$

$a > -1$ et > -1 donc $a + b > -2$ et par suit $b + a + 3 > 0$ donc $f(b) - f(a) > 0$

et par suits f est strictement croissante sur $]-1, +\infty[$

b) $f(]-1, +\infty[) =]f(-1), \lim\limits_{x \to +\infty} f(x)[=]-1, + \quad [$

4/ a) • f est continue sur $]-1, +\infty[$ comme étant un polynôme donc elle est continue sur $]-1, 0[$

. f est strictement croissante sur $]-1, +\infty[$ donc elle est stictement croissante sur $]-1, 0[$

$$\left.\begin{array}{l} f(-1) = -1 \\ f(0) = 1 \end{array}\right\} \text{ donc } f \text{ change de signe sur }]-1, 0[$$

$\Longrightarrow$ l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique $\alpha \in]-1, 0[$

b/ $$\left.\begin{array}{l} f(-0,4) = -0,04 \\ f(-0,3) = 0,19 \end{array}\right\} \text{ donc } -0,4 \leq -0,3$$

c/ si $x \in]-\infty, 1[$ alors $f(x) = x - \sqrt{x^2 - 1} < 0$

x	$-\infty$		α		$+\infty$
$f(x)$		$-$	0	$+$	

Exercice 4:

1/ $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} x + \sqrt{x} - 3 = +\infty$

2/ La fonction f est continue sur $[0, +\infty[$ comme étant somme de fonction continues sur $[0, +\infty[$

3/ soit $a, b \in [0, +\infty[$ tel que $a < b$

$f(b) - f(a) = (b + \sqrt{b} - 3) - (a + \sqrt{a} - 3) = (b - a) + (\sqrt{b} - \sqrt{a}) > 0$

donc f est croissante sur $[0, +\infty[$

4/ . f est continue sur $[0, +\infty[$ donc elle est continue sur $]1, 2[$

. f est strictement croissante

$$\left.\begin{array}{l} . f(1) = -1 \\ f(2) = \sqrt{2} - 1 \end{array}\right\} \text{ donc } f \text{ change de signe sur }]1, 2[$$

$\Longrightarrow$ l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution $\alpha \in]1, 2[$

5/ La fonction f est strictement croissante sur $[0, +\infty[$ donc elle réalise une bijection de $[0, +\infty[$ sur $J = ([0, +\infty[) = [-3, +\infty[$

Exercice 5 :

1°/ a) il faut que $x \neq 0$ et $x(x+1) \geq 0$

x	$-\infty$		-1		0		$+\infty$
x		$-$		$-$	0	$+$	
$x+1$		$-$	0	$+$		$+$	
$x(x+1)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

$D_f =]-\infty, -1] \cup]0, +\infty[$

b $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^+} \frac{\sqrt{x(x+1)}}{x^2} = \lim\limits_{x \to 0^+} \sqrt{\frac{x(x+1)}{x^4}} = \lim\limits_{x \to 0^+} \sqrt{\frac{(x+1)}{x^3}} = +\infty$

2°/ a) Pour tout $x > 0$ on a : $x^2 < x^2 + x < x^2 + x + (x+1)$

$\Leftrightarrow \; x^2 < x(x+1) < (x+1)^2 \Leftrightarrow x < \sqrt{x(x+1)} < x+1$

b) pour tout $x > 0$, $x < \sqrt{x(x+1)} < x+1 \Leftrightarrow \frac{1}{x} < \frac{\sqrt{x(x+1)}}{x^2} < \frac{x+1}{x^2}$

$\Leftrightarrow \frac{1}{x} < f(x) < \frac{x+1}{x^2}$

c) $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{x} = 0$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{x+1}{x^2} = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{x}{x^2} = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{x} = 0$

donc $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$

3°/ a) . f est continue sur $]0, +\infty[$ comme étant quotient et racine de fonctions continues et positives donc elle est continue sur $[1, 2]$

• $f(1) = \sqrt{2} \simeq 1,4$

$f(2) = \frac{\sqrt{6}}{4} \simeq 0,6$ donc $f(2) \leq 1 \leq f(1)$ c'est à dire f change de signe sur $]1, 2[$

$\Rightarrow$ L'équation $f(x) = 1$ admet aumoins une solution $\in]1, 2[$

b) $\left.\begin{array}{l} f(1,3) = 1,02 \\ f(1,4) = 0,94 \end{array}\right\}$ donc $1,3 \leq \alpha \leq 1,4$

Exercice 6 :

1/ a) $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lim \frac{x^2 + 6x + 4}{x} = \lim\limits_{x \to -\infty} \frac{x^2}{x} = \lim\limits_{x \to -\infty} x = +\infty$

et $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim 2\sqrt{x+1} = +\infty$

b) $\lim\limits_{x \to -1^-} f(x) = \lim\limits_{x \to -1^-} \frac{x^2 + 6x + 4}{x} = 1$ et $\lim\limits_{x \to -1^+} f(x) = \lim\limits_{x \to -1^+} 2\sqrt{x+1} = 0$

c) $\lim\limits_{x \to -1^-} f(x) \neq \lim\limits_{x \to -1^+} f(x)$ donc f ne possède pas de limite en -1 donc elle n'est pas continue en -1

2°/ La fonction f est n'est pas strictement monotone sur $]-\infty, -1[$ donc elle ne réalise pas une bijection.

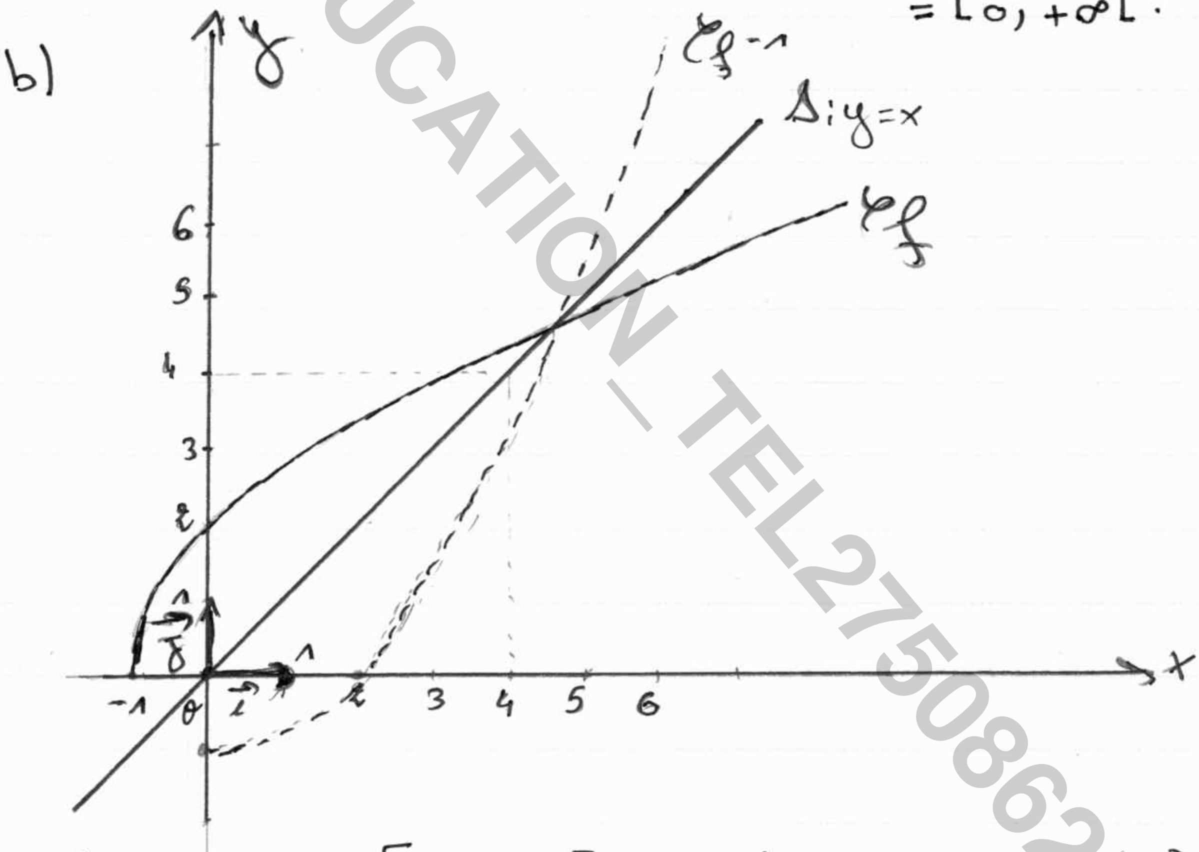
3/ a) soit $a, b \in [-1, +\infty[$ tel que $a < b$

$a < b \Leftrightarrow a + 1 < b + 1 \Leftrightarrow \sqrt{a} + 1 < \sqrt{b} + 1$

$\Leftrightarrow 2\sqrt{a} + 1 < 2\sqrt{b+1} \Leftrightarrow f(a) < f(b)$ donc f est strictement croissante sur $[-1, +\infty[$ et par suit elle réalise une bijection de $[-1, +\infty[$ sur $f([-1, +\infty[) = [f(-1), \lim\limits_{x \to +\infty} f(x)[$

$= [0, +\infty[$.

b)



4/ • f est continue sur $[-1, +\infty[$ comme étant la racine carrée d'une fonction continue et structement positive donc elle est continue sur $[1, 2]$

• f est strictement croissante

• $f(1) = 2\sqrt{2} \simeq 2{,}8$
$f(2) = 2\sqrt{3} \simeq 3{,}5$ $\Big\}$ donc $f(1) \leq 3 \leq f(2)$

$\Longrightarrow$ L'equation $f(x) = 3$ admet une unique solution $\alpha \in [1, 2]$

H

Etude de fonction

Rappel de cours

1°/ Dérivabilité :

- Une fonction f est dérivable en x_0 s'il existe un nombre réel ℓ tel que : $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(x_0 + h) - f(x)}{h} = \ell$

- La fonction f est dérivable en x_0 si, et seulement si, f est à la fois dérivable à droit et à gauche en x_0 et $f'_d(x_0) = f'_g(x_0)$

2°/ Dérivées usuelles :

L'intervalle I	fonction f défini sur I		fonction dérivée f' déf sur I	
$\mathbb{R}$	$f(x) = a,\ a \in \mathbb{R}$	$u \times v$	$f'(x) = 0$	$u' \times v + u \times v'$
$\mathbb{R}$	$f(x) = ax + b,\ a, b \in \mathbb{R}$	$u^n,\ n \in \mathbb{Z}^*$	$f'(x) = a$	$n \times u' \times u^{n-1}$
$\mathbb{R}^*$	$x \to \dfrac{1}{x}$	$\dfrac{u}{v}$	$f'(x) = -\dfrac{1}{x^2}$	$\dfrac{u' \times v - u \times v'}{v^2}$
$\mathbb{R}$	$f(x) = x^n,\ n \in$	$\sqrt{u}$	$f'(x) = n x^{n-1}$	$\dfrac{u'}{2\sqrt{u}}$
$\mathbb{R}^*$	$f(x) = \sqrt{x}$	$u \circ v$	$f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$	$v' \times (u' \circ v)$

3°/ Extrema :

- Soit f une fonction dérivable sur un intervalle ouvert I et x_0 un réel de I si la fonction dérivée f' s'annule et change de signe en x_0 alors f admet local en x_0 égal à $f(x_0)$

4°/ Parité :

- Une fonction f est dite paire si pour tout réel x de Df on a $-x \in D_f$ et $f(-x) = f(x)$

- Une fonction f est dite impaire si pour tout réel x de Df, on a $-x \in D_f$ et $f(-x) = -f(x)$

- La courbe d'une fonction paire, dans un repère orthonormé est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées

- La courbe d'une fonction impaire, dans un repère orthonormé est