

Exercice 2 Soit $w \in C^0([0, 1])$ une fonction, $\mu > 0$ un réel positif, $v_l, v_r \in \mathbb{R}$ des réels. On cherche à résoudre le problème suivant :

$$-\mu^2 \quad \forall x \in [0, 1], \quad \mu^2 v''(x) + v(x) = w(x), \quad (5a)$$

$$v(0) = v_l, \quad \text{et} \quad v(1) = v_r. \quad (5b)$$

1. (a) Résoudre l'équation différentielle homogène associée :

$$\mu^2 v'' + v = 0. \quad (6)$$

Vous choisirez un système fondamental, noté $(v_{H,1}, v_{H,2})$ par la suite.

(b) On note v_F la fonction définie par

$$v_F : x \in \mathbb{R} \mapsto \frac{1}{2\mu} \sin\left(\frac{x}{\mu}\right) \in \mathbb{R}. \quad \text{sinus} \quad (7)$$

Calculer la dérivée de v_F , cette dernière est-elle définie partout? continue?

(c) (★) On note v_{int} la fonction définie par

$$v_{int} : x \in [0, 1] \mapsto \int_0^1 w(y) v_F(x-y) dy. \quad (8)$$

Quelle équation différentielle est vérifiée par v_{int} ?

(d) (★) Trouver une solution du problème (5).

2. Soit v_1 et v_2 deux solutions du problème (5).

(a) Quel est le problème vérifié par $\tilde{v} := v_1 - v_2$.

(b) En multipliant l'équation principale de ce problème par \tilde{v} , montrer que l'on a :

$$\int_0^1 (|\tilde{v}(x)|^2 + \mu^2 |\tilde{v}'(x)|^2) dx = 0, \quad (9)$$

puis conclure.

3. (★) Montrer que quand $\mu \rightarrow +\infty$, la solution du problème (5) converge (uniformément) vers une fonction que l'on déterminera.

Remarque : La limite $\mu \rightarrow 0$ n'est pas aussi simple à traiter. On s'attend à avoir $v_{lim} = w$ (remplacer μ par 0 dans l'équation). Mais on a $v(0) = v_l$ et $v(1) = v_r$. En pratique on constate que l'on a convergence ssi on a la condition de compatibilité entre les données du problème $w(0) = v_l$ et $w(1) = v_r$.