

## Introduction:

[« suivant l'affirmation de Wikipédia sur cette conjecture de Goldbach :

« Le théorème des nombres premiers affirme qu'un entier  $m$  sélectionné aléatoirement d'une manière brute possède  $(1/\ln m)$  chance d'être premier. Ainsi, si  $n$  est un grand entier pair et  $m$ , un nombre compris entre 3 et  $n/2$ , alors on peut s'attendre à ce que la probabilité que  $m$  et  $n - m$  soient tous deux premiers soit égale à  $1 / (\ln n \cdot \ln m)$ . Cet argument heuristique n'est pas rigoureux pour de nombreuses raisons; par exemple, on suppose que les événements que  $m$  et  $n - m$  soient premiers sont statistiquement indépendants l'un de l'autre. »

L'algorithme de Goldbach permet de prouver que cette affirmation n'est pas non plus rigoureuse voir « Fausse », pour une limite  $m$  fixée, car il s'agit d'un même événement. Rien ne nous assure que  $n - m$  soit de la bonne famille de nombres premiers complémentaires par rapport à  $n$ , car les 8 familles de nombres premiers de la forme  $30k + (i)$  sont disjointes : avec  $i \in \{1, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29\}$ .

(« cet algorithme permet donc de modifier, la fonction asymptotique du TNP dans ces 8 Fam (i) de nombres premiers  $p' > 5$ , représentant 26,666... % des entiers naturels non nuls; soit  $n / 3,75$ . »)

Car en effet, si on considère comme événement le calcul du nombre de nombres premier  $q \in [m ; n]$  il dépend statistiquement de la congruence des entiers  $m \leq n/2$  pour une limite  $m$  fixée, ainsi que sa famille complémentaire, autrement dit  $q = n - m$  à pour antécédent :  $m \not\equiv n [P]$  et donc, si et seulement si  $m'$  est un nombre premier  $p' \leq n/2$  et tel que :  $m' \not\equiv n [P]$ , alors  $q$  a pour antécédent  $m' = p'$  appartenant à la bonne famille (i) de nombres premiers  $n - m$  « ils ne sont donc pas statistiquement indépendant l'un de l'autre et ne sont pas incompatibles ; ils sont complémentaires. »

Il s'agit d'un seul et même événement, dépendant de la congruence de  $m \Rightarrow n - m$  un nombre premiers  $q$  ou pas ; et où  $q'$  sera donc le complémentaire de  $m' = p'$  par rapport à  $n$  ; c'est donc une indépendance impossible. (« quand bien même la primalité de  $p'$  ne dépend pas de la primalité de  $q$  et de sa Fam (i). »)

On peut déjà en déduire et affirmer, avec l'algorithme de Goldbach et celui d'Ératosthène, que cette fonction ci-dessus ( $1/\ln m * \ln n$ ) est parfaitement justifiée et permet « d'estimer une quantité positive » d'entiers  $m < n/2$  premiers, mais aussi d'être non congru à  $n$  (mod  $P$ ), car c'est une conséquence directe du TNP où :  $m / \ln n$  est équivalent au nombre de  $m \not\equiv n [P]$  qui impliquent un nombre équivalent de nombres premiers  $q \in [m ; n]$  de sa Famille (i) complémentaire, lorsque  $m \rightarrow +\infty$ .

Par conséquent, on pourra toujours en déduire au minimum ( $m / \ln m * \ln n$ ), un nombre d'entiers  $m \not\equiv n [P]$  premier ou pas, qui précèdent un entier  $m' = p' \leq n/2$  ; ce qui impliquera pour la limite suivante ( $n/2 + 1$ ) :  $p' + q = n + 2$ .

« Que l'on verra ci-après, avec la propriété récurrente du crible de Goldbach et le fonctionnement de ces deux cribles, qui caractérisent les fonctions du TNP ; ainsi que les définitions relatives à ces algorithmes dans ces 8 Fam(i). »

On en déduit le raisonnement suivant : ces entiers  $m' = p'$ , tel que  $m' \not\equiv n [P]$  fait de par cette congruence, que statistiquement il s'agit du même événements que  $m'$  et  $n'$  soit premiers et suivant le TNP on peut s'attendre à ce que la probabilité de sélectionner un entier  $m' \not\equiv n [P] \Rightarrow m'$  et  $n - m'$  deux nombres premiers est égale à  $1 / (\ln n \cdot \ln m)$  ; car en fait, il s'agit simplement de sélectionner un seul entier  $m$  dans la limite concernée ( $1 : n/2$ ) ; caractérisé par ces deux algorithmes, dont celui de Goldbach que l'on va utiliser pour recrabilier les nombres  $m' = p' \leq n/2$  ayant été criblés au par avant par Ératosthène, selon le même principe et la même limite, expliqué ci dessous en a :) et b :) .»]

Pour en déduire en fonction d'une limite fixée  $n$  et non  $2n$ , la fonction asymptotique  $n / (\ln n \cdot \ln 2n)$  qui estime le nombre d'entiers naturels non nul  $A' = p'$  premier, non congruent modulo  $P$ , ce qui  $\Rightarrow q = 2n - p'$ . Cela permettrait de prouver, que cette fonction « conséquence du TNP » pour toute limite  $n \geq 3$  fixée, ne peut être nulle ie : il existe toujours  $p' + q = 2n$ .

Note:

Il convient de remarquer que l'algorithme de Goldbach à la même propriété que celui d'Ératosthène pour une limite  $n$  fixée. La fonction  $G(n)$  indique le nombre d'entiers non nuls  $A \not\equiv 2n [P]$  avec  $P \leq \sqrt{2n}$ , cela implique le nombre d'entier  $q$  premiers  $\in [n; 2n]$ , par conséquent cette fonction  $G(n)$  vaut  $\approx \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n}{(\log 2n)}$ , c'est un corollaire du TNP.

[« On peut en déduire, que supposer un nombre fini de couples  $p + q = 2n$ , revient à supposer un nombre fini de nombres premiers  $q \in [n; 2n]$  à partir d'une limite fixée  $n > 150$ , quelque soit une des 8 familles  $Fam 30k + i$  ; fixée avec  $i \in (1, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29)$ , car il faudrait que tous les entiers  $A$  soient congrus à  $P$ , ce qui est impossible. Cela est dû à la propriété récurrente de l'algorithme de Goldbach, que l'on va expliquer ci dessous.

On peut montrer, que l'interprétation de la comète de Goldbach est une interprétation erronée « c'est un effet boule de neige » qui grossit et utilise la propriété récurrente du décalage d'un rang des congruences, dans l'algorithme de Goldbach ; ceci permet de comprendre et d'expliquer pourquoi le nombre de solutions ( $p+q = 2n$ ) augmentent de façon oscillatoire lorsque  $2n \rightarrow \infty$  par pas de 30, quelque soit l'une des 8 familles  $30k + i$  utilisée.

Les deux algorithmes fonctionnent de façon disjointe, pour une même limite  $n$  fixée avec sa famille correspondante. C'est à dire que les index de départ des deux algorithmes sont différents. »]

\*\*\*\*\*

Légende de l'illustration exécuté avec le crible de : Goldbach, Ératosthène et EG2 unifiés.

**Le crible G est une variante du crible d'Ératosthène, en utilisant les congruences pour une limite n :**  
 « Propriété que l'on va utiliser sur les entiers  $A$  impairs non nul de  $1$  à  $n$ , congrus ou pas à  $2n$  modulo  $P$  : si  $A$  est congru = 0 ; sinon = 1. »

Pour dans un premier temps, marquer les entiers  $A$  congrus à  $2n$  modulo  $P \leq \sqrt{2n}$ , où  $A$  et  $2n$  partagent le même reste dans la division par  $P$ , par conséquent et indirectement dans un deuxième temps : indiquer les multiples de  $P$  tel que  $2n - A = B$  de sa famille correspondante.

Propriété des congruences rappel,  $2n - A = B$  :

Il existe  $y$  et  $y'$  tel que :  $2n = P*y + R$  et  $A = P*y' + R \Rightarrow 2n - A = P*(y - y')$ ; donc  $P$  divise  $2n - A = B$ . Inversement si  $y$  n'existe pas, alors  $P$  ne divise pas la différence  $2n - A = B \Rightarrow q$  qui est donc un nombre premier  $\in [n; 2n]$ .

Ce document a pour but de vérifier pour une limite  $n$  fixée, les deux ensembles d'entiers naturels non nul  $A_n \leq n$ , définis ci-après en fonction de leur congruence, représentés par des **1** ou des **0**, en progression arithmétique de raison 30 et  $P$  un nombre premier  $\leq \sqrt{2n}$ .

Afin d'en déduire l'impossibilité d'infirmer cette conjecture.

Résumé :

**1.)** l'ensemble des entiers  $A_n$  avec les  $A' \not\equiv 2n [P]$  premiers  $p'$  vérifiant la conjecture  $p' + q = 2n$ .

**2.)** l'ensemble des  $A_n$  criblés, avec les  $A \not\equiv 2n [P]$  pas nécessairement premiers, mais qui précèdent un nombre premier ( $A + 30 = P''$ ) pour la même limite  $n$ , qui vérifieront la conjecture pour la limite suivante  $n = 15(k+1) + i$  ce qui donnera ( $p'' + q = 2n + 30 = 30(k+1) + 2i$ ). Ces deux ensembles sont

en moyenne de même densité pour une même limite  $n$  lorsque  $n \rightarrow \infty$ , de la forme  $15k + i$ , avec  $i \in \{1; 7; 11; 13; 17; 19; 23; 29\}$ .

On va utiliser les congruences et le principe d'Ératosthène pour cibler les entiers  $\leq n$ , tel que:  $A \equiv 2n[P]$  qui sera marqué **0**, sinon il reste marqué **1**

Le premier ensemble  $A_n$  ligne **E** « *Ératosthène* » qui vérifient la conjecture ( $p' + q = 2n$ ) pour la limite  $n$  ciblée par **G**, est constitué des entiers  $A'$  premiers  $p' = [1]$  (*non congru à  $2n \bmod P$* ),  $2n \not\equiv A[P]$ .  $E[1, 1, 1, 1, 1, 0, 0, 0, 1]$  les **1** ou **0** sont les nombres premiers  $p'$  d'Ératosthène ciblé ; ce qui permet de s'affranchir de la Famille complémentaire correspondante à  $q$  le complémentaire de  $p'$ .

Alors que ce même ensemble  $A_n$  ligne **E** :  $E[1, 1, 1, 1, 1, 0, 0, 0, 1]$  représente que les  $A \not\equiv 2n[P]$  avec  $A = 1$  ou  $0$  qui précèdent un nombre premier  $p''$ ; d'où  $(A+30)+q$  vérifiera la conjecture pour la limite suivante  $2n + 30$  ligne **E**, devenant ainsi  $A+30 = p''$  non congru modulo **P**, grâce au décalage d'un rang des congruences, lorsque la limite  $n$  augmente de 15, propriété récurrente de l'algorithme.

« Ces **A** ne sont pas obligatoirement premier, l'important est qu'ils soient non congruent à **P** ».

On obtiendra le résultat ( $p'' + q = 2n + 30$ ) pour la limite suivante ciblée:  $n+15 \Rightarrow 2n + 30$ .

Ce deuxième ensemble d'entiers  $A_n$ , à l'avantage de ne pas tenir compte uniquement des nombres premiers  $p' \leq n$ .

Il contient pour une même limite  $n$  fixée, les entiers  $A \in A_n$  premiers ou pas avec les  $A \not\equiv 2n[P]$  qui précèdent les nombres premiers  $p'$  suivant l'illustration ci-dessous.

**1a\_**):

**Première ligne du crible G**:

Ce sont les entiers  $A \in A_n$  non nul de  $[1 \text{ à } n]$  appartenant à une famille Fam(i); en progression arithmétique de raison 30, de premier terme  $(i) \in \{1, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29\}$  qui sont ciblés **A=0** par  $P \in P_{2n} \leq \sqrt{2n}$  pour une limite  $n = 15k$  ou  $15k+i$  en utilisant les congruences.

Les **A=1** sont les **A non congrus** modulo **P** avec  $2n$ : ( $2n \not\equiv A[P]$ ) d'où  $2n - A = q > n$ , premier car non divisible par **P**. On aura compris, que les **A=0**, sont les entiers qui partagent le même reste **R** avec  $2n$  dans la division euclidienne par **P**:  $2n \equiv A[P]$  ou encore,  $2n - A = B$  n'est donc pas premiers car congru **0** modulo **P**.

**2a\_**):

**Ligne E**: en dessous de la **ligne G**, c'est la **même ligne des  $A_n$  ciblés** pour la même limite  $n=15k$ , mais par le crible **E** Ératosthène, avec  $P \in P_n$  l'ensemble des nombres premiers  $\leq \sqrt{n}$ .

Les **A=1** sont les nombres premiers  $p' \leq n$ , **non congru (mod P)** et si ils sont **congrus (mod P)** ils seront marqués en rouge **1**.

Les **0** en rouge ou **0** en noir bien sûr, sont les multiples de **p**, **congrus ou pas (mod P)** par le crible **G**, ils ont la même importance dans cet algorithme, grâce à sa propriété récurrente lorsque la limite  $n$  augmente de 15.

Autrement dit dans l'illustration ci-dessous, un **1** de la **ligne G** au-dessus d'un **1 de la ligne E**, indique que ce nombre premier **1 = p'** d'Ératosthène est **non congru [P]**.

Ils formeront avec leur complémentaire **q premier**, un couple  $(p' + q) = 2n$ .

Dans le cas contraire un **0 ligne G** au-dessus d'un **1 ligne E**, devient **1 congru à P**, donc  $2n - p' \neq q$ .

Les **A = 1** ou **0** qui précèdent un nombre **A'** premier **p'** représenté par un **1** ou **1** dans la ligne **E** indiquent tout simplement les couples **(p''+q) = 2n + 30** qui vérifieront la conjecture pour la limite suivante **n = 15(k+1)...**

Cela permet de prendre en compte tous les entiers **A ≠ 2n[P]** qui précèdent les nombres premiers **P'**, c'est une égalité récurrente dû au décalage d'un rang des congruences sur leurs successeurs **A + 30** lorsque la limite **n** augmente de 15.

**Cette égalité rend impossible l'infirmation de la conjecture pour la limite suivante n = 15(k+1) + i.**

*La propriété récurrente de l'algorithme **G** ou égalité, est prouvée de façon élémentaire ci-après.*

*(« Elle est triviale, c'est une conséquence du TNP, mais faute de la connaissance de l'algorithme **G**, elle n'a pu être remarquée ni étudiée par la communauté Mathématique. »)*

*Les congruences permettent de cibler uniquement jusqu'à **n** au lieu de **2n**, par Fam(i) sans perte de généralité, cela permet formellement de prédire la vérification de la conjecture pour la ou les limites suivantes: **n = 15(k+1...+n) + (i)**, ce qui n'a jamais été fait et explique pourquoi le nombre de solutions augmentent lorsque  $n \rightarrow \infty$  «cet effet boule de neige».*

Dans l'illustration ci-dessous, nous avons à droite de la ligne **E**, le résultat réel de l'algorithme **EG2**. On en déduit une fonction asymptotique qui donne environ le nombre **A non congrus[P]** La fonction :

**G(n)** vaut  $\sim \frac{n}{\ln 2n}$ , Ce qui implique le nombre de **nombre de premiers q ∈ [n ; 2n]**, pour une limite **n = 15k + (i)** fixée ; ainsi que sa **Fam (i)** déterminée en fonction **de la forme de n**.

Cette fonction asymptotique ci-dessous, est une variante de la fonction **π(n)**, c'est un corollaire du TNP et elle ne peut être nulle, cela est expliqué en fin de document.

On utilisera son résultat, pour calculer le nombre de couples **(p'+q) qui a vérifié 2n** ou **(p''+q) le nombre de couples qui vérifiera 2n + 30**, illustré ci-dessous **a une variation près**.

Elle est une conséquence directe de cette propriété récurrente des congruences, qui se décalent d'un rang et de la fonction **π(n)**.

Cette fonction est caractérisée par ces trois algorithmes ainsi que part la propriété récurrente de l'algorithme **G** dans les congruences **par Famille (i)**:

Car en prenant le résultat de la fonction **G(n)**, alors le nombre de couples **(p'+q)** décomposant **2n**; ou **2n + 30** devient **G(2n)**, elle vaut  $\approx \lim_{n \rightarrow +\infty} \mathfrak{i} \frac{G(n)}{\ln(n)}$  une estimation minimum de nombre de premiers

**p' = (A' ≠ 2n[P])**  $\Rightarrow$  un couple **p' + q = 2n**.

**Où la solution générale:** qui est la conséquence des deux fonctions du TNP, indique que le nombre de couples **p' + q = 2n** ; est équivalent à  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathfrak{i} \frac{n}{(\ln(n)*\ln(2n))}/2$ , Expliqué au début.

Plus simplement, connaissant le nombre de premiers **p'** ciblé par Ératosthène  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathfrak{i} \frac{\pi(n)}{\ln(n)}$  donnera un approximation du nombre de couples **p' + q = 2n** inférieur au résultat réel. Ce n'est qu'une conséquence des deux algorithmes utilisant le même principe de fonctionnement .

**Illustration par famille, où on utilisera la fonction Gn par le Ln de Gn :**

«Plus généralement, comme on travaille dans une **Fam 30k + i** il suffit simplement d'utiliser :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \zeta \frac{(n/30)}{\ln(n/30)}$$

Limite **n =15k** , en progression arithmétique de raison 15.

Les **1** montrent le début du décalage d'un rang des congruences de la **ligne G** pour chaque changement de limite: **n = 15(k+1)**; alors que la ligne **E**, ne se décale pas bien évidemment.

*Ce qui permet de prédire la vérification de la conjecture sur plusieurs limites 2n +30 successives.*

**Fam(i)** = fam 30k +7 qui sont criblés par **G** et **E**: 7; 37; 67; 97; 127; 157; 187....etc 30k +7

le résultat réel du nombre de couples, qui vérifient la conjecture, est indiqué par le crible **eg2**

**G[1, 1, 0, 1, 0, 1, 0, 1, 1, 0]** n = 300 ; 600 EG: = 4 p'+q; fonct: **G(n) = 6**; **G(n) /ln G(n) = 3,348...**

**E[1, 1, 1, 1, 1, 0, 0, 0, 1]** eg2 réel = 4 et pour n+15, on aura avec **G(n) = 4**; **G(n) /ln G(n) = 2,885...**

**G[0, 1, 1, 0, 1, 0, 1, 0, 1, 1]** n+15= 315; 630 EG: = 5 p'+q fonct **G(n) = 6**; **G(n) /ln G(n) = 3,348....**

**E[1, 1, 1, 1, 1, 0, 0, 0, 1]** eg2 réel = 4 le dernier 1 ne permet pas de voir si il précède un 1 = P' ou 0

**G[1, 0, 1, 1, 0, 1, 0, 1, 0, 1]** n=330; 660 EG: = 4 p'+q; **G(n) = 7**; **G(n) /ln G(n)**

**E[1, 1, 1, 1, 1, 0, 0, 0, 1, 1]** eg2 réel = 6;

**G[1, 1, 0, 1, 1, 0, 1, 0, 1, 0, 1]** n=345; 690 EG: = 5 p'+q; **G(n) = 7**; **G(n) /ln G(n)**

**E[1, 1, 1, 1, 1, 0, 0, 0, 1, 1]** eg2 réel = 5;

**G[0, 1, 1, 0, 1, 1, 0, 1, 0, 1, 0, 1]** n=360; 720 EG = 4 p'+q; **G(n) = 7**; **G(n) /ln G(n)**

**E[1, 1, 1, 1, 1, 0, 0, 0, 1, 1, 1]** eg2 réel = 6

**G[1, 0, 1, 1, 0, 1, 1, 0, 1, 0, 1, 0]** n=375; 750 EG: = 5 p'+q; **G(n) = 7**; **G(n) /ln G(n)**

**E[1, 1, 1, 1, 1, 0, 0, 0, 1, 1, 1, 1]** eg2 réel = 5 [1, 0, 1, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 0]

**G[1, 1, 0, 1, 1, 0, 1, 1, 0, 1, 0, 1, 0]** n=390; 780 EG: = 6 p'+q; **G(n) = 8**; **G(n) /ln G(n)**

**E[1, 1, 1, 1, 1, 0, 0, 0, 1, 1, 1, 1]** eg2 réel = 6 [1, 1, 0, 1, 1, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 1]

**G[0, 1, 1, 0, 1, 1, 0, 1, 0, 1, 0, 1, 0, 1]** n=405; 810 EG: = 5 p'+q; **G(n) = 8**; **G(n) /ln G(n)**

**E[1, 1, 1, 1, 1, 0, 0, 0, 1, 1, 1, 1, 1]** eg2 réel = 6 [0, 1, 1, 0, 1, 1, 0, 0, 0, 1, 0, 1, 1]

**G[0, 0, 1, 1, 0, 1, 1, 0, 1, 0, 1, 0, 1, 0]** n=420; 840 EG: = 5 p'+q; **G(n) = 8**; **G(n) /ln G(n)**

**E[1, 1, 1, 1, 1, 0, 0, 0, 1, 1, 1, 1, 1]** eg2 réel = 6 [0, 0, 1, 1, 0, 1, 0, 0, 0, 1, 0, 1, 1]

**G[1, 0, 0, 1, 1, 0, 1, 1, 0, 1, 0, 1, 0, 1, 0]** n=435; 870; EG: = 6 p'+q; **G(n) = 8**; **G(n) /ln G(n)**

**E[1, 1, 1, 1, 1, 0, 0, 0, 1, 1, 1, 1, 1]** eg2 réel = 6 [1, 0, 0, 1, 1, 0, 0, 0, 0, 1, 1, 0, 1, 0]

**G[0, 1, 0, 0, 1, 1, 0, 1, 1, 0, 1, 0, 1, 0, 1, 0]** n=450; 900 EG: = 5 p'+q ; **G(n) = 8**; **G(n) /ln G(n)**

**E[1, 1, 1, 1, 1, 0, 0, 0, 1, 1, 1, 1, 1, 0]** eg2 réel = 6 [0, 1, 0, 0, 1, 1, 0, 0, 0, 0, 1, 1, 0, 1, 0]

Pour n = 465 j'aurais **5 p'+q** en réel, car le dernier **A = 0** ligne **G**  $\Rightarrow$  **0** ligne **E** : congru à **2n [P]**.

En règle générale le nombre de **p'+q** et différent d'une unité avec le nombre de **p'+q** de la limite précédente. La fonction **(460/30) / Ln (460/30)** donne **5,53**.

Il est clair que pour infirmer la conjecture, il faudrait que tous les nouveaux  $A_n < , 1$ , soient tous congrus à  $2n \bmod P$  ! Ce qui veut dire qu'il n'y aurait plus de nouveau nombres premiers extraient par l'algorithme E 'Ératosthène' ?

Or, les deux algorithmes ne peuvent être synchronisés car ils sont disjoints, quelque soit cette limite  $n$  ...!

Il n'ont pas les même index pour cibler et il faudrait pouvoir utiliser tous les restes  $R$  des limites  $n$  précédentes ce qui est absurde, car les restes changent pour chaque limite  $n+15$ , mais de plus les nombres premiers ,1, congrus mod  $P$  d'une limite  $n-15$  précédente, vont se trouver libérés de leur congruence pour cette limite suivante, les congruences se décaleront ...etc etc ; d'où cet effet boule de neige lorsque la limite  $n$  tends vers l'infini. Car le nombre d'entiers  $A$  non congrus à  $P$ , ainsi que le nombre de premiers va en augmentant !

1.g

### Propriété récurrente de l'algorithme utilisant les congruences:

**A**n ensemble des entiers naturels non nul, en progression arithmétique de raison 30

**B2n** ensemble des entiers naturels complémentaires, appartenant à  $[n ; 2n]$  en progression arithmétique de raison 30 tel que  $2n - A = B$  qui ne sera pas nécessairement de la même famille **Fam i** en fonction de la forme de  $n = 15k + i$ .

**P2n** ensemble des nombres premiers  $\leq \sqrt{2n}$ .

**P'p** ensemble des nombres premiers  $\leq n$  tel que:  $5 < P' \leq n$ .

**[Théorème :** Pour tout  $A \in A_n$  avec  $P \in P_{2n}$  ; et tel que  $2n \not\equiv A \pmod{P}$  où  $A$  précède  $A+30 = P'$ , la **CG** sera vérifiée quel que soit la limite  $n = 15(k+1) + i$ , succédant à la limite  $n=15k + i$  ayant été vérifiée.]

(«On peut bien entendu, augmenter  $n$  de 1 tel que  $n=15k+1$  et se reporter à la limite  $n'$  précédente avec sa **Fam(i)** correspondante, ayant vérifiée la **CG**.»

**On peut montrer et illustrer cette propriété quel que soit la Fam(i) fixée** . Lorsque  $n$  augmente de 15, les congruences se décalent d'un rang sur leur successeur, dans un intervalle fermé et délimité par la limite  $n$  avec le nombre d'éléments fixés: ciblés par les nombres  $P \in P_{2n}$ , qui sont limités par la racine de  $2n$ .»)

**Supposons** : que ce décalage d'un rang des congruences modulo 30 ne se produise pas sur leur successeur **A+30**, ou que cette égalité soit fausse. On a deux cas possible :

**Premier cas** :  $2n \equiv A \pmod{P}$  ce qui  $\Rightarrow P \in P_{2n}$  divise la différence  $B \in B_{2n}$ , donc **B = C** est multiple de **P** pour la limite  $n = 15k + i$  fixée. (« propriété des congruences bien connue,  $2n = Py + A$  ; il existe  $y$  et  $y'$  tel que :  $2n = P*y + R$  et  $A = P*y' + R \Rightarrow 2n - A = P*(y - y')$ ; d'où **P** divise  $2n - A$ . »)

Lorsque la limite  $n$  augmente de 15, nous avons donc  $(2n+30) \equiv (A+30) \pmod{P}$  ce qui  $\Rightarrow P$  divise toujours cette différence **C** multiple de **P** qui est toujours la même !

Le contraire serait absurde et contraire au TFA.

Ce nombre **A+30** premier ou pas, ne pourra donc vérifier la conjecture pour la nouvelle limite  $n$  augmenté de 15 soit **15(k+1) + i**, car son complémentaire :  $(2n+30) - (A+30) = B = C$  qui est le même, est toujours multiple de **P**, donc non premier **C ≠ q**.

**Deuxième cas** :  $2n \not\equiv A \pmod{P}$  donc **P** ne divise pas la différence  $2n - A$ , ce qui  $\Rightarrow 2n - A = B = q$  qui n'est pas divisible par **P**, c'est donc un nombre premier **q** qui a été ciblé par **G** lors de la limite  $n$ .

Or  $(2n+30) - (A+30) = q$  premier est toujours le même, non divisible par **P**.

Là aussi, si le décalage des congruences ne s'effectuait pas, ce ( $A+30$ ) qui était congru à  $2n \pmod{P}$  lors de cette limite  $n$  précédente ; pour  $n+15$  il serait encore congru à  $(2n+30) \pmod{P}$  d'où :  $(2n+30) - (A+30) = q$  qui est pourtant le même, il deviendrait divisible par  $P$ , tout autant absurde et contraire au TFA.

D'où et dans ce cas, lors de la limite  $n = 15k + i$  fixée, même si on avait  $A \neq P' = 0$  «non congru à  $P$ » dans Ératosthène, mais qu'il précède  $(A+30)' = P' \in P'p$  ; suite au décalage d'un rang des congruences, ce nombre  $(A+30)' = P'$  devient non congru  $[P]$ , il vérifiera donc la CG pour la nouvelle limite  $n = 15(k+1) + i$ .

Il formera avec  $q$ , un couple  $P' + q = 2n + 30$ , car :  $(2n+30) - (A+30) = q$ .

(« Autrement dit, on peut dire que  $B = C$  ou  $q$  ont pour antécédent  $A$ . Si  $2n \equiv A \pmod{P}$  ;  $2n - A = B$  est un multiple de  $P$ , ayant pour antécédent  $A$  ; sinon si  $2n \not\equiv A \pmod{P}$ ,  $2n - A = B$  est un nombre premier  $q$ , ayant pour antécédent  $A$  non congruent  $[P]$ .

C'est à dire que les nombres complémentaires  $B2n$ , dépendent de la congruence des nombres  $An..$  !  
En référence au début du sujet, tirer un entier  $A$  et dire que c'est deux événements indépendants, en tirant inutilement un entier  $B$  est absurde.»)

On en déduit le constat suivant :

Supposons que la conjecture soit fausse pour la limite  $2n + 30$  ou  $30k + 2i$  :

- Il ne faut pas de  $A$  premiers ou pas, qui soit non congrus  $(\pmod{P})$  précédent  $A = P'$ . Il ne faut pas non plus de  $P'$  consécutifs non congrus  $(\pmod{P})$  dans Ératosthène .
- le crible est récursif, il recommence au début de chaque limite  $n+15$  avec les index qui se décalent d'un rang.
- Il faudrait donc pouvoir réutiliser les restes  $R$  de  $2n$  par  $P$ , pour la limite  $2n + 30$  afin d'être à peu près sûr, que cette supposition est vraie et ne soit pas invalidée par un de ces deux cas ci-dessus...
- Or il est impossible d'utiliser pour  $2n + 30$ , les restes  $R$  de  $2n$  ainsi que les  $R$  des limites précédentes  $2n - 30$  et  $2n - 60$  ...etc.. La division de  $2n+30$  par  $P$ , ne donne qu'un reste  $R$  par nombre premier  $P$  qui cible et ceci : serait contraire au décalage d'un rang, 2 rang, 3 rang ...etc des congruences lors des limites précédentes  $n = 15(k-1)$ ,  $15(k-2)$ ,  $15(k-3)$  ... etc lorsque  $n$  augmente de 15, c'est à dire aucun entier  $A \not\equiv [P]$  qui précédent un entier  $A' = P'$ , suite à la propriété récurrente et démontrée de l'algorithme.
- Le nombre de nombres premiers  $P$  qui criblent est limité par la racine de  $2n$ , ou  $2n + 30$  dans cette supposition, ce qui ne change rien au nombre d'entiers  $A$  congrus à  $P$ , le contraire invaliderait le TNP. Il faudrait par conséquent doubler voir tripler le nombre d'entiers premiers  $P$  qui criblent, ce qui est absurde.
- Dernière solution, il faut par conséquent marquer tous les  $A$  par ces nombres  $P$  qui criblent, ie : il faut qu'ils soient tous congrus à  $(2n+30) \pmod{P}$  ... !
- (« Ce qui est absurde ; il n'y aurait plus de nombres premiers  $q \in [n ; 2n]$  pour cette limite  $n+15$ , alors qu'il y en avait  $n / \log 2n$ , lors de la limite  $n - 15$  précédente ...etc selon le TNP ; cela serait contraire au TFA, d'où une variation quasiment nulle de ce cardinal de nombres  $q$  lors de cette nouvelle limite  $n+15$ . »)
- Par conséquent ceci est clairement impossible ! Le nombre de premiers  $P$  qui marquent les  $A$  congrus est limité par la racine de  $2n$  et cela depuis le début de la limite  $n \geq 150$  avec le décalage des congruences lors des limites précédentes ; il viendrait aussi que l'égalité démontrée ci-dessus serait fausse ! Or les index de départ des deux (algorithmes, cribles) ne sont pas les mêmes, ils sont disjoints. « voir ci-après page 5 »

(« On cible par  $Fam(i)$ , et on veut prouver que ceci est vraie en utilisant une seule  $Fam(i)$ , au lieu des 8 au maximum et de 3 au minimum en fonction de la forme de  $n$  avec sa limite  $\geq 150$ . »)

- Conclusion la conjecture ne peut être infirmée, sans contredire le TNP et le TFA !
- D'autant que le décalage des congruences et sa propriété récurrente qui auront vérifier la conjecture lors des limites précédentes , va se produire sur plusieurs limites consécutives :  $2n + 30 \dots + + \dots + 30$  !
- Mais cette propriété, fait en sorte que le cardinal de la fonction  $\pi(n)$  ainsi que celle du TNP, qui a été défini et vérifié pour une limite  $n = 15k + i$ , ainsi que pour  $n = 15(k-1) + i$  qui donne le résultat pour la limite  $n = 15k + i$  ne peut plus être modifié , a une exception près pour la ou les limites suivantes :  $n = 15(k+1)(+2\dots\text{etc}) + i$ , qui par supposition infirmerait la conjecture ! Le contraire serait absurde.

- Cela modifierait clairement de façon importante ce cardinal de nombre premiers **q dans [n ; 2n]** ayant été défini et vérifié lors des deux limites précédentes ou antérieur..., ainsi que pour la fonction **G(n)** et sa fonction d'estimation ci-dessous !
  - *Est-elle indécidable ? Il faudrait qu'à une certaine limite **n**, donc pour **2n** il ne soit plus possible de vérifier les résultats des deux ensembles de A pour toutes les **Fam(i)**.*
  - *Or cela ne serait pas suffisant, car suite à ce décalage qui se produit sur plusieurs limites successives, on a déjà les résultats des limites **n** précédentes, pour ces limites **2n+30, 2n + k\*30** et on ne peut pas redescendre indéfiniment en arrière, car on tombe sur les résultats qui ont vérifiés la conjecture, principe de la descente infinie.*
  - *Par conséquent, on peut aussi en déduire que la fonction **G(n)** qui vaut  $\sim \lim_{Gn \rightarrow +\infty} \frac{Gn}{\ln(Gn)}$  donnant le nombre de couples **P'+q = 2n - 30** qui implique pour la limite suivante le nombre de couples **P'+q = 2n**, donnera tout autant l'estimation du cardinal de **P'+q = 2n** qui vient d'être vérifiée, du fait de la conséquence de cette récurrence, ce nombre de couples vérifieront **2n+30**, on en déduit que cette fonction ne sera jamais nulle, qui plus est en utilisant toutes les **Fam(i)**, au lieu d'une seule .....*
  - *On peut d'ailleurs se limiter au minimum, à la fonction  **$\pi(n)$**  par famille **i**, tel que le nombre de couples **P'+q = 2n**, vaut  $\sim \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\pi(n)}{\ln(2n)}$  conséquence de la fonctions ci-dessus avec la fonction  $\frac{n}{(\ln(n)*\ln(2n))}/2$*
  - *En ne prenant en compte que le nombre de nombres premiers **p'** par **fam(i)** avec **n / 30**;*
  - *Par exemple limite **2n = 600** ; nombre de **P' = 7** pour la **fam(i = 7) < n = 300** :*
  - $\frac{7}{\ln(n/30)} = 3,0401....$  couples **P'+q = 2n**.
- \*\*\*\*\*

#### Annexe 1:

**La fonction 2 du théorème de Goldbach est une conséquence directe du TNP:** ( $\log = \text{logarithme naturel}$ )

$G(n)$ : la fonction de compte du nombre de nombres de A  $\neq 2n[P] \Leftrightarrow$  premiers  $q \in [n ; 2n]$

**Corollaire :**  $G(n)$  vaut  $\sim \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n}{(\log 2n)}$

Le TNP dit que  $\pi(n) = \frac{n}{(\log n)^+} o\left(\frac{n}{\log n}\right)$ ,

donc le nombre de nombres premiers dans  $]n, 2n]$  vaut

$$\pi(2n) - \pi(n) = \left( \frac{2n}{\log(2N)} - \frac{n}{\log N} \right) + o\left(\frac{n}{\log n}\right)$$

$$= n \times \left( \frac{2}{\log 2n} - \frac{1}{\log n} \right) + o\left(\frac{n}{\log n}\right)$$

$$= n \times \frac{2 \log n - \log(2n)}{\log(2n) \log n} + o\left(\frac{n}{\log n}\right)$$

$$= \frac{n}{(\log 2n)} + o\left(\frac{n}{\log n}\right)$$

Tout nombre pair  $2n \geq 180$  peut s'écrire comme la somme de deux nombres premiers ( $P'+q$ ) appartenant à une famille  $Fam(i)$  tel que définie en début de document.

**Heuristiquement :**  $C_2 \frac{G(n)}{\ln G(n)}$ ; où  $C_2 \approx 1,320323\dots$  constante premiers jumeaux.

On peut appliquer **en fonction de  $G(2n)$  par  $Fam(i)$** , directement :  $\lim_{n \rightarrow +\infty} i \frac{G(n)}{\ln G(n)} * C_2$

Cette fonction n'est qu'une conséquence du TNP. Sinon il faut utiliser le facteur correspondant au nombre de familles qui décomposent  $2n$ .

Exemple pour la limite  $n = 15k + 7$ , il n'y a que trois familles qui décomposent  $2n = 30k+2$ .

La fonction sera donc utilisée avec le coefficient de  $0,375 = 3/8$ . nombres minimum de solutions ( $p'+q = 2n$ )

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} i \frac{G(n)}{\ln G(n)} * C_2 * 0,375 .$$

Exemple pour  $n = 496$ ,  $2n = 992$ , nombre de premiers  $[n ; 2n]$  des 3 familles  $\{1, 13 \text{ et } 19\} = 33$ .

Alors que  $\pi(2n - n)$  vaut : 73

Résultat :

$(33 / \ln 33) * 1,320323 = 12, \dots$  couples, pour un réel de 13.

$(73 / \ln 73) * 0,375 * 1,320323 = 8, \dots$

Lorsque  $2n$  tend vers l'infini, il vaut mieux utiliser la fonction générale avec  $\pi(2n)$  et l'un des 3 coefficients  $(0,375 ; 0,5 ; 0,75)$  et aucun coefficient si  $2n = 30k$ .

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \square \frac{\pi(2n)}{\ln \pi(2n)} * C_2 * 0,5 .$$

Exemple  $2n = 1\ 000\ 000\ 010$  la fonction ci-dessus avec **0,5** de coefficient du fait qu'il y a 4 familles  $\{1, 7, 13, \text{ et } 19\}$  qui criblent, donne comme résultat : 1891734 couples < 2422662 réels

Pour  $2n = 3\ 000\ 000\ 000$  on aura par la fonction **sans coef** car  $2n = 30k$  :  $\approx 10\ 150\ 924$  pour un réel 12 224 533

Pour **2n + 2**, on aura par la fonction avec le coef de **0,375** :  $\approx 3\ 806\ 596$  pour un réel 4 584 281 .

Ce n'est que la conséquence des 8  $Fam(i)$  divisées par 8 et multipliées par 3, conséquence du TNP caractérisé par le crible Ératosthène et sa fonction d'estimation de  $\pi(n)$ .

On en déduit que la variation du nombre de couples qui décomposent **2n**, sera minime pour **2n + 2**.

Il est par conséquent impossible de l'existence d'un entier **2n**, où la fonction ci-dessus soit nulle étant donnée qu'elle a vérifiée la conjecture lors des limites précédentes **n = 15(k-1, -2, -3...etc)** ayant donné le résultat de la limite suivante **n = 15k** ainsi que le résultat pour les limites suivantes **n = 15(k+1 +..etc)** **suite à la propriété récurrente**, supposée infirmer la conjecture.

\*\*\*\*\*

**En information complémentaire :**

Sont donnés les différents indexs (idx) de départ des deux fonctions relatives aux cribles (programmes) de **G** et **E** pour :  $15k = 900$  et **fam 7** ;

Afin de comprendre la différence entre les deux fonctions qui criblent et le principe de base du fonctionnement.

Les index de départ pour chaque premier **P** du crible **G** ; limite  $n = 900 + i$ ,  $i = 7$  et  $fam = 7$  : relatif aux  $j \% 30 == 7$  «du premier exemple ci-dessous.»

Exemple:  $2n = 1814$ ,  $1814 \bmod 7 = R = 1$  ; on calcul l'index de départ :  $1 + 2P = 15$  ;  $+ 2p = 29$  ;  $+ \dots + 2p = 127$  congru  $7[30]$

$127 \% 30 = Fam7$ ;  $idx = 127 \% 30 = 4$  l'index de 127, que l'on marque d'un 0, puis par pas de 7  $\rightarrow 907 \% 30$ .

On réitère avec  $P = 11$  etc...etc

#### Goldbach :

$P = 7$ ,  $idx = 4$  puis par pas de 7 de  $31 \rightarrow n \% 30$

$P = 11$ ,  $idx = 10$  puis par pas de 11 de  $17 \rightarrow n \% 30$

$P = 13$ ,  $idx = 0$  puis par pas de 13 de  $19 \rightarrow n \% 30$

$P = 17$ ,  $idx = 3$  puis par pas de 17 de  $29 \rightarrow n \% 30$

$P = 19$ ,  $idx = 14$  puis par pas de 19

$P = 23$ ,  $idx = 15$  puis par pas de 23

$P = 29$ ,  $idx = 9$  puis par pas de 29

$P = 31$ ,  $idx = 22$  puis par pas de 31

$P = 37$ ,  $idx = 9$  puis par pas de 37

#### Ératosthène mod 30: (on a besoin que des 4 couples de premiers [7;31])

dans Ératosthène  $7*31 = j$  ;  $j \% 30 == fam$ , partent de  $idx = 7$ , puis par pas de 7 et

dans Ératosthène  $11*17 = j$  ;  $j \% 30 == fam$ , partent de  $idx = 6$  puis par pas de 11 et

dans Ératosthène  $13*19 = j$  ;  $j \% 30 == fam$ , partent de  $idx = 8$  puis par pas de 13 et

dans Ératosthène  $23*29 = j$  ;  $j \% 30 == fam$ , partent de  $idx = 22$  puis par pas de 23 et

**chaque j est donc un produit == fam7[30] contrairement à Goldbach qui ne part pas du même idx. Et 31 > racine de 907, ne marquera rien, ainsi que 23 et 29 qui ne marquent que l'idx de départ. En dernier  $P = 41$ ,  $idx > 914$  d'où il ne peut cribler.  $P \leq \sqrt{1814} = 42, \dots$**

Dans Goldbach : Si  $R$  est pair,  $j = R + k*P$ . (« voir programme si  $R$  est impair  $j=R$  puis  $+ 2*P \dots$  etc.»)

Si  $j \% 30 == fam$  ; alors :  $j \% 30 =$  début d'index =  $idx$ . Puis :

$P$  part de cet  $idx$ , où on remplace le **1** par **0** puis par pas de  $P$ ,  $\rightarrow n \% 30$ . Ensuite on réitère avec  $P$  et son  $R$  suivant.

En fonction de la forme de **n**; on appliquera un coefficient multiplicateur.

On utilise ces coefficients **en fonction des Fam(i)** de nombres premiers criblées et  $n \geq 150$  :

On a 8 fam(i)  $\equiv 1$  ou **P[30]** avec  $P$  appartenant à [7 ; 29]

Pour **n = 15k + n'**  $\rightarrow \{1,7,11,13,2,4,8,14\}$  coef = 0,375 ; **ce qui donne 3 fam(i) sur 8** qui peuvent être criblées.

les 5 autres ne peuvent donc pas donner de couples  $p+q = 2n$  ; car leur complémentaire serait multiple de 3 ou de 5

Pour **n=15k + n'**  $\rightarrow \{5,10\}$  coef = 0,5 ; **ce qui donne 4 fam(i) sur 8** qui peuvent être criblées

Pour **n = 15k + n'**  $\rightarrow \{3,6,9,12\}$  coef = 0,75 ; **ce qui donne 6 fam(i) sur 8** qui peuvent être criblées

Pour  $n=15k + n'$ ,  $n' = 0$  pas de coefficient : **les 8 fam(i) peuvent être criblées**

**Il y a donc 15 formes de n'. Mais on peut travailler qu'avec une fam (i) sans perte de généralité**

\*\*\*\*\*

### Autre illustration :

Illustration **Crible G** pour  $n = 12000$  ; fam 7[30]: « 7, 37, 67, 97, 127, ....etc ..11977 < 12000.

Le résultat de ce criblage de la fam 7[30] donnera la famille 23 [30] complémentaire, soit : **q premier mais = 23[30]**.

Le cinquième élément  $I = 127$  non congru  $12000 [P_i]$  donne  $q = 11873$ .  $127$  est l'antécédent de  $11873$  par la fonction  $G$ .

Vérifions le nombre de A non congrus **modulo P** : les nombres  $A \neq P' = 0$  et les  $A = P' = 1$  qui précèdent un nombre premiers  $P'$  congru ou pas, marqués **1,1**; illustrés ci-dessous par **0** ou **1**. Ce qui permet de comprendre pourquoi cette conjecture ne pouvait avoir de contres exemples.

On peut même vérifier avec ce criblage ci-dessous, jusqu'à quelle limite  $2n + k*30$  la conjecture serait vérifier sans avoir besoins de procéder à un autre test de criblage et ainsi de donner le nombre de couples  $(P+q)$  qui vérifieront les limites  $2n + k*30$  suivantes, avec avec les deux lignes de cibles que l'on peut superposer  $G$  sur  $E$

### **Illustration :**

### **Crible G des congruences . limite $n = 12000$**

Et ligne en dessous pour la même **fam = 7**:

### *Crible E limites n = 12 000*

1, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 1, 1, 0, 1, 0, 0, 1, 0, 1, 0, 1, 0, 1, 0, 1, 1, 0, 0, 0 ]  
1, 1, 0, 0, 0, 1, 1, 1, 1, 0, 1, 1, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 1, 0, 0, 0 ]

Résultat, au minimum pour cette famille : **60 couples** sur  $\approx 148$  nombres premiers  $q$ , vérifieront la conjecture pour  $2n + 30$  ; dont quasiment autant d'entiers  **$A = 0$  non premiers  $P'$ , mais non congrus (modulo  $P$ )** qui précèdent un nombres premiers  $P'$  **congru ou pas**, qui vont se décaler d'un rang lors des limites suivantes, impliquant l'impossibilité d'infirmer cette conjecture pour la ou les limites suivantes ..!

D'où l'intérêt de cet algorithme dans les congruences par rapport à Ératosthène classique , dont le résultat du nombre de premiers dans  $[n,2n]$  n'a que peu « d'intérêt » puisqu'ils dépendent de leurs antécédents  $A \neq 2n[P]$  .

\*\*\*\*\*

**Fam (i) = 1** de 300 à 600 : 1 n'est pas premier mais pour l'algorithme on l'utilise, pour vérifier  $2n - 1$ .

**A = 1, 31, 61, 91, 121, 151, 181.....fonction:  $1,55456 * (G(n) / \ln G(n))$**

la couleur du **1** montre le décalage d'un rang pour chaque limite  $n+15$ .

Crible G :300 [1, 1, 0, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 0] **7 couples p'+q** pour vérifier la limite  $15(k+1)$

Crible E :300 [1, 1, 1, 0, 0, 1, 1, 1, 1, 1] **6 couples réel, p+q=600** [1, 1, 0, 0, 1, 1, 1, 1, 0]

Crible G: 315[0, 1, 1, 0, 1, 1, 1, 1, 1, 1] **6 couple p'+q**

Crible E: 315 [1, 1, 1, 0, 0, 1, 1, 1, 1, 1] **7 couples réel** [0, 1, 1, 0, 0, 1, 1, 1, 1]

Crible G: 330[1, 0, 1, 1, 0, 1, 1, 1, 1, 1] **5 couples p'+q**

Crible G: 330[1, 1, 1, 0, 0, 1, 1, 1, 1, 0] **7 couples réel** [1, 0, 1, 0, 0, 1, 1, 1, 1, 0]

Crible G: 345[0, 1, 0, 1, 1, 0, 1, 1, 1, 1] **6 couples p'+q**

Crible E: 345[1, 1, 1, 0, 0, 1, 1, 1, 1, 0] **5 couples réel** [0, 1, 0, 0, 0, 1, 1, 1, 1, 0]

Crible G: 360[1, 0, 1, 0, 1, 1, 0, 1, 1, 1] **6 couples p'+q**

Crible E: 360[1, 1, 1, 0, 0, 1, 1, 1, 1, 0] **7 couples p'+q réel** [1, 0, 1, 0, 0, 1, 0, 1, 1, 1, 0, 1]

Crible G: 375[0, 1, 0, 1, 0, 1, 1, 0, 1, 1, 1] **5 couples p'+q**

Crible E: 375[1, 1, 1, 0, 0, 1, 1, 1, 1, 0] **6 couples p'+q réel** [0, 1, 0, 0, 0, 1, 1, 0, 1, 1, 0, 1]

Crible G: 390 [0, 0, 1, 0, 1, 0, 1, 1, 0, 1, 1, 1] **4 couples p'+q**

Crible E: 390[1, 1, 1, 0, 0, 1, 1, 1, 1, 0, 1] **5 couples p'+q réel** ( $1,55456 * G(n) / \ln G(n) = 5,9806....$ )

Crible G: 405[1, 0, 0, 1, 0, 1, 0, 1, 1, 0, 1, 1] **5 couples p'+q**

Crible E: 405[1, 1, 1, 0, 0, 1, 1, 1, 1, 0, 1] **5 couples p'+q**

Crible G: 420[1, 1, 0, 0, 1, 0, 1, 0, 1, 1, 1, 1] **5 couples p'+q**

Crible G: 420[1, 1, 1, 0, 0, 1, 1, 1, 1, 0, 1, 0, 0] **6 couples p'+q**

Crible G: 435[0, 1, 1, 0, 0, 1, 0, 1, 1, 1, 0, 1, 1] **4 couples p'+q**

Crible E: 435[1, 1, 1, 0, 0, 1, 1, 1, 1, 0, 1, 0, 0] **5 couples p'+q**

Crible G: 450[0, 0, 1, 1, 0, 0, 1, 0, 1, 1, 0, 1, 1] **4 couples p'+q**

Crible G: 450[1, 1, 1, 0, 0, 1, 1, 1, 1, 0, 1, 0, 0] **5 couples p'+q**

Crible G: 465[1, 0, 0, 1, 1, 0, 0, 1, 0, 1, 0, 1, 0, 1] **3 couples p'+q**

Crible E: 465[1, 1, 1, 0, 0, 1, 1, 1, 1, 0, 1, 0, 0, 1] **5 couples p'+q**

Crible G: 480[0, 1, 0, 0, 1, 1, 0, 0, 1, 0, 1, 0, 1, 1, 0, 1] **6 couples p'+q**

Crible E: 480[1, 1, 1, 0, 0, 1, 1, 1, 1, 0, 1, 0, 0, 1, 0, 1] **3 couples p'+q**

Crible G: 495[0, 0, 1, 0, 0, 1, 1, 0, 0, 1, 0, 1, 0, 1, 0, 1, 0, 0] **3 couples p'+q**

Crible E: 495[1, 1, 1, 0, 0, 1, 1, 1, 1, 0, 1, 0, 0, 1, 0, 1, 0, 0] **6 couples p'+q**

Crible G: 510[1, 0, 0, 1, 0, 0, 1, 1, 0, 0, 1, 0, 1, 0, 1, 1, 0]

Crible E: 510[1, 1, 1, 0, 0, 1, 1, 1, 1, 0, 1, 0, 0, 1, 0, 1, 0, 0]

Crible G: 525[1, 1, 0, 0, 1, 0, 0, 1, 1, 0, 0, 1, 0, 1, 0, 1, 0, 1, 1]

Crible E: 525[1, 1, 1, 0, 0, 1, 1, 1, 1, 0, 1, 0, 0, 1, 0, 1, 0, 0]

Crible G: 540[0, 1, 1, 0, 0, 1, 0, 0, 1, 1, 0, 0, 1, 0, 1, 0, 1, 0, 1, 1]

Crible E: 540[1, 1, 1, 0, 0, 1, 1, 1, 1, 1, 0, 1, 0, 0, 1, 0, 0, 0]

Crible G: 555[1, 0, 1, 1, 0, 0, 1, 0, 0, 1, 1, 0, 0, 1, 0, 1, 0, 1, 0, 1]

Crible E: 555[1, 1, 1, 0, 0, 1, 1, 1, 1, 1, 0, 1, 0, 0, 1, 0, 0, 0]

Crible G: 570[0, 1, 0, 1, 1, 0, 0, 1, 0, 0, 1, 1, 0, 0, 1, 0, 1, 0, 1, 1]

Crible E: 570[1, 1, 1, 0, 0, 1, 1, 1, 1, 1, 0, 1, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 1]

Crible G: 585[0, 0, 1, 0, 1, 1, 0, 0, 1, 0, 0, 1, 1, 0, 0, 1, 0, 1, 0]

Crible E: 585[1, 1, 1, 0, 0, 1, 1, 1, 1, 1, 0, 1, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 1]

Crible G: 600[0, 0, 0, 1, 0, 1, 1, 0, 0, 1, 0, 0, 1, 1, 0, 0, 1, 0, 1, 0]

Crible E: 600[1, 1, 1, 0, 0, 1, 1, 1, 1, 1, 0, 1, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 1, 1]

Crible G: 615[1, 0, 0, 0, 1, 0, 1, 1, 0, 0, 1, 0, 0, 1, 1, 0, 0, 1, 0, 1]

Crible E: 615[1, 1, 1, 0, 0, 1, 1, 1, 1, 1, 0, 1, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 1, 1]

\*\*\*\*\*

Cette illustration permet de se rendre compte de l'importance de ces entiers **A non premiers = 0**, qui précèdent des nombres premiers **P'**. Sans cette propriété de l'algorithme, peut être qu'un contre-exemple « aurait pu être trouvé au début de la conjecture, car ensuite l'effet boule de neige empêche d'affirmer la conjecture ».

D'où on en déduit que la fonction  $\frac{Gn}{\ln(Gn)}$  ne peut être nulle, supposons le contraire :

Il faut systématiquement revenir en arrière  $2n - 30$ .

Or  $2n - 30$  a été vérifié, ainsi que  $2n - 60$  ... etc  $2n - 30k$  ; où cette fonction ne pouvait être nulle, sans cela la conjecture aurait été fausse.

\*\*\*\*\*

Note complémentaire si besoins est : on peut démontrer

[(« Suivant le principe du crible d'Ératosthène qui est largement connu, il est inutile de démontrer que pour extraire le nombres premiers inférieur à une limite **n** donnée : il suffit d'utiliser  $p \in P_n \leq \sqrt{n}$  pour cribler les  $A \in A_n$  multiples de **p** de 1 à **n** et avec  $P \leq \sqrt{2n}$  pour cribler les  $B = C \in B_{2n}$  multiples de **P** de **n** à **2n**.

Si  $B \in B_{2n}$ , n'est pas divisible par  $P \in P_{2n}$ , alors  $B = q$  un nombre premier par évidence et **B** est non congru 0 modulo **P**.

$2n \not\equiv A[P] \Rightarrow 2n - A = B$  qui ne peut donc être divisible par **P**.

(« (I) rappel : si est seulement si,  $2n$  et **A** sont égaux modulo **P**, il existe  $y$  et  $y'$  tel que :  $2n = P^*y + R$  et  $A = P^*y' + R \Rightarrow 2n - A = P^*(y - y')$  donc **P** divise  $2n - A$ . »)

Donc aucun nombre premier **P** ne divise  $2n - A$ , d'où  $2n - A = q$

On veut démontrer pour  $2n - A$  non premier, qu'il n'existe pas de premier  $P > 2n$  tel que (I) que  $2n - A = Py$  avec  $y \in \mathbb{N}$ .

on a :  $n \geq 2$ ,  $2n \geq 4$  ;

on a :  $-n \leq -A \leq -1$  ;

$2n - n \leq 2n - A \leq 2n - 1$

$n \leq 2n - A \leq 2n - 1$

Supposons que  $2n - A$  non premier, alors il existe au moins **P** et **p'** premier  $\geq \sqrt{2n}$  car on a démontré (I).

Donc prenons **P** et **p'** les plus petits possibles, soit  $\sqrt{2n}$ .

On a  $(\sqrt{2n})^2 = 2n$ , or  $2n - A \leq 2n - 1$ , Ce qui est impossible, on a donc  $P * p' \leq 2n - 1$  et au moins : un diviseur **Pi** de  $2n - A$  est  $\leq \sqrt{2n}$ .

Conclusion  $2n \neq A$  [P]  $\Rightarrow 2n - A = q$  premier, car P ne divise pas  $2n - A$  »].

### Annexe 1

En fonction de la limite  $N = 15k$  fixée, on fixe l'une des 8 Fam (i) correspondante à la forme de N

Pour N de la forme **15k**, on peut choisir n'importe laquelle des 8 Fam.

**Le programme C++ (fourni à la demande)** est fixé avec une limite N **début = 3000000000** et Fin = **3000000330**

*il progressera automatiquement de raison 15,*

**Il n'y a que la fam(i) à rentrer à la demande:**

Pour toute Limite  $N = 15k + n'$ , avec  $n' \in [0,1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12,13,14]$  on rentre la Fam(i) correspondante

$N = 15k ; \text{Fam} = (\text{1'une des 8 fam(i)}) \quad 2n = 30k$

$N = 15k+1 ; \text{Fam} = (1,13,19) ; \quad 2n = 30k + 2$

$N = 15k+2 ; \text{Fam} = (11,17,23) ; \quad 2n = 30k + 4$

$N = 15k+3 ; \text{Fam} = (7,29,13,23,17,19) ; \quad 2n = 30k + 6$

$N = 15k+4 ; \text{Fam} = (1,7,19) ; \quad 2n = 30k + 8$

$N = 15k+5 ; \text{Fam} = (1,7,13,19) ;$

$N = 15k+6 ; \text{Fam} = (1,11,13,19,23,29) ; \quad 2n = 30k + 12$

$N = 15k+7 ; \text{Fam} = (1,7,13) ; \quad 2n = 30k + 14$

$N = 15k+8 ; \text{Fam} = (17,23,29) ; \quad 2n = 30k + 16$

$N = 15k+9 ; \text{Fam} = (1,7,11,17,19,29) ; \quad 2n = 30k + 18$

$N = 15k+10 ; \text{Fam} = (11,17,23,29) ; \quad 2n = 30k + 20$

$N = 15k+11 ; \text{Fam} = (11,23,29) ; \quad 2n = 30k + 22$

$N = 15k+12 ; \text{Fam} = (1,7,11,13,17,23) ; \quad 2n = 30k + 24$

$N = 15k+13 ; \text{Fam} = (7,13,19) ; \quad 2n = 30k + 26$

$N = 15k+14 ; \text{Fam} = (11,17,29) ; \quad 2n = 30k + 28$

\*\*\*\*\*

### Programmes des algorithmes :

« Qui peut être modifié pour la conjecture ou corollaire de Lemoine-Lévy :  $2p+q = 2n+1$ , Sachant que la même propriété du décalage d'un rang se ferra pour la limite  $n+(2*15)$  ce qui est compréhensible ... »

Pour une limite  $n = 15k + i$ , on change la fam(i) correspondante en fin de programme :

**EX : GCrible(premiers, n, 17) # au choix (1,7,11,13,17,19,23,29)**

**Par exemple :** pour  $15k + 17$  on fixe la Fam(17);

pour  $n = 15k$  , une des 8 fam(i)

**Python :**

**1\_) Crible G : Goldbach crible les entiers A congrus à P**

```
from time import time
from os import system
import math

def candidate_range(n):
    cur = 5
    incr = 2
    while cur < n+1:
        yield cur
        cur += incr
    incr ^= 6 # or incr = 6-incr, or however

def eratostene(n):
    n = int((2*n)**0.5)
    prime_list = [2, 3]
    sieve_list = [True] * (n+1)
    for each_number in candidate_range(n):
        if sieve_list[each_number]:
            prime_list.append(each_number)
            for multiple in range(each_number*each_number, n+1, each_number):
                sieve_list[multiple] = False
    #print(prime_list[3:])
    return prime_list[3:]

def demander_N():
    n = input("Donnez N: ")
    n = int(n.strip().replace(" ", ""))
    #n = int(30 * round(float(n)/30))
    return n

def GCrible(premiers, n, fam):
    start_crible = time()
    crible = ((n//30)+1)*[1] # Ou: on rappelle le tableau Ératosthène crible de N/30 cases
    lencrible = len(crible)

    # On calcule les restes:  $r_i = 2^*n/\pi$ 
    nbpremiers = len(premiers)
    n2 = 2*n

    for i, premier in enumerate(premiers):
        reste = n2 % premier
        #print(reste) # enlever dièse # pour imprimer les (reste)
        # tant que  $r_i \% 30 \neq fam$  on fait  $r_i += 2\pi$ 
        if reste % 2 == 0:
            reste += premier
```

```

pi2 = 2*premier
while reste % 30 != fam:
    reste += pi2
    # Ensuite on divise ri par 30 pour obtenir l'indexe
    reste //= 30
    # On crible directement avec l'index
    for index in range(reste, lencrible, premier):
        crible[index] = 0

total = sum(crible)
print("crible:", crible) # mettre dièse # pour bloquer la fonction print
print(f"Nombre non congru 2n[pi] {1} à {n} famille {fam} premiers de {n} à {n2}: {total} -----")
{int((time()-start_crible)*100)/100}")

def main():
    # On demande N a l'utilisateur
    n = demander_N()

    # On récupère les premiers entre 7 et √2N
    premiers = eratostene(n)
    #lprint("premiers:", premiers)
    #print(f"Nombre premiers entre 7 et {int((2*n)**0.5)}: {len(premiers)}")

    start_time = time()
    # On crible
    GCrible(premiers, n, 17) # au choix (1,7,11,13,17,19,23,29)
    temps = time()-start_time
    print(f"--- Temps total: {int(temps*100)/100} sec ---")

main()
system("pause")

```

\*\*\*\*\*

## 2\_) Crible E : Ératosthène mod 30

```

from itertools import product
from time import time
from os import system
import math

def candidate_range(n):
    cur = 5
    incr = 2
    while cur < n+1:
        yield cur
        cur += incr
        incr ^= 6 # or incr = 6-incr, or however

def eratostene(n):

```

```

n = int(n**0.5) #(si on fusionne les deux cribles il faudra rentrer, int((2n)**0.5) pour Goldbach.
prime_list =[2,3]
sieve_list = [True] * (n+1)
for each_number in candidate_range(n):
    if sieve_list[each_number]:
        prime_list.append(each_number)
        for multiple in range(each_number*each_number, n+1, each_number):
            sieve_list[multiple] = False
#print(prime_list[3:])
return prime_list[3:]

def demander_N():
    n = input("Donnez N: ")
    n = int(n.strip().replace(" ", ""))
    #n = int(30 * round(float(n)/30))
    return n

def E_Crible(premiers, n, fam):
    start_crible = time()

    # On génère un tableau de N/30 cases rempli de 1
    crible = ((n//30)+1)*[1]
    lencrible = len(crible)
    GM = [7,11,13,17,19,23,29,31]
    # On calcule les produits:  $j = a * b$ 

    for a in premiers:
        for b in GM:
            j = a * b
            if j%30 == fam:
                index = j // 30 # Je calcule l'index et On cible directement à partir de l'index
    for idx in range(index, lencrible, a): # index qui est réutilisé ici...
        crible[idx] = 0
    #print(index)

    total = sum(crible) # à la place, pour utiliser le tableau d'Ératosthène crible dans le crible de Goldbach, on return "crible:", crible
    print("crible:", crible)
    print(f"Nombre premiers criblés famille {fam} : {total} ----- {int((time()-start_crible)*100)/100}")

def main():
    # On demande N à l'utilisateur
    n = demander_N()

    # On récupère les premiers de 7 à  $\sqrt{N}$ 
    premiers = eratostene(n)
    #print(f"nombres premiers entre 7 et n: {len(premiers)}")

    start_time = time()
    # On cible
    E_Crible(premiers, n, 17) # au choix (1,7,11,13,17,19,23,29)

```

```

    temps = time()-start_time
    print(f"--- Temps total: {int(temps*100)/100} sec ---")

```

```

main()
system("pause")

```

```
*****
```

### 3.) Crible EG2:

*fusion des 2 programmes donnant directement le nombre de couples  $p+q = 2n$*

```

from time import time
from os import system

```

```

def candidate_range(n):
    cur = 5
    incr = 2
    while cur < n+1:
        yield cur
        cur += incr
    incr ^= 6 # or incr = 6-incr, or however

```

```

def eratostene(n):
    n1,n = int(n**0.5),int((2*n)**0.5)
    prime_E,prime_EG=[2, 3, []]
    sieve_list = [True] * (n+1)
    for each_number in candidate_range(n):
        if sieve_list[each_number]:
            if each_number > n1:
                prime_EG.append(each_number)
            else:
                prime_E.append(each_number)
        for multiple in range(each_number*each_number, n+1, each_number):
            sieve_list[multiple] = False
    #print(prime_EG[-1])
    return prime_E[3:],prime_EG

```

```

def Crible_EG(Premiers,Premiers_suite, n, fam):
    start_crible = time()
    # On génère un tableau de n//30 cases rempli de 1
    lencrible = ((n//30)+1)
    crible=[1 for _ in range(lencrible)] # c'est plus propre comme ça
    GM = [7,11,13,17,19,23,29,31]
    # On calcule les produits :
    for a in Premiers:
        for b in GM:
            j = a * b
            if j%30 == fam:
                index = j // 30 # Je calcule l'index et On cible directement à partir de l'index
                for idx in range(index, lencrible, a): # index qui est réutilisé ici...
                    crible[idx] = 0
    Premiers+=Premiers_suite

```

```

del Premiers_suite # suppression du tableau devenu inutile
nbpremiers = len(Premiers)
n2 = 2*n
for premier in Premiers:
    reste = n2 % premier
    if reste % 2 == 0:
        reste += premier
    pi2 = 2*premier
    # tant que reste % 30 != fam on fait reste += pi2
    while reste % 30 != fam:
        reste += pi2
    # Ensuite on divise reste par 30 pour obtenir l'index
    reste //= 30
    # On cible directement avec l'index
    for index in range(reste, lencrible, premier):
        crible[index] = 0
total = sum(crible)

print("crible:", crible)
print(f"Nombre non congru 2n[pi] {1} à {n} famille {fam} premiers de {n} à {n2}: {total} -----")
{int((time()-start_crible)*100)/100}")

def demander_n():
    n = input("Donnez N: ")
    n = int(n.strip().replace(" ", ""))
    #n = int(30 * round(float(n)/30))
    return n

def main():
    # On demande N a l'utilisateur
    n = demander_n()
    # On récupère les premiers de 7 à √n et de √n à √2nN
    Premiers_E,Suite_E = eratostene(n)
    # On cible
    fam = 17    # 1 ou 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 1 au choix
    Crible_EG(Premiers_E,Suite_E, n, fam)

main()
system("pause")

```