Les nombres complexes

Baccalauréat ++

Une introduction à la magie d'un monde imaginaire extraordinaire

Mohamed ATOUANI

Professeur de Mathématiques
Clandestines

Table des matières

1 Une genèse algébrique

1.1 Les équations du second degré

La découverte des nombres complexes est probablement l'unique découverte de l'histoire des mathématiques combinant à la fois simplicité et fécondité. Notre histoire commence au 16ème siècle, quand deux mathématiciens italiens, Jérome Cardan et Niccolo Tartaglia se sont intéressés à la résolution des équations cubiques.

Cardan
(1501-1576)

Tartaglia
(1499 - 1557)

Avant de nous lancer dedans, tâchons de faire une digression sur les équations quadratiques afin de mieux apprécier nos nouveaux nombres. Une équation du second degré est une équation de la forme

$$ax^2 + bx + c = 0,$$

où a, b et c désignent trois nombres réels tels que $a \neq 0$ et x désigne un nombre inconnu vérifiant l'égalité ci-dessus. Puisque a est non nul, en divisant de part et d'autre par a, cette équation prend la forme

$$x^2 + px + q = 0.$$

Afin de résoudre celle-ci, il suffit de compléter le carré en y rajoutant le terme $(p/2)^2$ pour obtenir

$$\underbrace{x^2 + px}_{(x+\cdots)^2} + \left(\frac{p}{2}\right)^2 + q = \left(\frac{p}{2}\right)^2.$$

Ainsi, en utilisant l'identité remarquable $a^2 + 2ab + b^2 = (a + b)^2$, cette transformation algébrique permet d'avoir l'égalité

$$\left(x + \frac{p}{2}\right)^2 = \left(\frac{p}{2}\right)^2 - q.$$

On en déduit que si $(p/2)^2 - q \geq 0$ alors cette équation devient

$$\left(x+\frac{p}{2}\right)^2 - \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}^{\,2} = 0.$$

En utilisant maintenant l'identité remarquable $a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$ et en posant [1]

$$x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$$

on obtient $(x-x_1)(x-x_2) = 0$, ce qui implique enfin que $x = x_1$ ou $x = x_2$. Notez alors qu'on a montré au passage que $x^2 + px + q = (x-x_1)(x-x_2)$. En développant l'expression de droite il vient que

$$x^2 + px + q = x^2 - (x_1+x_2)x + x_1x_2.$$

Par identification des coefficients on obtient $x_1 + x_2 = -p$ et $x_1x_2 = q$. Prenons un exemple concret afin de nous fixer les idées.

Exemple 1 : On souhaite résoudre l'équation $x^2 - 5x + 6 = 0$. On a

$$\begin{aligned}
x^2 - 5x + 6 = 0 &\iff x^2 - 5x + \left(\frac{5}{2}\right)^2 = \left(\frac{5}{2}\right)^2 - 6 \\
&\iff \left(x - \frac{5}{2}\right)^2 = \frac{1}{4} \\
&\iff \left(x - \frac{5}{2}\right)^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 = 0 \\
&\iff \left(x - \frac{5}{2} - \frac{1}{2}\right)\left(x - \frac{5}{2} + \frac{1}{2}\right) = 0 \\
&\iff (x-3)(x-2) = 0 \\
&\iff x = 3 \quad \text{ou} \quad x = 2.
\end{aligned}$$

Ainsi les solutions de l'équation $x^2 - 5x + 6 = 0$ sont $x = 3$ et $x = 2$. De surcroît, on a bien

$$(x-3)(x-2) = x^2 - 5x + 6.$$

Exemple 2 : Nos ancêtres se sont intéressés au problème géométrique consistant à trouver la longueur et la largeur d'un rectangle sachant son demi-périmètre p et son aire q. Si x_1 désigne sa longueur et x_2 désigne sa largeur alors ce problème consiste à résoudre le système

$$\begin{cases} x_1 + x_2 &= p \\ x_1x_2 &= q \end{cases}$$

Si de plus ce système est résoluble alors les nombres x_1 et x_2 sont solutions de l'équations $(x-x_1)(x-x_2) = 0$. Or d'après ce qui précède, $(x-x_1)(x-x_2) = x^2 - (x_1+x_2)x + x_1x_2 =$

1. En remplaçant p par b/a et q par c/a on obtient les fameuses formules

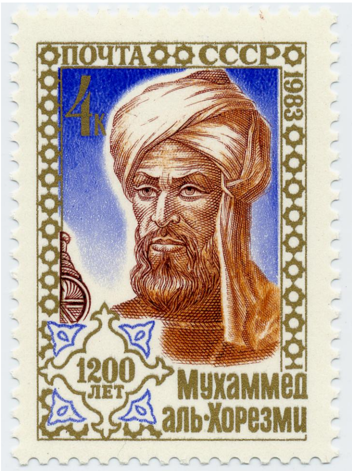
$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

$x^2 - px + q$. Ainsi x_1 et x_2 sont solutions de l'équation $x^2 - px + q = 0$. Soit R un rectangle dont le demi-périmètre vaut 11 et d'aire égale à 28. Sa longueur x_1 et sa largeur x_2 sont alors solutions de l'équation $x^2 - 11x + 28 = 0$. Or

$$\begin{aligned}
x^2 - 11x + 28 = 0 &\iff x^2 - 11x + \left(\frac{11}{2}\right)^2 = \left(\frac{11}{2}\right)^2 - 28 \\
&\iff \left(x - \frac{11}{2}\right)^2 = \frac{9}{4} \\
&\iff \left(x - \frac{11}{2}\right)^2 - \left(\frac{3}{2}\right)^2 = 0 \\
&\iff \left(x - \frac{11}{2} - \frac{3}{2}\right)\left(x - \frac{11}{2} + \frac{3}{2}\right) = 0 \\
&\iff (x-7)(x-4) = 0 \\
&\iff x = 7 \quad \text{ou} \quad x = 4.
\end{aligned}$$

Ainsi, la longueur de notre rectangle vaut $x_1 = 7$ et sa largeur vaut $x_2 = 4$.

Exemple 3 (Al-Khawarizmi) : Nous inspectons dans cet exemple la méthode géométrique utilisée par Al-Khawarizmi afin de résoudre les équations quadratiques. Tout d'abord, un petit mot s'impose sur notre éminent ancêtre. Muhammed Ibn Musa Al-Khawarizmi était un savant persan, membre de la prestigieuse *Maison de la Sagesse de Bagdad* et connu surtout pour son livre d'algèbre intitulé *Kitabu al-mukhtasar fī hisabi al-jabr wal-muqabalah* signifiant *Abrégé du calcul par restauration et comparaison*. Le mot algorithme est dérivé du nom de notre mathématicien.

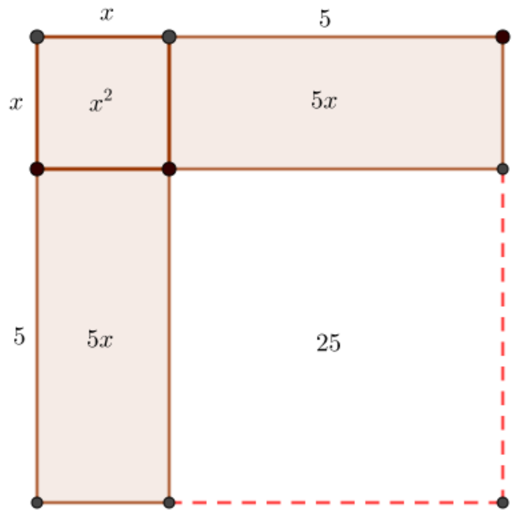


Al-Khawarizmi (780-850)

Al-Khawarizmi dérive la transformation algébrique permettant de résoudre les équations du second degré à partir d'une manipulation géométrique. Ainsi pour résoudre l'équation

$$x^2 + 10x = 39,$$

il commence par remarquer que le terme x^2 correspond géométriquement à l'aire d'un carré de côté x. Il borde par la suite ce carré par deux rectangles identiques de largeur égale à x et de longueur égale à 5 en gardant en tête que le terme $10x = 2 \times 5x$ est l'aire de nos deux rectangles. Pour obtenir l'identité voulue, il termine ce procédé par la complétion de la figure afin d'obtenir un carré comme le montre la figure ci-dessous.



Ainsi, en calculant l'aire de ce carré de deux manières différentes on obtient l'égalité $x^2 + 10x = (x+5)^2 - 25$. L'équation $x^2 + 10x = 39$ devient donc équivalente à

$$(x+5)^2 - 25 = 39,$$

ou encore à $(x+5)^2 = 64$. Ainsi $x+5$ est le nombre ayant un carré égal à 64. Al-Khawarizmi en déduit que $x+5=8$ et donc que $x=3$ est la solution de notre équation. Remarquez alors qu'il ne prend pas la solution négative car elle n'a aucune signification géométrique (une longueur étant toujours positive). Pourquoi notre savant procède-t-il de la sorte me diriez-vous ? N'était-il pas plus simple pour lui d'utiliser directement l'identité

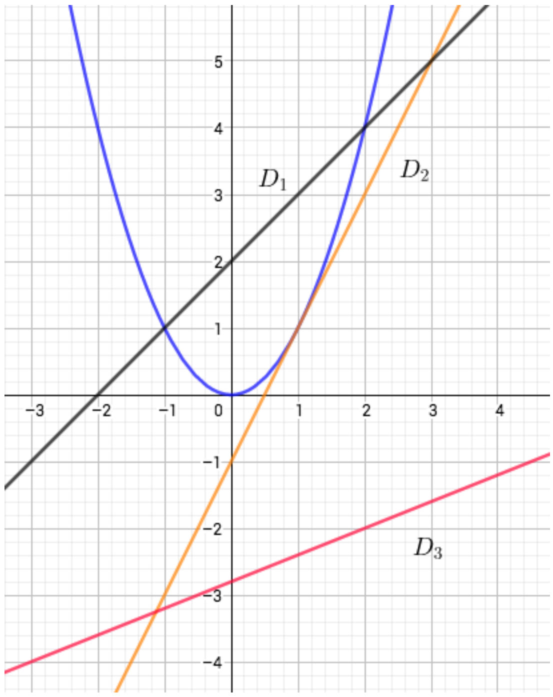
$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2?$$

À son époque, la géométrie d'Euclide était la base des mathématiques et tout devait se justifier à partir de celle-ci. L'algèbre en était donc dérivée. Toutefois, les travaux algébriques d'Al-Khawarizmi sont plus simples que ceux d'Euclide et ont ouvert la voie à son indépendance.

Exemple 4 : Une équation quadratique peut s'écrire sous la forme $x^2 = px + q$. Les solutions de celle-ci sont les abscisses des points d'intersection de la parabole d'équation $y = x^2$ et de la droite d'équation $y = px + q$. Nous avons vu qu'en cas d'une possible résolution, les solutions de cette équation peuvent s'écrire sous la forme

$$x_{1,2} = \frac{1}{2}\left(p \pm \sqrt{p^2 + 4q}\right).$$

Géométriquement on distingue 3 cas, à savoir deux intersections quand la quantité $p^2 + 4q > 0$, une seule intersection correspondant à $p^2 + 4q = 0$ ou aucune intersection quand $p^2 + 4q < 0$. Nous verrons que ce dernier cas est particulièrement intéressant. Notez d'abord que l'intersection est impossible quand $p^2 + 4q < 0$ car on ne sait pas donner pour l'instant une signification à la racine carré d'un nombre négatif, car le carré d'un nombre réel quelconque est toujours positif. Avant Cardan et Tartaglia, nos ancêtres n'avaient donc aucune motivation d'inspecter la possible signification de la racine d'un nombre négatif, parce que de façon évidente, le problème géométrique correspondant n'admettait pas de solution.



Exemple 5 (Lagrange) : Nous terminons cette première section avec la méthode de Joseph-Louis Lagrange permettant la résolution d'une équation quadratique de la forme $x^2 + px + q = 0$. En notant x_1 et x_2 ses deux solutions, Lagrange introduit une nouvelle variable $y = x_1 - x_2$. Cette variable n'est pas symétrique en x_1 et x_2 car échanger leurs positions change le signe de y. Lagrange symétrise alors cette expression en prenant son carré $y^2 = (x_1 - x_2)^2$. Il remarque par la suite que

$$y^2 = (x_1 - x_2)^2 = (x_1 + x_2)^2 - 4x_1x_2 = p^2 - 4q.$$

Il arrive ainsi à exprimer la quantité y^2 en fonction des coefficients de l'équation. Si de plus $p^2 - 4p \geq 0$ alors $y = \pm\sqrt{p^2 - 4q}$. Or on sait que x_1 et x_2 vérifient le système

$$\begin{cases} y = x_1 - x_2 \\ -p = x_1 + x_2 \end{cases}$$

La résolution de ce dernier donne bien

$$x_{1,2} = \frac{1}{2}\left(-p \pm \sqrt{p^2 - 4q}\right)$$

Par quel coup de génie a-t-il pu imaginer un tel procédé ? La théorie des équations permettant de mettre la lumière sur cette méthode dépasse le cadre de ce cours.

1.2 Les équations cubiques

Les équations cubiques sont celles de la forme $a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0 = 0$, où a_3, a_2, a_1 et a_0 désignent des nombres réels tels que $a_3 \neq 0$. En divisant de part et d'autre par a_3, toute cubique peut être écrite sous la forme

$$x^3 + ax^2 + bx + c = 0.$$

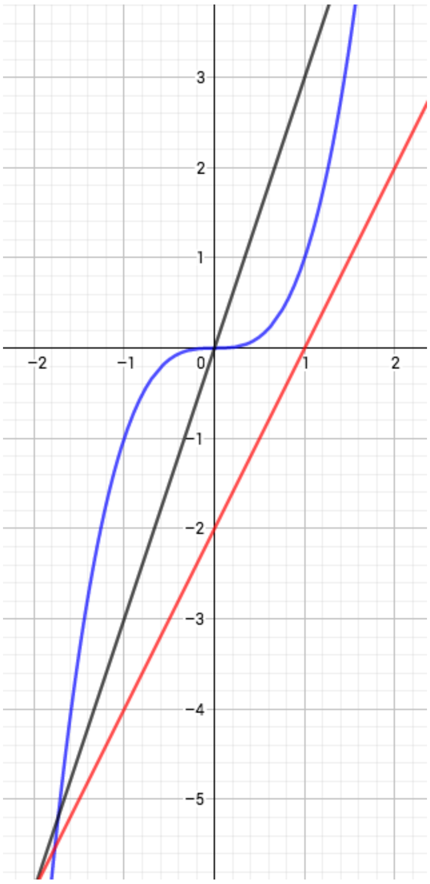
En réalité, on peut faire encore mieux parce qu'il existe une astuce permettant de se débarasser du terme en x^2 pour ramener toute équation de degré 3 à la forme générale

$$x^3 + px + q = 0.$$

Pour se faire, il suffit de poser le changement de variable $y = x + a/3$, ce qui donnera en utilisant l'identité remarquable $(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$

$$\begin{aligned}
x^3 + ax^2 + bx + c &= (y - a/3)^3 + a(y - a/3)^2 + b(y - a/3) + c \\
&= y^3 - 3 \cdot y^2 a/3 + 3y(a/3)^2 - (a/3)^3 + ay^2 - 2a^2 y/3 + a(a/3)^2 + by - ba/3 + c \\
&= y^3 + py + q,
\end{aligned}$$

où $p = b - a^2/3$ et $q = 2(a/3)^3 - b(a/3) + c$. Ainsi, les solutions de toute équation de degré 3 peuvent être vues comme les abscisses des points d'intersection de la courbe $y = x^3$ et d'une droite d'équation $y = px + q$. Le constat est sans appel, la courbe $y = x^3$ traverse tout le plan et intersecte donc toute droite $y = px + q$ au moins une fois. Une cubique admettra donc toujours une solution.



Trouver un nombre qui ajouté à son cube donne 6.

Ce problème fait son apparition au cours d'une compétition opposant Tartaglia et Fior, ce dernier a posé 30 problèmes de la sorte à son rival. La mise en équation de cette question donne

$$x^3 + x = 6$$

et plus généralement, les autres questions posées par Fior se ramènent à résoudre une équation de la forme $x^3+px=q$. Sachant qu'au 16ème siècle peu de progrès se sont fait depuis les traités algébriques d'Al-Khawarizmi autour de la résolution d'équations, le premier à avoir réussi un tel exploit pour les cubiques fut Scipione del Ferro (1465-1526). Ce dernier a occupé le poste de Professeur à l'université de Bologne et a résolu les cubiques de la forme $x^3+px=q$. Cette méthode n'était alors connue que de son étudiant Fior. De son côté, Tartaglia a su résoudre les équations cubiques de la forme $x^3+px^2=q$ et a posé 30 problèmes atypiques à son adversaire dont certains se ramenant à des équations de la dernière forme. Aucun n'a alors avancé d'un iota dans cette quête jusqu'au moment où Tartaglia trouve haut la main une méthode générale permettant de résoudre notre fameux casse-tête et a par conséquent infligé une lourde défaite à Antonio de Fior.

En 1545, Cardan a publié dans son Ars Magna la formule de Tartaglia accompagnée d'une démonstration. Celle-ci repose sur l'identité suivante

$$(u+v)^3 = 3uv(u+v) + \left(u^3+v^3\right).$$

Afin de résoudre l'équation $x^3+px+q=0$ on pose $x=u+v$ et on remarque qu'il suffit que les conditions

$$\begin{aligned} 3uv &= -p \\ u^3+v^3 &= -q \end{aligned}$$

soient remplies. Notre équation tombera donc comme une pomme mûre si on arrive à trouver deux quantités convenables u et v. Cette tâche est relativement simple car on connaît la valeur de la somme et du produit de u^3 et de v^3. Autrement dit on a

$$\begin{aligned} u^3v^3 &= (-p/3)^3 \\ u^3+v^3 &= -q. \end{aligned}$$

Or d'après notre paragraphe sur la résolution des équations quadratiques, u^3 et v^3 sont solutions de l'équation

$$t^2+qt-(p/3)^3=0.$$

Ceci implique que

$$u^3, v^3 = -\frac{q}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}.$$

On en déduit que u et v sont donnés par

$$u, v = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}}$$

Ainsi la solution x de notre équation initiale $x^3+px+q=0$ est donnée par

$$x = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}}.$$

Revenons maintenant à notre problème initial, dans lequel l'inconnue x vérifie l'équation $x^3+x-6=0$. Dans ce cas $p=1$, $q=-6$ et la solution x est donc donnée par

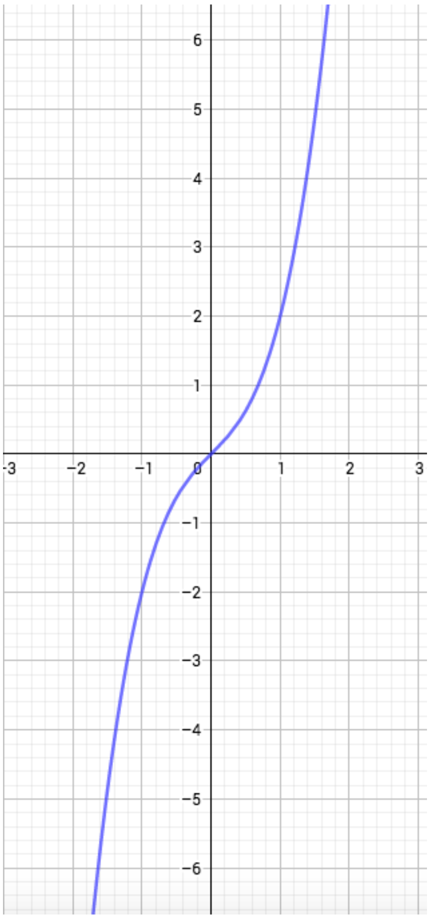
$$x=\sqrt[3]{3+\frac{2}{3}\sqrt{\frac{61}{3}}}+\sqrt[3]{3-\frac{2}{3}\sqrt{\frac{61}{3}}}.$$

Certes cette solution a une tête bien méchante, toutefois elle a la vertu d'être une solution exacte de notre équation. Prenons un deuxième exemple.

Exemple 1 : La formule de Cardan soulève plusieurs questions et plusieurs observations intéressantes. Dans cet exemple, le nombre 2 est une solution évidente de l'équation $x^3+x=10$, la formule proposée par notre ancêtre italien donne le nombre x

$$x=\sqrt[3]{5+\frac{26}{3}\sqrt{\frac{1}{3}}}+\sqrt[3]{5-\frac{26}{3}\sqrt{\frac{1}{3}}}.$$

Le graphe ci-dessous est celui de la courbe définie par $y=x^3+x$. Elle est clairement strictement croissante, étant somme de deux fonctions qui le sont.



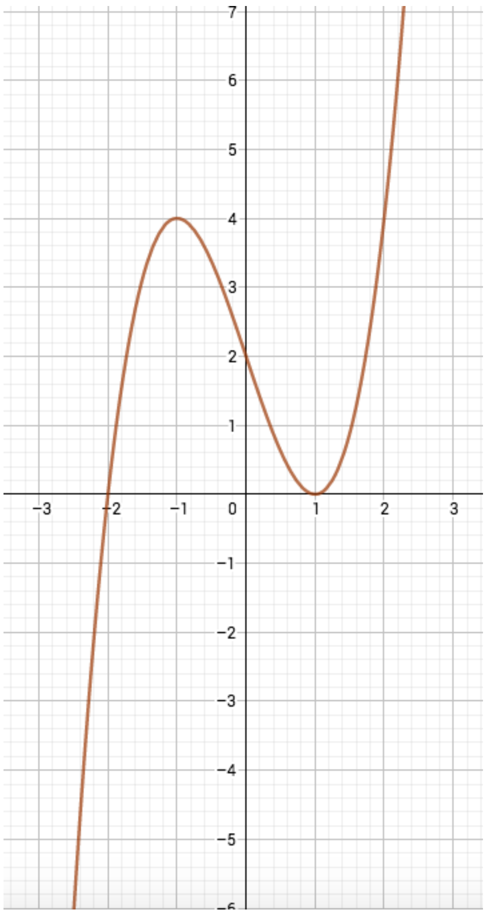
Ainsi, elle ne touche 10 qu'une seule fois. L'équation $x^3+x=10$ n'admet donc qu'une solution réelle, puisque 2 en est une, l'incroyable égalité suivante en découle

$$2=\sqrt[3]{5+\frac{26}{3}\sqrt{\frac{1}{3}}}+\sqrt[3]{5-\frac{26}{3}\sqrt{\frac{1}{3}}}.$$

Exemple 2 : Nous souhaitons résoudre l'équation $x^3 - 3x + 2 = 0$. Avec $p = -3$ et $q = 2$, notre super formule donne

$$\begin{aligned} x &= \sqrt[3]{-1 + \sqrt{1^2 + (-1)^3}} + \sqrt[3]{-1 - \sqrt{1^2 + (-1)^3}} \\ &= \sqrt[3]{-1} + \sqrt[3]{-1} \\ &= -1 - 1 \\ &= -2. \end{aligned}$$

Je vous laisse vérifier seul que $x = -2$ est bien solution de notre équation. Toutefois, $x = 1$ est aussi une solution évidente comme le montre le graphe de la courbe $y = x^3 - 3x + 2$ ci-dessous (à vous de faire le calcul).

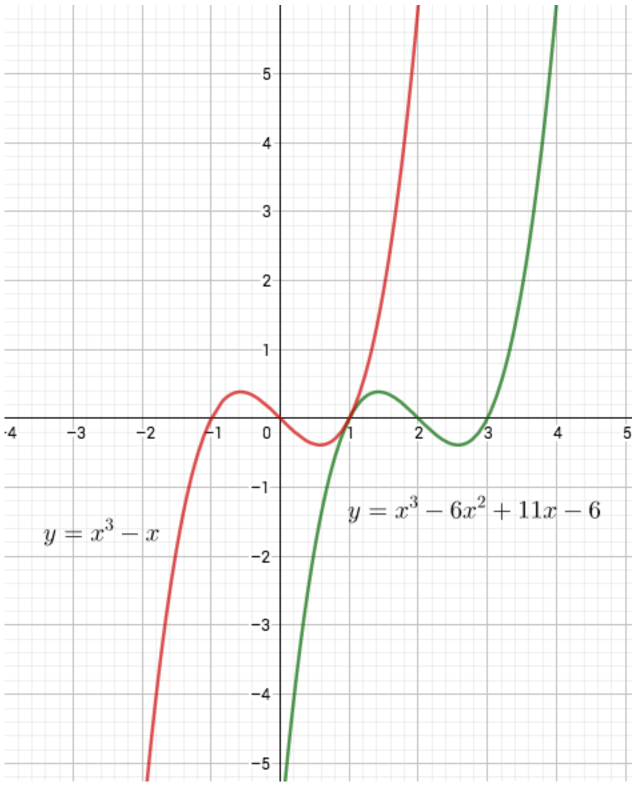


À ce stade, Cardan s'est rendu compte que sa formule ne donnait pas toutes les solutions d'une cubique et il a commencé à soupçonner qu'une telle équation admettrait 3 solutions.

Exemple 3 : Nous souhaitons résoudre dans cet exemple l'équation $x^3 - 6x^2 + 11x - 6 = 0$. D'abord nous devons transformer cette expression sous la forme $z^3 + pz + q = 0$. Pour se faire, le changement de variable $z = x - 2$ nous permet de nous débarasser du terme en x^2 et donne la nouvelle équation

$$z^3 - z = 0.$$

Notez alors que la courbe de $y = x^3 - x$ s'obtient en translatant la courbe de $y = x^3 - 6x^2 + 11x - 6$ horizontalement de 2 unités à gauche.



La nouvelle équation $z^3 - z = 0$ a une bonne tête et se résout assez trivialement en remarquant la factorisation

$$z^3 - z = z(z-1)(z+1).$$

Les solutions de celle-ci sont donc $z = -1$, $z = 0$ et $z = 1$. Puisque $z = x - 2$, les solutions de notre équation initiale sont $x = 1$, $x = 2$ et $x = 3$. En appliquant la formule de Cardan à l'équation $z^3 - z = 0$, il se passe un phénomène bien étonnant. En effet,

$$z = \sqrt[3]{\sqrt{-\frac{1}{27}}} + \sqrt[3]{-\sqrt{-\frac{1}{27}}}.$$

On obtient un nombre négatif à l'intérieur de la racine carrée, ce qui est fort problématique. Toutefois, si on en fait abstraction et on continue à conduire les calculs de façon formelle il vient

$$\begin{aligned} z &= \sqrt[3]{\sqrt{-\frac{1}{27}}} - \sqrt[3]{\sqrt{-\frac{1}{27}}} \\ &= 0. \end{aligned}$$

Oh ! ! ! Cela donne bien la solution $z = 0$. Aussi bizarre que cela puisse paraître, l'acceptation des racines carrées des nombres négatifs a permis d'avoir une bonne solution de notre équation. C'est incroyable ! Quel peut-être le secret derrière une telle simplification ?

Exemple 4 : Le cas d'une racine carrée négative arrive plus généralement quand

$$\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3 < 0.$$

Il s'agit de la faille la plus remarquable de la formule de Cardan. Ce cas s'appelle **casus irreducibilis**, marquant ainsi la naissance des nombres complexes. La racine carrée d'un nombre négatif n'a apriori aucun sens mathématique, toutefois calculer formellement avec celle-ci permet d'obtenir une solution de notre cubique. Dans une tentative de comprendre la signification des racines carrées de nombres négatifs, Cardan a cherché à trouver deux nombres dont la somme vaut 10 et le produit vaut 40. Ce problème revient à résoudre l'équation quadratique

$$x^2 - 10x + 40 = 0.$$

Si on accepte formellement les racines carrées des nombres négatifs, les solutions de cette équation sont

$$x_{1,2} = 5 \pm \sqrt{-15}.$$

Notre ancêtre savant ose alors calculer formellement ces deux nombres et obtient bien

$$\begin{aligned}
x_1 + x_2 &= (5 - \sqrt{-15}) + (5 + \sqrt{-15}) \\
&= 10 \\
x_1 x_2 &= (5 - \sqrt{-15})(5 + \sqrt{-15}) \\
&= 5^2 - \sqrt{-15}^2 \\
&= 25 - (-15) \\
&= 40.
\end{aligned}$$

Il s'agit ici des premiers calculs utilisant les nombres complexes sans réellement comprendre leur signification. Cardan a ainsi ouvert la porte à un monde imaginaire extrêmement fécond. C'est avec Raphaël Bombelli (1526-1572) qu'on a commencé à apprécier l'utilisation de nos racines bizarres. Dans son livre *L'algèbre*, Bombelli tente de résoudre l'équation $x^3 - 15x - 4 = 0$. Le nombre $x = 4$ est une solution évidente de celle-ci mais notre formule donne

$$x = \sqrt[3]{2 + \sqrt{-121}} + \sqrt[3]{2 - \sqrt{-121}}.$$

Ce n'est apriori pas la même chose. Toutefois, notre ancêtre savant va simplifier cette expression en notant d'abord que

$$\sqrt[3]{2 - \sqrt{-121}} = \sqrt[3]{2 - 11\sqrt{-1}}.$$

Par ailleurs, en gardant en tête la solution $x = 4$, il est convaincu qu'on peut écrire $\sqrt[3]{2 - 11\sqrt{-1}}$ sous la forme $a + b\sqrt{-1}$ où a et b désignent deux nombres entiers. Fort de cette intuition géniale, Bombelli passe aux choses sérieuses pour obtenir

$$\begin{aligned}
2 - 11\sqrt{-1} &= (a + b\sqrt{-1})^3 \\
&= a^3 + 3a^2 b\sqrt{-1} - 3ab^2 - b^3\sqrt{-1} \\
&= (a^3 - 3ab^2) + (3a^2 b - b^3)\sqrt{-1}.
\end{aligned}$$

Par identification, il affirme que $a^3 - 3ab^2 = 2$ et que $3a^2 b - b^3 = -11$. La première relation implique que a divise 2 et la deuxième que b est un diviseur de 11. On peut alors vérifier que $a = 2$ et $b = -1$ conviennent. Ce coup de maître a des conséquences miraculeuses sur notre problème. On a en effet

$$\begin{cases} \sqrt[3]{2 - \sqrt{-121}} & = 2 - \sqrt{-1} \\ \sqrt[3]{2 + \sqrt{-121}} & = 2 + \sqrt{-1}. \end{cases}$$

On en déduit que la solution donnée par la formule de Cardan vaut

$$\begin{aligned} x &= \sqrt[3]{2+\sqrt{-121}}+\sqrt[3]{2-\sqrt{-121}} \\ &= (2+\sqrt{-1})+(2-\sqrt{-1}) \\ &= 4. \end{aligned}$$

Oh ! ! ! Quelle surprise ! Le constat est là encore sans appel : à partir de racines carrées sans une réelle signification nous avons réussi à obtenir la bonne solution de notre cubique. Il y a certainement un coup à jouer avec cette histoire...

Un nombre complexe z est donc un nombre de la forme $z = a + bi$, où a et b désignent deux nombres réels et i une quantité imaginaire vérifiant

$$\boxed{i^2 = -1}$$

On dit que a est **sa partie réelle** et que b est **sa partie imaginaire**. Ce nouvel objet a le statut d'un nombre car d'après les calculs de Bombelli, on peut lui appliquer les opérations de l'algèbre. En effet, pour pouvoir additionner $2+\sqrt{-1}$ et $2-\sqrt{-1}$, il fallait accepter la règle plausible d'addition des nombres complexes,

$$(a+bi)+(c+di) = (a+c)+(b+d)i.$$

De même, afin de mettre l'expression $a+b\sqrt{-1}$ au cube permettant de trouver le nombre qui au cube donne $2-11\sqrt{-1}$, la multiplication des nombres complexes doit respecter les règles usuelles de l'algèbre, notamment la double distributivité. Elle serait donc sujette à la règle

$$(a+bi)(c+di) = ac+i(ad+bc)+i^2bd.$$

En considérant l'identité fondamentale $i^2 = -1$ on obtient

$$(a+bi)(c+di) = (ac-bd)+(ad+bc)i.$$

2 La trisection de l'angle et la formule de Viète

Nous allons inspecter dans ce paragraphe une méthode de résolution d'équations cubiques due au mathématicien français François Viète.

François Viète (1540 - 1603)

Mais avant cela, tâchons de faire un rappel sur la constructibilité à la règle non graduée et au compas.

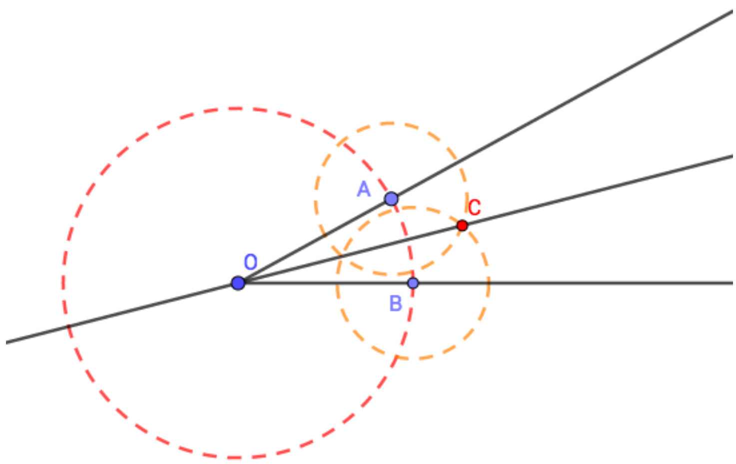
2.1 Constructibilité à la règle non graduée et au compas

J'espère que vous n'êtes pas sans savoir que la quintessence de la géométrie d'Euclide est la constructibilité à la règle non graduée et au compas. Nous nous n'attarderons pas sur ce sujet fort intéressant, toutefois il nous permettra de plonger la méthode de Viète dans son contexte. En effet, les mathématiciens grecs ont cherché à savoir ce qu'on peut construire géométriquement en utilisant seulement une règle non graduée et un compas. A priori, pas grand-chose ! Détrompez-vous, ce problème a fait couler beaucoup d'encres et est une source d'énormément de mathématiques aussi belles qu'étonnantes. L'une des constructions possibles avec la règle non graudée et le compas est le partage d'un angle en deux angles de même mesure. Nous avons tous appris au collège la procédure suivante permettant de dessiner la bissectrice d'un angle :

1. Mettre la pointe du compas sur le sommet O de l'angle et construire un cercle de rayon $r > 0$. Ce cercle intersecte notre angle en deux points A et B.

2. Construire deux cercles de centres respectivement A et B et de même rayon, choisi de manière adéquate. Leur point d'intersection C (en réalité ils ont en général deux points d'intersection) est alors situé sur la bissectrice de notre angle.

3. Pour tracer une droite, il suffit d'avoir deux points habitant dessus, d'où la construction de la bissectrice obtenue en reliant le point C et le point O.

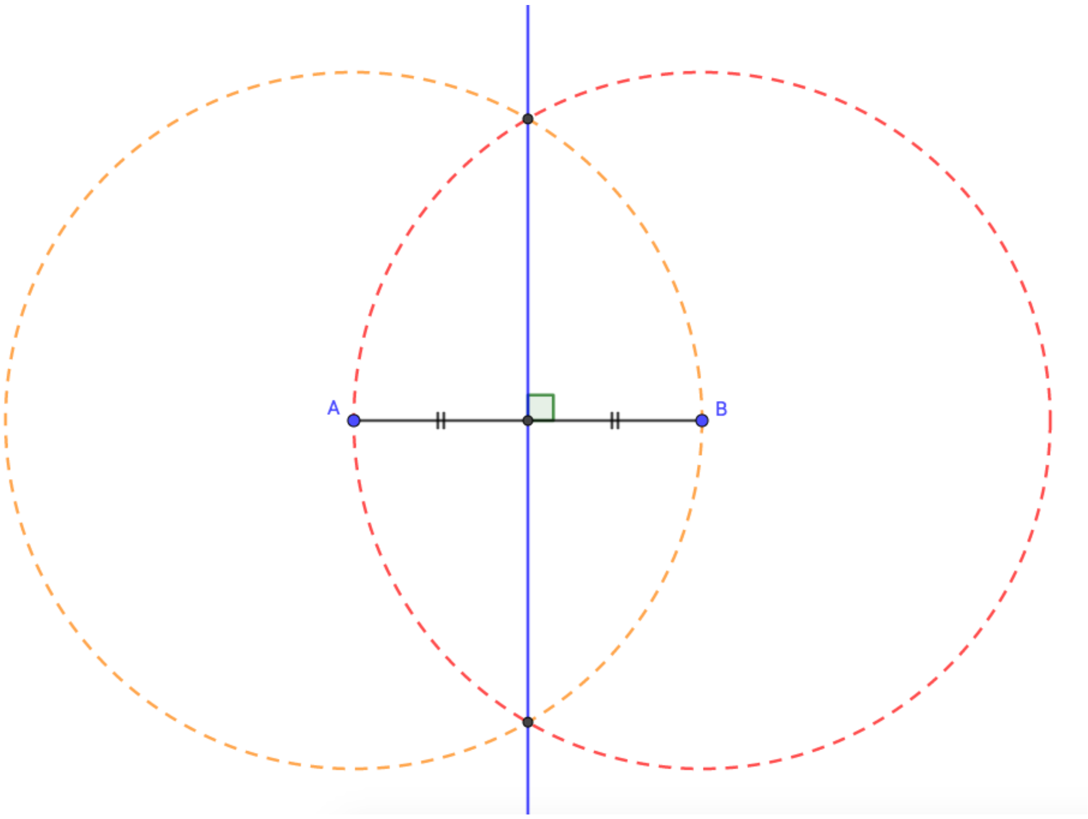


Remarquez alors qu'ici, on n'a utilisé que la règle non graduée pour relier nos points et le compas pour construire nos cercles. Une autre construction triviale (mais fondamentale) dans l'oeuvre d'Euclide est celle de la médiatrice d'un segment $[AB]$. Pour se faire

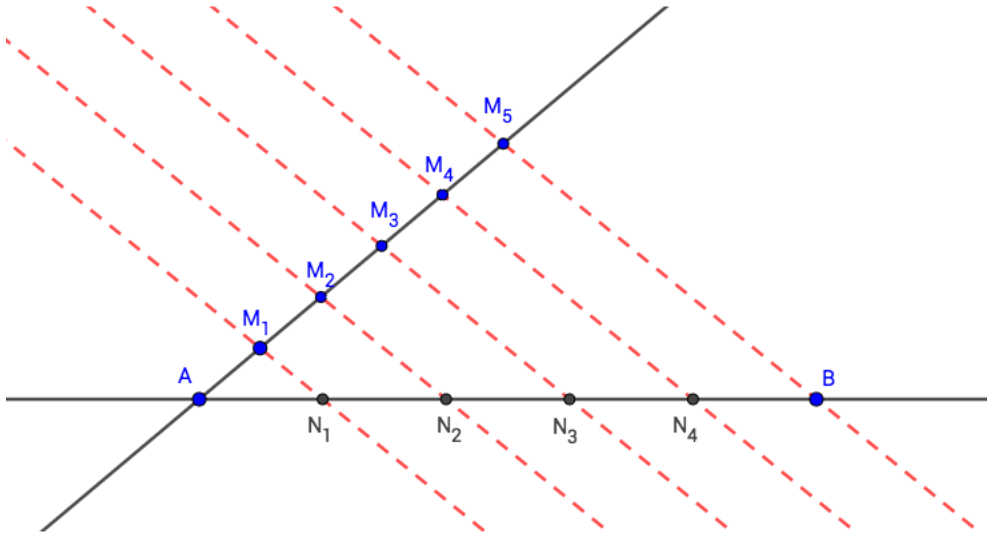
1. On construit le cercle de centre A passant par B.

2. Ensuite on construit le cercle de centre B passant par A.

3. Nos deux cercles s'intersectent en deux points habitant sur la médiatrice du segment $[AB]$(pourquoi ?). Ainsi, en reliant ces deux points, on obtient notre droite recherchée.



Il existe même un procédé permettant de partager un segment en n parties égales, où $n \geq 2$ désigne un entier naturel. Pour cela, nous aurons besoin du fameux théorème de Thalès. Car aussi incroyable que cela puisse paraître, le théorème de Thalès est un résultat majeur pour la constructibilité et donc son utlilité dépasse de bien loin le cadre du simple calcul de longueurs.



Par exemple, pour partager le segment $[AB]$ en cinq parties égales,

1. On prend un point M_1 quelconque hors de la droite (AB). On trace la demi-droite $[AM_1)$. On construit ensuite sur cette demi-droite des points successifs distincts M_2, M_3, M_4 et M_5 tels que $M_5M_4 = M_4M_3 = M_3M_2 = M_2M_1 = M_1A$.

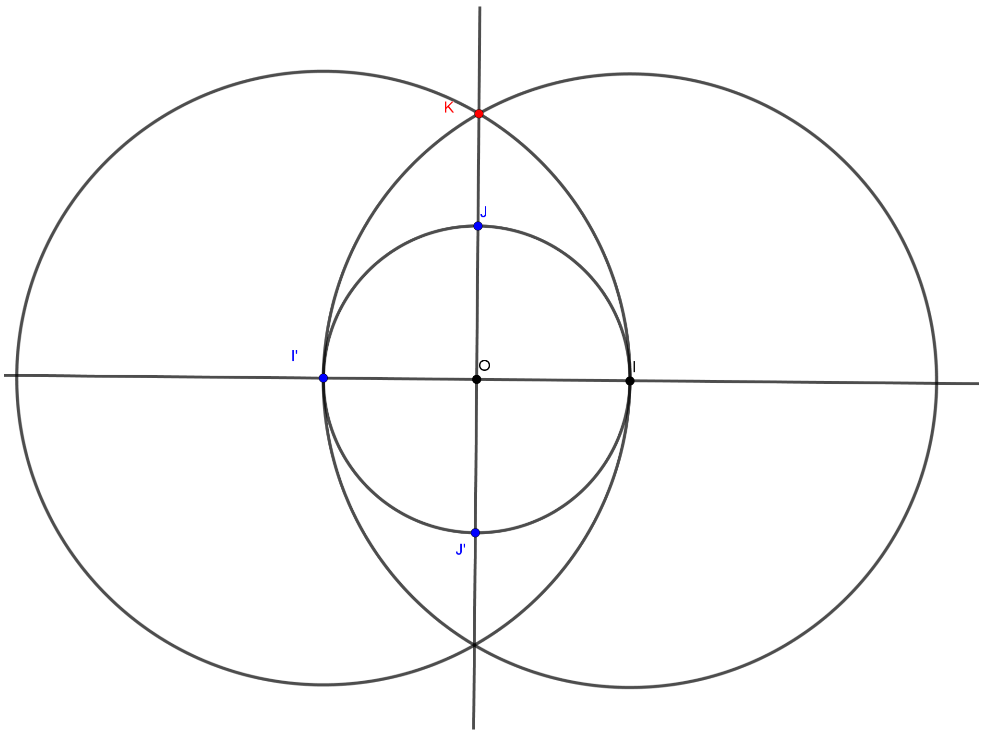
2. On trace ensuite la droite (M_5B) et puis les parallèles à cette droite passant par les points M_4, M_3, M_2 et M_1, parallèles constructibles à la règle non graduée et au compas.

3. Ces parallèles intersectent $[AB]$ respectivement en des points N_4, N_3, N_2 et N_1, dont nous affirmons qu'ils divisent le segment $[AB]$ en cinq parties égales. On dit que les points $N_1, \dots N_4$ sont obtenus par projection parallèle de direction (M_5B) des points $M_1, \dots, M_4$. Or, ce que dit le théorème de Thalès, c'est que toute projection parallèle conserve les rapports de longueurs.

Nous pouvons donc diviser tout segment en n parties égales, peut-on alors faire la même chose pour un angle ? On peut en effet le bissecter, toutefois peut-on par exemple le **trisecter** ? Ce problème a résisté plus de 2000 ans aux mathématiciens de premier plan. L'introduction des coordonnées par Descartes et Fermat a permis d'établir un pont algébrico-géométrique permettant de traduire les problèmes de géométrie en problèmes d'algèbre et vice-versa, constituant un permier pas décisif vers leur compréhension. Ainsi comme nous le verrons plus loin, le problème de la trisection de l'angle est équivalent à la résolution d'une équation de degré 3. Tâchons tout d'abord de comprendre le lien entre géométrie et algèbre.

Pour bien comprendre ce qu'on peut construire avec nos outils mécaniques, l'idée est de partir d'un ensemble $\mathscr{E}$ constitué de deux points donnés du plan (ou plus), que l'on nomme ici O et I et de prendre la longueur OI comme mesure unité *i.e* $OI = 1$. Remarquons que nous ne pouvons pas partir d'un seul point d'après les axiomes d'Euclide [2](on ne peut tracer aucun cercle et aucune droite). Rappelons alors ce que l'on peut faire comme type de construction :

- Tracer une droite passant par deux points de $\mathscr{E}$. Pour l'instant, on ne peut tracer que la droite (OI).
- Tracer un cercle ayant pour centre un point de $\mathscr{E}$ et pour rayon la distance séparant deux points de $\mathscr{E}$.



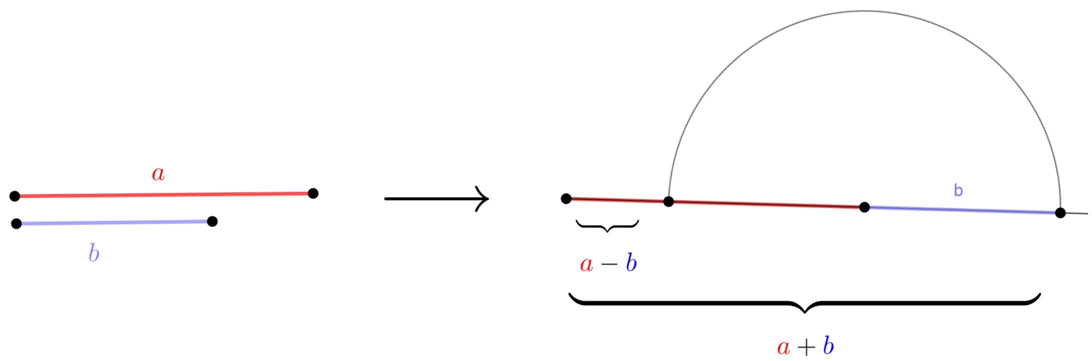
2. J'espère que vous connaissez les axiomes d'Euclide.

Que peut-on faire à partir de là ? On peut en effet tracer le cercle $\mathscr{C}$ de centre O et de rayon OI. Il coupe la droite (OI) en un deuxième point qu'on appelle I'. On construit alors le triangle équilatéral de base [II'], obtenant ainsi un troisième point K. La droite (OK), perpendiculaire à la droite (OI), coupe le cercle $\mathscr{C}$ en J et J'. Les points d'intersection des droites et des cercles ainsi tracés fournissent de nouveaux points, qui pourront à leur tour être utilisés comme les points de l'ensemble du départ $\mathscr{E}$ pour construire de nouvelles droites et de nouveaux cercles.
Notons qu'on a construit au passage un repère orthonormé que l'on notera (O, I, J). On retrouve ici l'idée centrale de Descartes et de Fermat qui a permis de transformer les problèmes géométriques en problèmes algébriques, et qui nous sera indispensable pour la suite. Notons aussi que les points ainsi obtenus sont constructibles à la règle non graduée et au compas. Afin de faire le lien avec l'algèbre, nous posons la définition suivante :

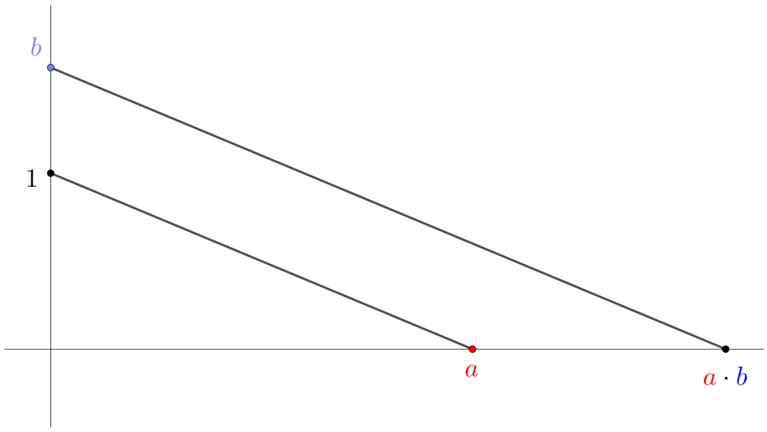
Définition : Un nombre x est dit constructible s'il est l'une des coordonnées dans le repère (O, I, J) d'un point constructible.

Remarquons alors qu'un nombre x est constructible si et seulement si le point de l'axe (OI) d'abscisse x est constructible. Ceci découle du fait que le projecté orthogonal est un point constructible, nous nous n'attarderons pas sur ce point (il y a une légère subtilité dans le sens inverse) . On peut alors construire les cinq opérations suivantes : Si a et b sont deux réels construits alors

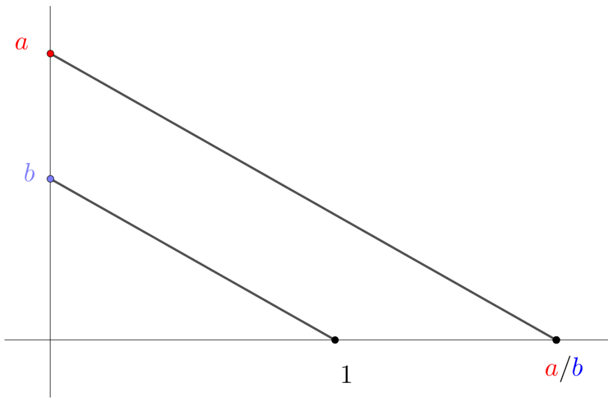
- *Les réels $a+b$ et $a-b$ sont constructibles* : Sans perte de généralité, on peut supposer que $a \geq b$, il suffit alors de reporter la longueur b à l'extremité du segment de longueur a comme le montre la figure ci-dessous. On obtient alors à la fois $a+b$ et $a-b$.



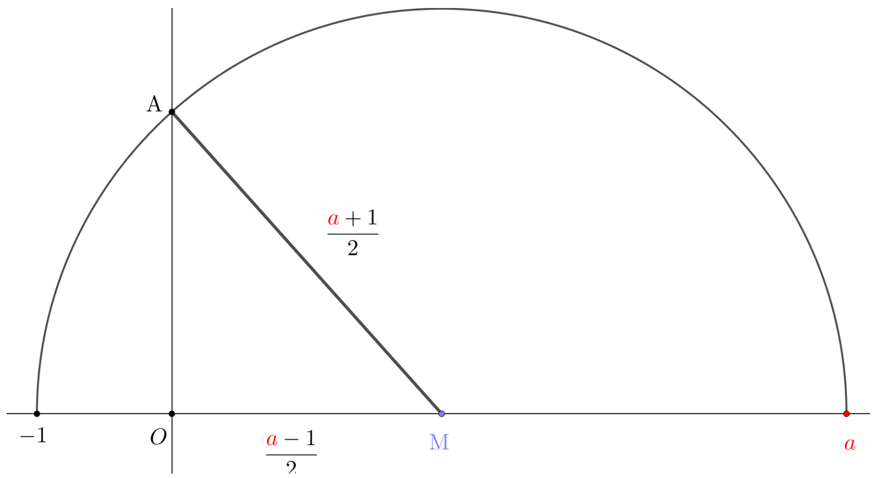
- *Le réel ab est constructible* : Là encore on peut supposer sans perte de généralité que $b \geq 1$.On commence alors par construire un repère orthonormé et placer le nombre a sur l'axe des abscisses et les nombres 1 et b sur l'axe des ordonnées. On trace ensuite le segment reliant 1 et a. La parallèle à ce segment passant par b coupe l'axe des abscisses au point d'abscisse ab. Cette dernière affirmation est une conséquence directe du théorème de Thalès. Je vous conseille d'écrire la relation de Thalès dans cette configuration pour vous en convaincre.



- *Le réel $\frac{a}{b}$ est constructible* : Le procédé pour construire la fraction $\frac{a}{b}$ est quasiment le même. Là encore le théorème de Thalès permet de conclure.



- *Le réel $\sqrt{a}$ est constructible* : Dans un repère orthonormé, on commence par placer les nombres a et -1. On trace ensuite le demi-cercle de diamètre $a+1$ (ceci est possible car on sait construire le milieu M du segment). L'intersection de ce dernier avec l'axe des ordonnées donne un point A tel que OA $= \sqrt{a}$.



En effet, le triangle OAM étant rectangle en O, une application du théorème de Pythagore donne :

$$\begin{aligned} \mathrm{OA}^2 + \mathrm{OM}^2 &= \mathrm{AM}^2 \\ \mathrm{OA}^2 &= \mathrm{AM}^2 - \mathrm{OM}^2 \\ \mathrm{OA}^2 &= \left(\frac{a+1}{2}\right)^2 - \left(\frac{a-1}{2}\right)^2 = a \end{aligned}$$

Cette dernière égalité entraine que $\mathrm{OA} = \sqrt{a}$, d'où le résultat.

On voit d'emblée que $\mathbb{Z}$ est constructible en reportant la mesure unité tout au long de l'axe des abscisses. Puisque les divisions sont des opérations constructibles, il en est de même de l'ensemble $\mathbb{Q}$ des rationnels.

Cependant, il est naturel de se demander s'il y a d'autres opérations que nos outils permettent d'effectuer. C'est là que l'idée de l'introduction d'un repère orthonormé va grandement nous aider, c'est là que le génie cartésien intervient. En effet, on peut démontrer que réciproquement, ce sont les seules opérations constructibles à la règle non graduée et au compas. Pour jouer avec les droites et les cercles dans un repère orthonormé, il est nécessaire de se servir de leurs équations. Ainsi aurons nous besoin du lemme suivant,

Lemme :

1. Si $\mathscr{D}$ est une droite du plan passant par les points distincts $A(a_1, b_1)$ et $B(a_2, b_2)$ alors son équation s'écrit

$$(b_1 - b_2)x + (a_2 - a_1)y = a_2 b_1 - b_2 a_1$$

2. Soient $A(a_1, b_1), B(a_2, b_2)$ et $C(a_3, b_3)$ trois points du plan. Le cercle de centre A et de rayon BC a pour équation

$$(x - a_1)^2 + (y - b_1)^2 = (b_3 - b_2)^2 + (a_3 - a_2)^2.$$

Remarquons alors que si $\mathscr{M}(x, y)$ est un point constructible alors nous sommes dans l'un des cas suivants :

1. $\mathscr{M}$ est le point d'intersection de deux droites constructibles. Dans ce cas, x et y sont solutions d'un système d'équations de la forme :

$$\begin{cases} \alpha_1 x + \beta_1 y = \gamma_1 \\ \alpha_2 x + \beta_2 y = \gamma_2 \end{cases}$$

où $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2, \gamma_1$ et γ_2 sont des nombres constructibles (d'après le lemme précédent). La résolution de ce système donne

$$\begin{cases} x = \dfrac{\gamma_1 \beta_2 - \beta_1 \gamma_2}{\alpha_1 \beta_2 - \beta_1 \alpha_2} \\ y = \dfrac{\alpha_1 \gamma_2 - \gamma_1 \alpha_2}{\alpha_1 \beta_2 - \beta_1 \alpha_2} \end{cases}$$

Remarquons au passage que le nombre $\alpha_1 \beta_2 - \beta_1 \alpha_2$ est non nul car les deux droites n'ont pas la même pente *i.e* ne sont pas parallèles. D'où la validité des formules. On voit alors que x et y sont deux nombres constructibles car obtenus en utilisant les quatre premières opérations constructibles.

2. $\mathscr{M}$ est le point d'intersection d'une droite et d'un cercle constructibles. Dans ce cas, x et y sont solutions d'un système d'équations de la forme :

$$\left\{\begin{array}{r} \alpha_1 x+\beta_1 y=\gamma_1 \\ (x-\alpha_2)^2+(y-\beta_2)^2=\gamma_2 \end{array}\right.$$

où $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2, \gamma_1$ et $\gamma_2>0$ sont des nombres constructibles. Comme vous pouvez vous en doutez, la résolution de ce système se fait avec les nombres précédents en utilisant les cinq opérations. On obtient en effet après substitution une équation quadratique. Le nombre de points d'intersection du cercle et de la droite dépend alors de son discriminant Δ. Je laisse le lecteur s'en convaincre.

3. Le dernier cas de figure est l'intersection de deux cercles constructibles. Cette fois, les coordonnées x et y des points d'intersections (s'ils existent) vérifient :

$$\left\{\begin{array}{l} (x-\alpha_1)^2+(y-\beta_1)^2=\gamma_1 \\ (x-\alpha_2)^2+(y-\beta_2)^2=\gamma_2 \end{array}\right.$$

où $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2, \gamma_1>0$ et $\gamma_2>0$ sont des nombres constructibles. En soustrayant les deux équations, on obtient :

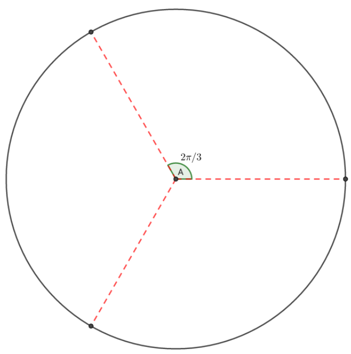
$$\left\{\begin{array}{r} 2(\alpha_2-\alpha_1)x+2(\beta_2-\beta_1)y+(\alpha_1^2+\beta_1^2)-(\alpha_2^2+\beta_2^2)=\gamma_1-\gamma_2 \\ (x-\alpha_2)^2+(y-\beta_2)^2=\gamma_2 \end{array}\right.$$

La première équation est une équation de droite. Nous sommes ainsi réduits au cas précédent, qui n'utilise comme nous avons pu le voir que les opérations allouées. Nous avons alors le théorème suivant :

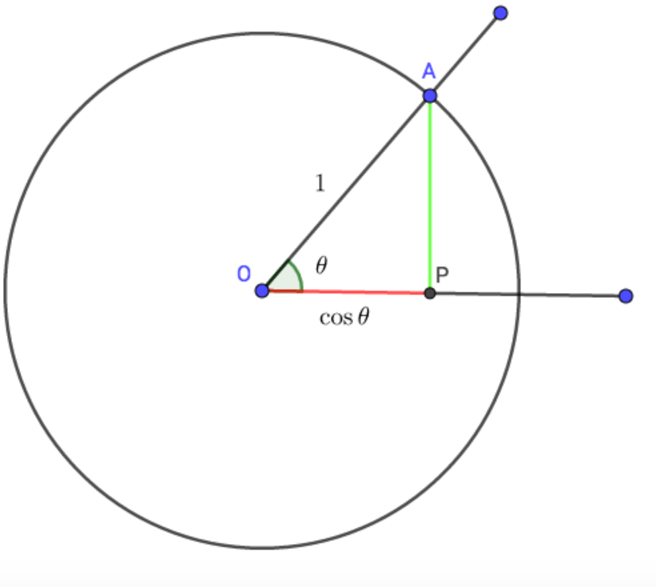
Théorème : Étant donné deux points O et I, tels que l'on fixe la longueur OI comme unité (OI $=1$), un point P de coordonnées (α,β) est constructible à la règle non graduée et au compas si et seulement si ses coordonnées sont des nombres rationnels ou peuvent être obtenus des nombres rationnels par une succession finie d'opérations $+$, $-$, $\cdot$, $\div$ et $a>0 \mapsto \sqrt{a}$.

Nous disposons maintenant d'une petite théorie permettant de décider algébriquement la possibilité d'une construction géométrique. Regardons ce que cela donne sur quelques exemples concrets.

Exemple 1 : Est-il possible de partager un cercle donné en 3 arcs égaux ? La figure ci-dessous montre qu'il suffit de construire l'angle $2\pi/3$ ou encore de diviser l'angle 2π en 3 angles de même mesure.



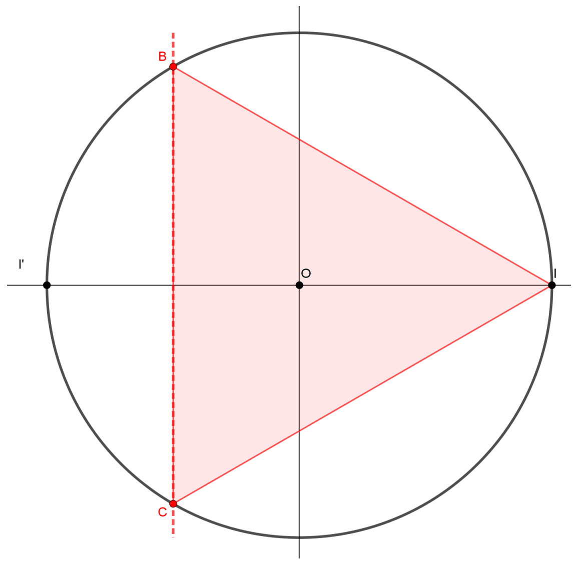
Or la construction d'un angle θ est équivalente à la construction du nombre $\cos\theta$. En effet, comme le montre bien la figure ci-dessous, si l'angle θ est constructible alors le point A l'est aussi. Ainsi par projection orthogonale, P est lui aussi constructible. On en déduit alors que le nombre $\cos\theta$ est constructible. Réciproquement, si le nombre $\cos\theta$ est constructible, alors la perpendiculaire à (OP) passant par P coupe le cercle unité au point A. L'angle ainsi obtenu vaut θ.



Ainsi pour construire $2\pi/3$, il suffit de construire $\cos(2\pi/3)$. Or coup de chance

$$\cos(2\pi/3) = -\frac{1}{2}.$$

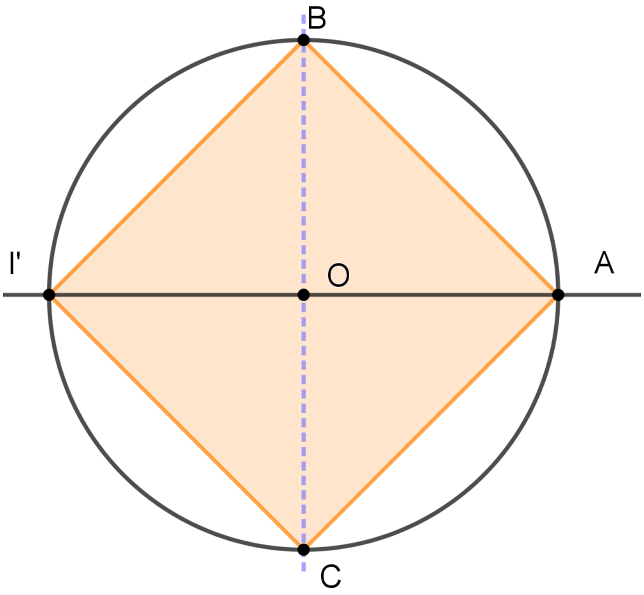
Il suffit alors de tracer la médiatrice de [OI'] comme le montre la figure ci-dessous.



Exemple 2 : Essayons de faire la même chose avec un carré, autrement dit de partager le cercle en 4 arcs égaux. Cette construction revient donc à calculer $\cos(2\pi/4)$. Or

$$\cos(2\pi/4) = \cos(\pi/2) = 0.$$

La construction est alors toute évidente. Il suffit de tracer la perpendiculaire à l'axe des abscisses passant par l'origine du repère.



Exemple 3 : Dans cet exemple, on s'intéresse tout naturellement à partager le cercle en 5 arcs égaux. La tâche est moins triviale qu'auparavant. Toutefois, on montrera plus loin en s'aidant des nombres complexes que

$$\cos(2\pi/5) = \frac{\sqrt{5}-1}{4}.$$

Le nombre $\cos(2\pi/5)$ est donc constructible à la règle non graduée et au compas. Son expression algébrique va nous permettre de trouver une construction effective de ce nombre. On peut appliquer directement les méthodes de construction vues précédemment en construisant d'abord $\sqrt{5}-1$ et en divisant cette longueur par 4. Il existe toutefois une autre méthode : Il s'agit de commencer par la construction du nombre $\sqrt{5}/4$. En effet, le théorème de Pythagore permet de construire le nombre $\sqrt{5}$ assez facilement en prenant un triangle rectangle de côtés 1 et 2 ! Ainsi pour obtenir $\sqrt{5}/4$, on divise l'équation de Pythagore par 16 (car $4^2 = 16$), ce qui nous suggère de prendre le triangle de côtés $1/4$ et $2/4 = 1/2$. La soustraction de $-1/4$ par la suite donne alors la construction suivante :

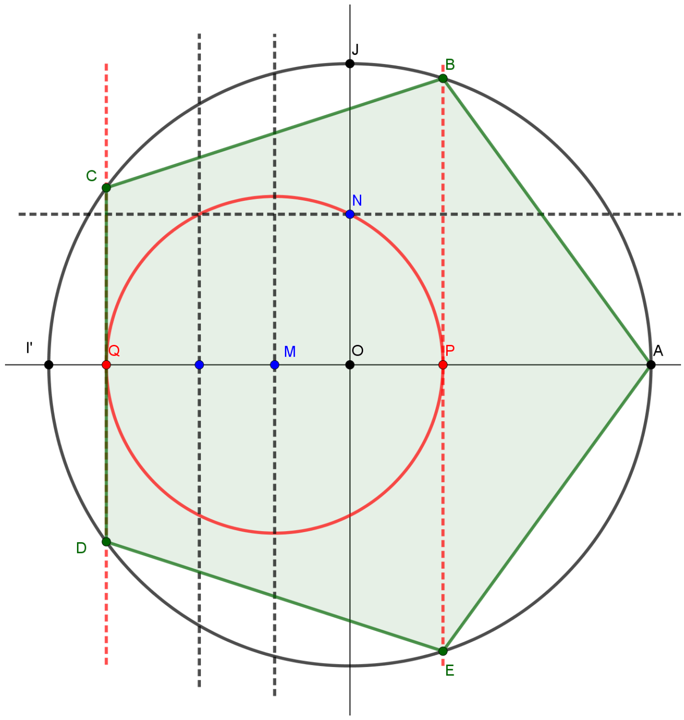
1. Construire le point $\mathscr{M}$ de coordonnées $(-1/4, 0)$ (en construisant deux fois la médiatrice).

2. Construire le point $\mathscr{N}$ de coordonnées $(0, 1/2)$ (en construisant la médiatrice sur l'axe des ordonnées)

3. Construire le cercle de centre $\mathscr{M}$ et de rayon $\mathscr{M}\mathscr{N}$. Ce cercle intersecte l'axe des abscisses aux points P et Q d'abscisses respectives $\cos\frac{2\pi}{5}$ et $\cos\frac{4\pi}{5}$.

4. La perpendiculaire à l'axe des abscisses passant par P coupe le cercle en B et en E. Par ailleurs la perpendiculaire à l'axe des abscisses passant par Q coupe le cercle en C et D. Voilà voilà ! ! ! Il nous reste donc à montrer que $\cos(2\pi/5) = (\sqrt{5}-1)/4$, pour ça on fera fonctionner l'incroyable machine complexe, mais avant, il faut qu'on puisse comprendre le lien entre nombres complexes et géométrie. Je vous laisse déduire de notre petite théorie une construction de l'hexagone régulier. Notez néanmoins que la construction de l'heptagone (7 côtés) régulier est impossible et l'on peut démontrer

que $\cos(2\pi/7)$ ne peut pas s'exprimer en fonction de nos opérations constructibles, mais cette histoire dépasse le cadre de notre cours.



2.2 La méthode de Viète de résolution d'une cubique

Maintenant que le pont algébrico-géométrique est établi, tentons de comprendre la méthode de Viète permettant de résoudre une cubique via le problème de la trisection d'un angle à la règle non graduée et au compas. La trisection d'un angle revient à construire $\cos\theta$ quand $\cos 3\theta$ est donné. Or on peut démontrer relativement facilement que [3]

$$\cos 3\theta = 4\cos^3\theta - 3\cos\theta.$$

Le problème de la trisection de l'angle est donc équivalent à la résolution de l'équation

$$4x^3 - 3x = \cos 3\theta.$$

Si on arrive à démontrer que l'une des solutions s'écrit comme combinaison de nombres rationnels et de racines carrées emboitées alors c'est gagné ! Trop optimiste pour le coup car on peut démontrer que l'angle constructible $\pi/3$ (car $\cos(\pi/3) = 1/2$) n'est pas trisectable. Cette question revient à montrer que l'équation $4x^3 - 3x - 1/2 = 0$ n'admet pas de solution dans $\mathbb{Q}$, mais ceci est une autre histoire qu'on réservera probablement à un autre livre. On

3. La formule $\cos(a+b) = \cos a\cos b - \sin a\sin b$ implique en prenant $a = b$ que $\cos 2a = 2\cos^2 a - 1$. Ainsi en prenant $b = 2a$ on obtient

$$\begin{aligned}
\cos 3a &= \cos a\cos 2a - \sin a\sin 2a \\
&= \cos a(2\cos^2 a - 1) - 2\sin^2 a\cos a \quad \text{car } \sin 2a = 2\sin a\cos a \\
&= \cos a(2\cos^2 a - 1 - 2 + 2\cos^2 a) \quad \text{car } \sin^2 a = 1 - \cos^2 a \\
&= 4\cos^3 a - 3\cos a
\end{aligned}$$

peut d'ailleurs se douter que la trisection est impossible puisque nos nombres constructibles vérifient plutôt des équations de degré $\neq 3$ de façon intuitive.

Par exemple, les nombres constructibles $x_1 = \sqrt{17}$, $x_2 = \sqrt{1+\sqrt{2}}$ et $x_3 = 8+\sqrt{3+\sqrt{31+\sqrt{2}}}$ sont solutions des équations $x^2 - 17 = 0$, $x^4 - 2x^2 - 1 = 0$ et

$$x^8 - 64x^7 + 1780x^6 - 28096x^5 + 275192x^4 - 1711872x^3 + 6599944x^2 - 14405760x + 13616098 = 0$$

dont les degrés sont des puissances de 2.

Nous sommes partis bien loin, mais pour une bonne raison, à savoir plonger la méthode de Viète dans son contexte géométrique. Nous avons vu que toute cubique se ramène à la forme $x^3 + ax + b = 0$. Afin de simplifier nos calculs, nous pouvons écrire cette dernière équation sous la forme $x^3 = 3px + 2q$. Notez alors que dans ce cas la formule de Cardan devient

$$x = \sqrt[3]{q+\sqrt{q^2-p^3}} + \sqrt[3]{q-\sqrt{q^2-p^3}}.$$

Revenons à Viète, son idée géniale était donc de transformer cette équation sous la forme

$$4y^3 - 3y = c.$$

En effet, en posant $x = ky$, où k désigne un réel strictement positif, on obtient

$$k^3y^3 = (3pk)y + 2q \quad \text{ou encore} \quad k^3y^3 - (3pk)y = 2q.$$

Cette dernière est équivalente à

$$\frac{k^3}{4}4y^3 - 3(pk)y = 2q.$$

Afin d'avoir une équation de la forme $4y^3 - 3y = c$, il suffit que k vérifie $k^3/4 = pk$ dans le but de diviser notre équation par pk et obtenir $c = 2q/pk$. Puisque k est strictement positif, l'égalité $k^3/4 = pk$ implique qu'il suffit de prendre $k = 2\sqrt{p}$ [4] afin d'obtenir notre changement de variable. Dans ce cas le nombre c est donné par

$$c = \frac{q}{p\sqrt{p}}$$

Notre savant effectue ce changement de variable pour une raison fort valable et ce parce que

$$4\cos^3\theta - 3\cos\theta = \cos 3\theta.$$

En posant $y = \cos\theta$, l'équation devient $\cos 3\theta = c$. Cette dernière égalité impose à ce qu'on prenne $|c| \leq 1$, ce qui est équivalent à

$$\left|\frac{q}{p\sqrt{p}}\right| \leq 1$$

ou encore $q^2 \leq p^3$. Dans ce cas,

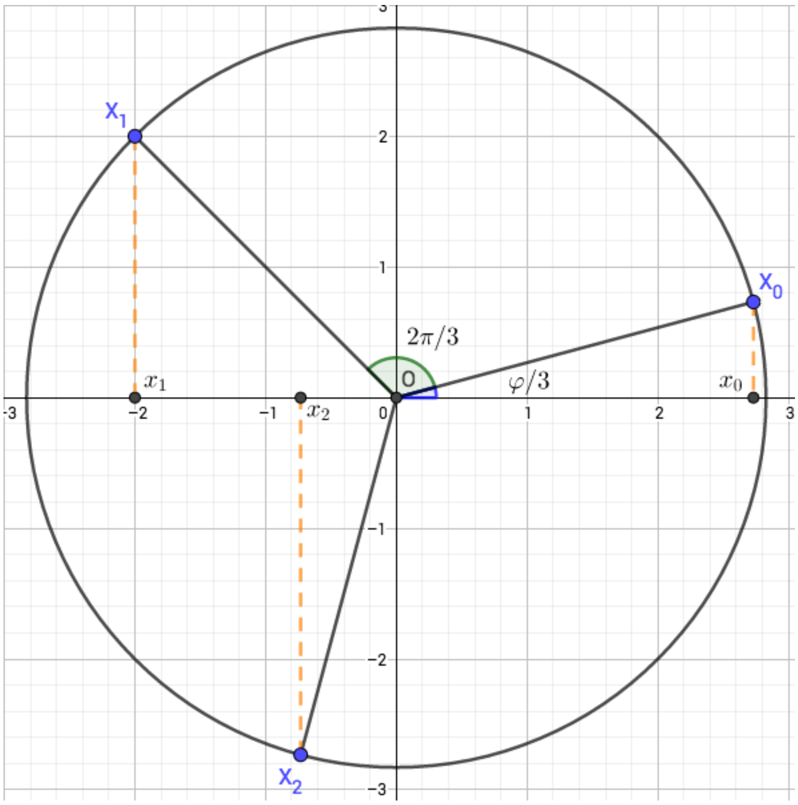
$$\cos(3\theta) = c \iff \cos(\theta) = \cos\left(\frac{1}{3}(\arccos(c) + 2n\pi)\right)$$

4. Bien sûr, nous prenons ici p strictement positif.

Il s'ensuit que les solutions de notre équation $x^3 = 3px + 2q$ sont données par la formule

$$x_n = 2\sqrt{p}\cos\left(\frac{1}{3}(\varphi + 2n\pi)\right) \quad \text{où} \quad n \in \{0, 1, 2\} \text{ et } \varphi = \arccos(q/p\sqrt{p}).$$

Remarquer alors que ces solutions sont disposées géométriquement d'une façon particulière. Elles sont les abscisses des points appartenant au cercle centré à l'origine du repère et de rayon $2\sqrt{p}$. Le premier point X_0 fait un angle égal à $\varphi/3$. Le deuxième est obtenu par rotation de celui-ci d'un angle $2\pi/3$ autour de l'origine du repère et le troisième par cette même rotation du deuxième.



Regardons ce que cela donne sur quelques exemples concrets.

Exemple 1 : Les solutions de l'équation $x^3 = 3x$ sont trivialement $x = 0, \pm\sqrt{3}$. Dans cet exemple $p = 1$ et $q = 0$. La méthode de Viète donne $\varphi = \arccos(0) = \pi/2$, ce qui implique que les solutions sont

$$x_n = 2\sqrt{1}\cos\left(\frac{1}{3}(\pi/2 + 2n\pi)\right).$$

Ceci donne

$$\begin{aligned}
x_0 &= 2\cos(\pi/6) = \sqrt{3} \\
x_1 &= 2\cos(5\pi/6) = 2\cos(\pi - \pi/6) = -2\cos(\pi/6) = -\sqrt{3} \\
x_2 &= 2\cos(3\pi/2) = 0,
\end{aligned}$$

qui sont bien les solutions attendues ! Incroyable n'est-ce pas ?

Exemple 2 : Prenons l'équation $x^3 = 6x + 4$. Ici, $p = q = 2$ et nous avons

$$\begin{aligned}\varphi &= \arccos\left(\frac{q}{p\sqrt{p}}\right)\\ &= \arccos\left(\frac{2}{2\sqrt{2}}\right)\\ &= \arccos\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\\ &= \frac{\pi}{4}.\end{aligned}$$

Ainsi, les solutions sont données par la formule

$$x_n = 2\sqrt{2}\cos\left(\frac{1}{3}(\pi/4 + 2n\pi)\right).$$

En remplaçant n successivement par 0, 1 et 2 on obtient [5]

$$\begin{aligned}x_0 &= 2\sqrt{2}\cos(\pi/12) = 1 + \sqrt{3}\\ x_1 &= 2\sqrt{2}\cos(9\pi/12) = -2\\ x_2 &= 2\sqrt{2}\cos(17\pi/12) = -2\sqrt{2}\cos(\pi/2 - \pi/12) = 1 - \sqrt{3}.\end{aligned}$$

Je vous laisse vérifier seul qu'on a bien

$$x^3 - 6x - 4 = (x+2)(x - 1 - \sqrt{3})(x - 1 + \sqrt{3}).$$

Exemple 3 : Nous considérons dans cet exemple l'équation $x^3 = 3x - 2$. Dans ce cas $p = 1$ et $q = -1$. La formule de Viète donne $\varphi = \arccos(-1) = \pi$ et

$$\begin{aligned}x_0 &= 2\cos(\pi/3) = 1\\ x_1 &= 2\cos(\pi) = -2\\ x_2 &= 2\cos(5\pi/3) = 1.\end{aligned}$$

Le nombre 1 est donc solution double de notre équation et l'on peut là encore vérifier aisément que

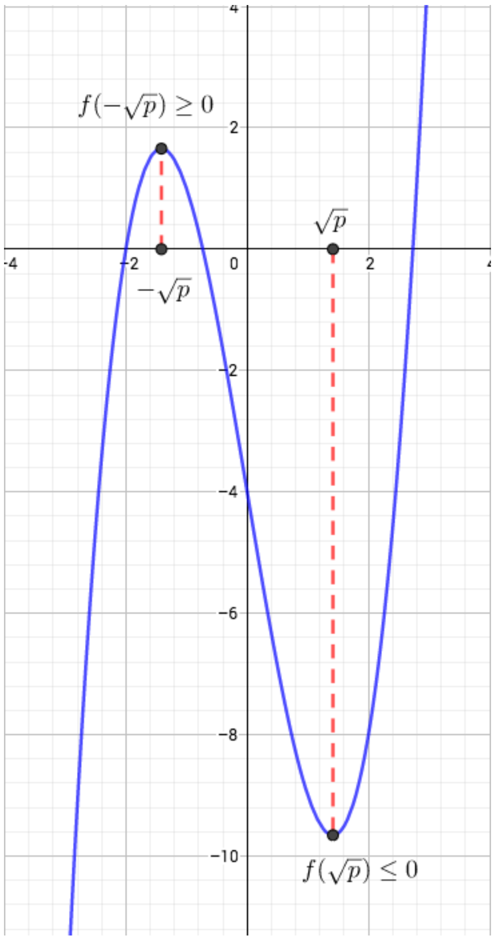
$$x^3 - 3x + 2 = (x-1)^2(x+2).$$

Remarques :

1. Une étude de fonction permet de se convaincre que la méthode de Viète donne bien 3 solutions réelles (comptées avec multiplicité). En effet, il suffit de vérifier que la condition $q^2 \leq p^3$ garantisse que la fonction f définie par l'expression $f(x) = x^3 - 3px - 2q$ intersecte l'axe des abscisses trois fois, comme le montre la figure ci-dessous.

5. Pour calculer $\cos(\pi/12)$ et $\sin(\pi/12)$ on pourra remarquer que $\pi/12 = \pi/3 - \pi/4$, ce qui implique par exemple que

$$\begin{aligned}\cos(\pi/12) &= \cos(\pi/3 - \pi/4)\\ &= \cos(\pi/3)\cos(\pi/4) + \sin(\pi/3)\sin(\pi/4)\\ &= \frac{\sqrt{2} + \sqrt{6}}{4}.\end{aligned}$$



La fonction f est bien dérivable sur tout $\mathbb{R}$ de dérivée donnée par l'expression

$$\begin{aligned} f'(x) &= 3x^2 - 3p \\ &= 3(x - \sqrt{p})(x + \sqrt{p}). \end{aligned}$$

On obtient ainsi le tableau de variations de la fonction f suivant

x	$-\infty$		$-\sqrt{p}$		$\sqrt{p}$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$f(-\sqrt{p})$	$\searrow$	$f(\sqrt{p})$	$\nearrow$	$+\infty$

Ainsi, afin d'avoir 3 solutions réelles de l'équation $x^3 = 3px + 2q$ où $p > 0$, il suffit et il faut que $f(-\sqrt{p}) \geq 0$ et $f(\sqrt{p}) \leq 0$. Je vous laisse vérifier seul que ces deux conditions sont équivalentes à la condition

$$\left| \frac{q}{p\sqrt{p}} \right| \leq 1,$$

qui est bel et bien la condition permettant le fonctionnement de la formule de Viète.

2. Il est important de noter que la formule de Viète contourne les nombres complexes exactement quand la formule de Cardan utilise ces derniers. Je vous rappelle que pour l'équation $x^3 = 3px + 2q$, la formule de Cardan est donnée par

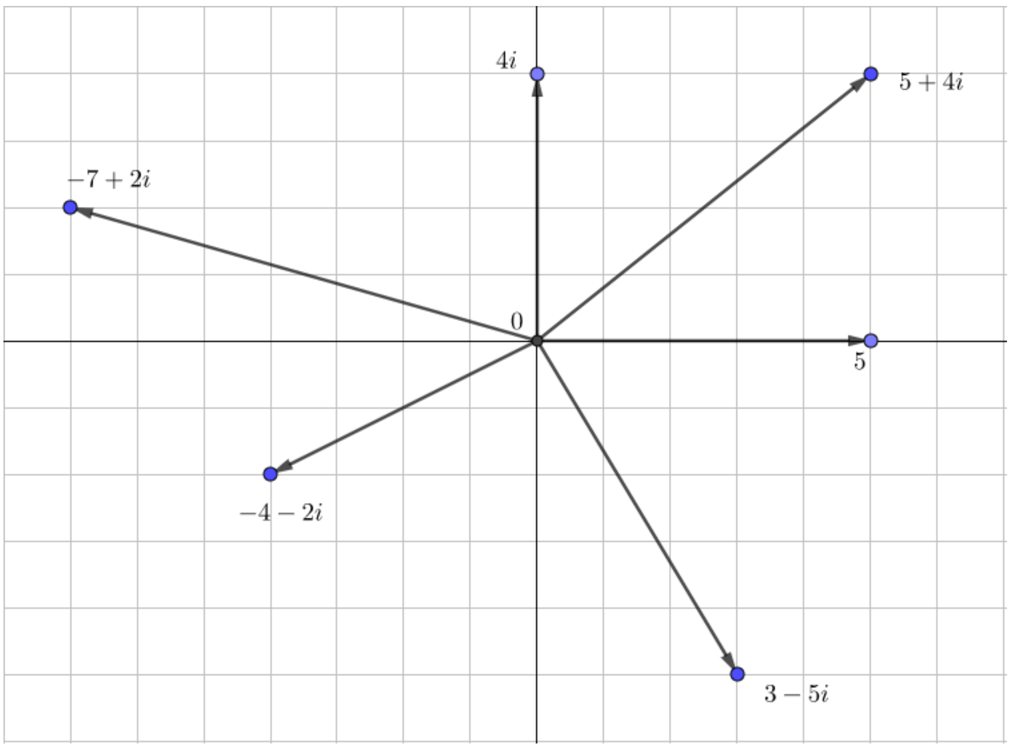
$$x = \sqrt[3]{q + \sqrt{q^2 - p^3}} + \sqrt[3]{q - \sqrt{q^2 - p^3}},$$

et que celle-ci fait appel aux nombres complexes quand $q^2 < p^3$. Ces deux méthodes sont-elles alors fondamentalement différentes ? Affaire à suivre ...

3 Interprétation géométrique des nombres complexes

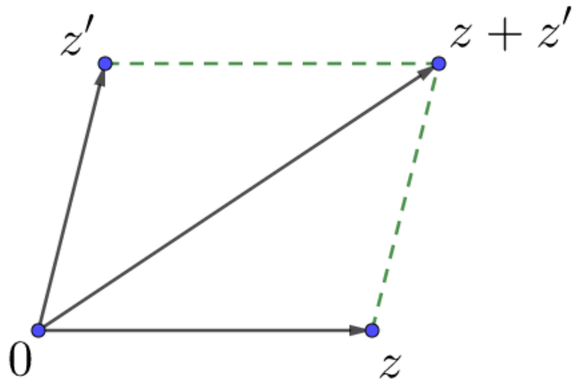
Les mathématiciens ont mis environ deux siècles et demi avant de se servir réellement des nombres complexes. Ce blocage psychologique et philosophique est probablement dû à la nature mystérieuse de ces nombres, ne correspondant jusque là à aucune réalité physique. Il a fallu attendre leur interprétation géométrique afin qu'ils prennent sens aux yeux de nos ancêtres érudits. Il est important de noter que cette découverte a échappé à des savants du niveau de Fermat, Descartes, Leibniz et même son excellence Newton ! Nos nombres complexes sont maintenant des objets légitimes et ce grâce aux travaux de, indépendamment et successivement, Caspar Wessel, Jean-Robert Argand et Carl Freidrich Gauss. Qu'appelle-t-on donc un nombre complexe.

Puisqu'un nombre complexe est constitué de deux nombres réels, on peut tout simplement dire qu'il s'agit d'un point ou d'un vecteur dans le plan. **La quantité $a + ib$ est donc tout simplement le point (a, b) dans le plan cartésien, ou de manière équivalente le vecteur connectant l'origine du repère à ce point**. Cela ne répond malheureusement pas à notre question car il nous reste à définir et à comprendre géométriquement l'addition et la multiplication de nos nombres.



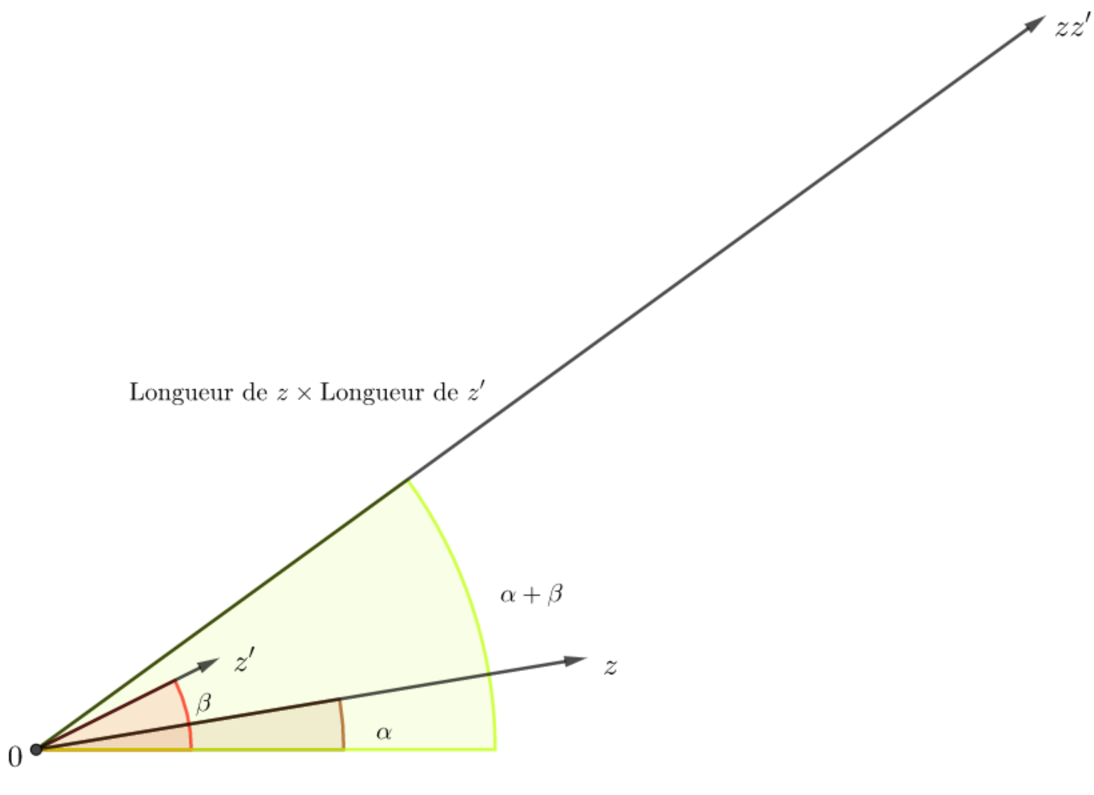
De manière plausible et sans trop d'efforts, l'addition des nombres complexes correspond à l'addition vectorielle et on a donc la règle géométrique suivante

La somme de deux nombres complexes z et z' est donnée par la règle du parallélogramme définissant l'addition vectorielle



Vous pouvez alors vérifier que cette règle est consistente par exemple avec l'addition de 5 et de $4i$, qui donne bien $5+4i$ (voir figure ci-dessus). Plus généralement, la notation $z=a+bi$ donne bien le nombre complexe de coordonnées (a,b), puisqu'il s'agit de l'addition de a et de bi. La règle de la multiplication, quant à elle, ne saute pas aux yeux. Puisqu'on peut repérer un point dans le plan par sa distance par rapport à l'origine du repère et l'angle qu'il fait par rapport à l'axe des abscisses, notre règle s'énonce de la façon suivante

La longueur de zz' vaut la longueur de z multipliée par la longueur de z' et son angle vaut la somme de l'angle de z et de l'angle de z'.



Nous pouvons alors vérifier que la multiplication de 4 par i donne bien $4i$ avec notre règle. En effet, la longueur du nombre complexe 4 vaut 4 et son angle vaut 0. Par ailleurs, la longueur du nombre i vaut 1 et son angle vaut $\pi/2$. Ainsi le produit de 4 par i devrait donner un nombre complexe dont la longueur vaut $4 \cdot 1 = 4$ et d'un angle égal à $\pi/2 + 0 = \pi/2$. Il s'agit bien de $4i$, c'est à dire le résultat attendu. Remarquez alors que cette règle donne bien $i^2 = -1$. Pour le voir, on note d'abord que i^2 est la multiplication de i par lui-même. Le résultat s'ensuit puisque la longueur de i^2 est $1 \cdot 1 = 1$ et son angle vaut $\pi/2 + \pi/2 = \pi$. Ce nombre vaut donc -1 ! Incroyable, n'est ce pas ?

Maintenant que nous disposons de cette définition géométrique des nombres complexes ainsi que d'une interprétation des opérations algébriques imposées sur nos nombres, nous sommes à même de mieux comprendre cette invention incroyable. Mais avant d'aller plus loin, tâchons d'introduire quelques notations, utiles pour la suite. La distance séparant un nombre complexe z et l'origine du repère s'appelle **le module** de z, noté $|z|$. L'angle de z s'appelle **l'argument** de z qu'on note $\arg(z)$. Nous devons montrer dans la suite l'équivalence entre la définition algébrique des opérations sur les complexes et leur définition géométrique.

En ce qui concerne l'addition, je vous laisse voir seul pourquoi la règle du parallélogramme de l'addition de deux nombres z et z' est équivalente à obtenir $z + z'$ algébriquement, à savoir la partie réelle de $z + z'$ est la somme de la partie réelle de z et de celle de z'. De même, sa partie imaginaire est la somme de la partie imaginaire de z et de la partie imaginaire de z'. La multiplication, quant à elle, est moins évidente. Rappelons que la loi de multiplication algébrique est donnée par la règle peu instructive

$$(a + bi)(c + di) = (ac - bd) + (ad + bc)i.$$

Notez alors qu'en contre partie, la règle géométrique de la multiplication est beaucoup plus parlante. En effet, si on caractérise un nombre complexe par ses coordonnées polaires, on pourra le noter [6] sous la forme

$$z = |z|\widehat{\theta}\,^{7}.$$

La multiplication est donc tout simplement donnée par la règle

$$z \cdot z' = (|z|\widehat{\theta}) \cdot (|z'|\widehat{\theta'}) = (|z| \cdot |z'|)\widehat{(\theta + \theta')}.$$

Tâchons alors de montrer que les deux règles sont équivalentes. Nous commençons par montrer que l'on peut déduire la règle algébrique à partir de la règle géométrique. Pour se faire, il est intéressant de voir la règle géométrique d'un autre angle. Fixons alors un nombre complexe $Z = |Z|\widehat{\theta}$ et regardons l'effet de la multiplication d'un nombre complexe z quelconque par Z, autrement dit l'effet de la multiplication par Z sur tout le plan complexe $\mathbb{C}$.

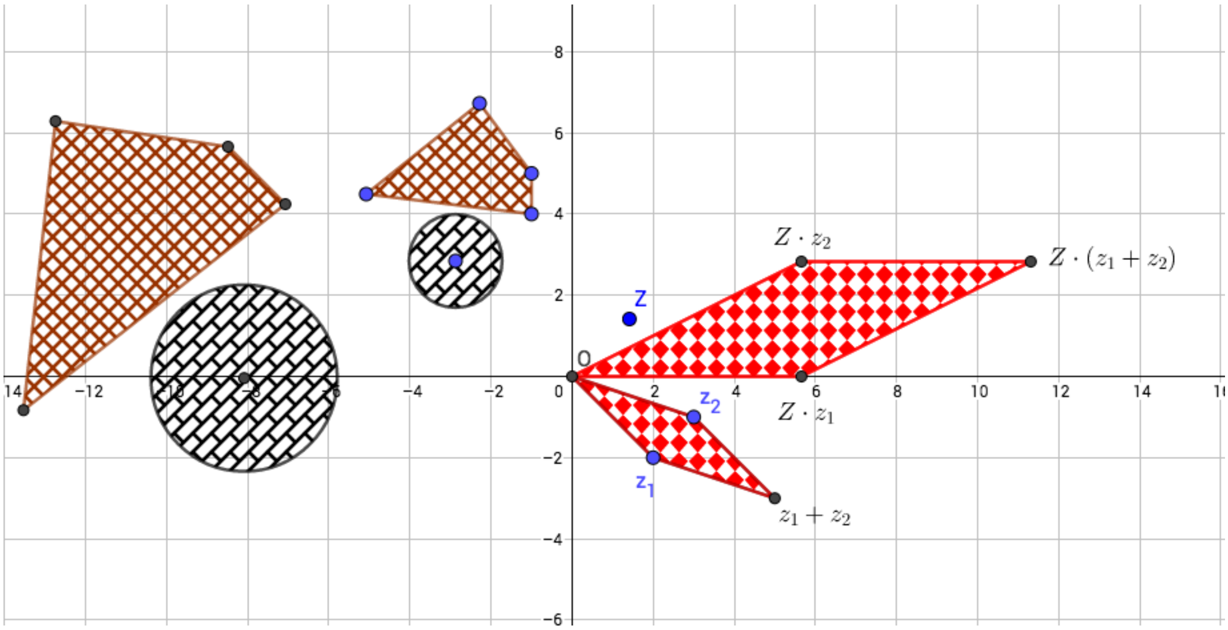
La règle de la multiplication géométrique nous dit alors que le module de z sera agrandi d'un facteur égal à $|Z|$ et son argument $\arg(z)$ augmenté de θ. Ainsi, géométriquement, la multiplication par $Z = |Z|\widehat{\theta}$ est une rotation d'un angle θ suivi d'une dilatation d'un facteur $|Z|$, centrées toutes les deux à l'origine du repère. [8] L'illustration ci-dessous montre

6. Cette notation est provisoire, nous en verrons une meilleure dans la suite.

7. Attention $|z|\widehat{\theta}$ n'est pas la multiplication de $|z|$ par $\widehat{\theta}$. Il s'agit tout simplement d'une notation signifiant que le module de z vaut $|z|$ et que son argument vaut θ.

8. Notez que commencer par la rotation ou par la dilatation ne change rien à notre transformation. Autrement dit, la dilatation et la rotation commutent.

l'effet d'une telle transformation sur quelques figures géométriques. Le nombre Z ici vaut $Z = \sqrt{2} + i\sqrt{2} = 2(\widehat{\pi/4})$

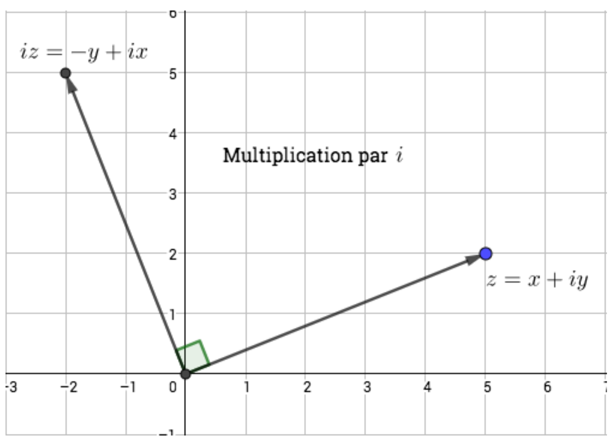


Il est maintenant relativement évident d'obtenir la règle algébrique de multiplication à partir de la règle géométrique. Rappelons que pour établir celle-ci, Bombelli utilise les affirmations suivantes :

1. $i^2 = -1$
2. Si Z, z_1 et z_2 sont trois nombres complexes alors $Z \cdot (z_1 + z_2) = Z \cdot z_1 + Z \cdot z_2$.

Nous avons établi précédemment l'égalité $i^2 = -1$ à partir de la règle géométrique. Il nous reste à en déduire la simple distributivité. En effet, les rotations et les dilatations conservent les parallélogrammes. Or $z_1 + z_2$ est le quatrième sommet du parallélogramme engendré par z_1 et z_2. Il suffit alors de remarquer que la multiplication par Z transforme ce parallélogramme en un parallélogramme dont les sommets sont $0, Z \cdot z_1, Z \cdot z_2$ et $Z \cdot (z_1 + z_2)$. Le résultat en découle.

Nous devons maintenant établir la réciproque, à savoir que la règle algébrique implique la règle géométrique. Nous commençons par inspecter la transformation f définie par l'expression $f(z) = iz$.



Si $z = x + iy$ alors la règle algébrique de Bombelli implique que

$$f(z) = f(x+iy) = i(x+iy) = -y + ix.$$

La figure ci-dessus montre alors que $z \mapsto iz$ fait tourner z autour du centre d'un angle égal à $\pi/2$. Nous allons utiliser ce résultat afin d'inspecter la transformation g définie par $g(z) = az$, où a désigne un nombre complexe quelconque. Prenons un exemple concret avec un nombre a à coordonnées entières tel que $a = 4+5i = \sqrt{41}\widehat{\theta}$, où $\theta = \arctan(5/4)$.

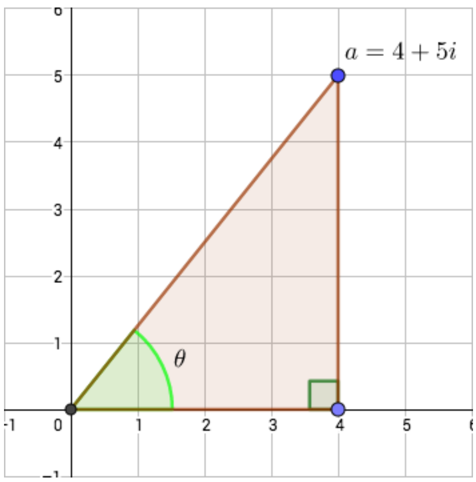


Figure (a)

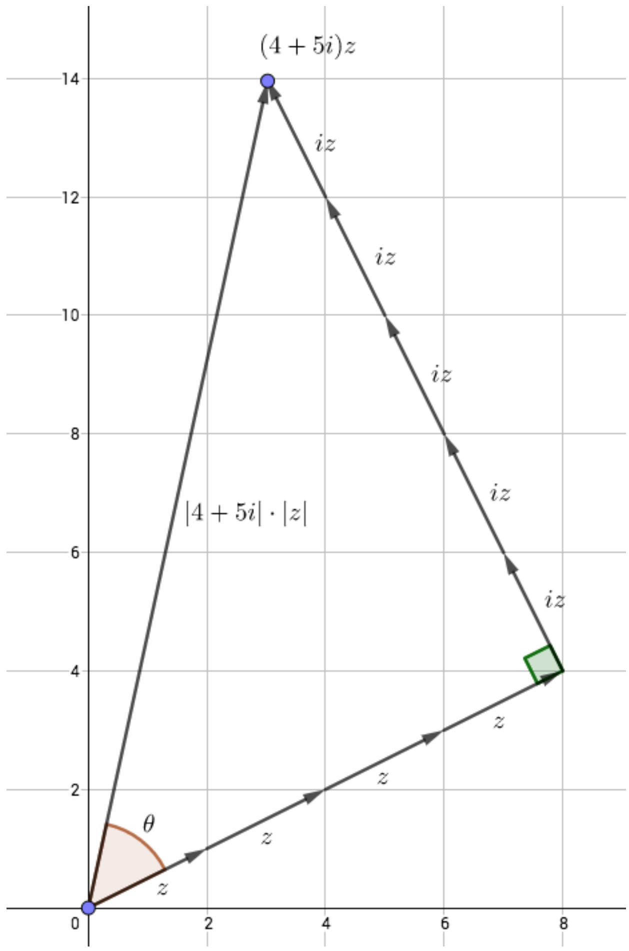


Figure (b)

Rappelons que la règle algébrique dit que la simple distributivité est fonctionnelle sur les nombres complexes, ainsi g peut se réécrire de la façon suivante

$$\begin{aligned} g(z) &= az \\ &= (4+5i)z \\ &= 4z+5iz \\ &= 4z+5(iz) \\ &= 4z+5(z \text{ tourné d'un angle droit}), \end{aligned}$$

que l'on peut visualiser sur la figure (b). Les triangles de la figure (a) et de la figure (b) sont semblables (Pourquoi ?), il s'ensuit que la multiplication par $a = 4+5i$ fait bien tourner le plan d'un angle égal à θ et le dilate d'un facteur $|a| = \sqrt{41}$. Cette démonstration se généralise bien à tout nombre complexe a, Ce qui achève notre preuve de l'équivalence des deux règles.

4 La formule de De Moivre

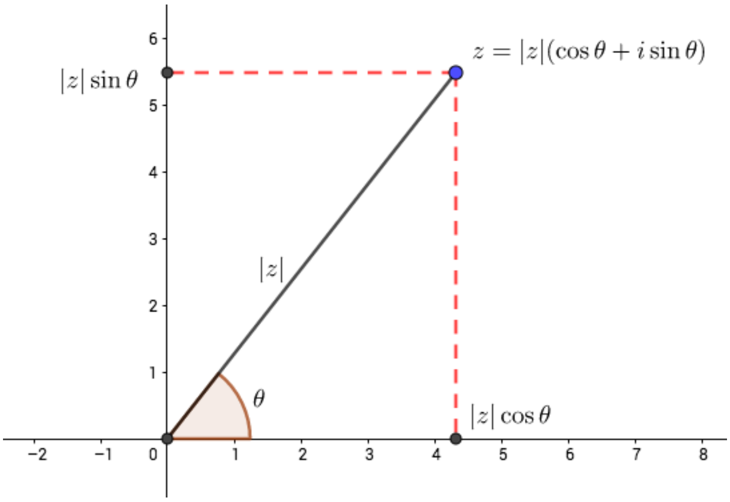
La formule de *De Moivre* affirme que

$$(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos(n\theta) + i\sin(n\theta).$$

Elle se démontre aisément par récurrence en prenant $\theta = \varphi$ dans l'identité fondamentale suivante [9]

$$(\cos\theta + i\sin\theta)(\cos\varphi + i\sin\varphi) = \cos(\theta+\varphi) + i\sin(\theta+\varphi).$$

Cette identité se déduit facilement de la règle géométrique de la multiplication des nombres complexes parce que si $z = |z|\widehat{\theta}$ alors $z = |z|(\cos\theta + i\sin\theta)$ (voir figure).



9. Cette formule peut se déduire aussi à partir des identités d'addition des angles des fonctions cos et sin. Nous avons en effet

$$\begin{aligned} (\cos\theta + i\sin\theta)(\cos\varphi + i\sin\varphi) &= (\cos\theta\cos\varphi - \sin\theta\sin\varphi) + i(\cos\theta\sin\varphi + \sin\theta\cos\varphi) \\ &= \cos(\theta+\varphi) + i\sin(\theta+\varphi). \end{aligned}$$

La démonstration par récurrence de notre belle formule trahit toutefois l'histoire de sa découverte. Nous allons donc la replonger dans son contexte historique afin de mieux l'apprécier.

Avec le développement rapide du calcul infinitésimal au 17ème siècle, nos ancêtres ont été amené à inspecter des intégrales de la forme

$$\int \frac{1}{x^n \pm a^n} dx.$$

L'évaluation de cette famille d'intégrales revient après un changement de variable adéquat à étudier les intégrales de la forme

$$\int \frac{1}{x^n \pm 1} dx.$$

Exemple 1 : Prenons un exemple pour commencer. Si $n = 2$, alors

$$\begin{aligned} \frac{1}{x^2-1} &= \frac{1}{(x-1)(x+1)} \\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+1}\right). \end{aligned}$$

Ainsi

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{x^2-1} dx &= \frac{1}{2} \int \left(\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+1}\right) dx \\ &= \frac{1}{2} \ln\left(\left|\frac{x-1}{x+1}\right|\right) + C, \end{aligned}$$

où C désigne une constante. L'observation clef ayant servi à faire tomber cette intégrale est la décomposition de $x^2 - 1$ en produit de facteurs linéaires, à savoir $x^2 - 1 = (x-1)(x+1)$.

Exemple 2 : On souhaite trouver la primitive de $1/(x^3 - 1)$. Pour se faire, l'idée consiste à factoriser l'expression $x^3 - 1$. Nous avons en effet,

$$x^3 - 1 = (x-1)(x^2 + x + 1).$$

Remarquez qu'on ne peut pas factoriser davantage cette expression dans $\mathbb{R}$ puisque le discriminant Δ de $x^2 + x + 1$ est strictement négatif. En passant à l'inverse, la décomposition en éléments simples permet d'affirmer que

$$\begin{aligned} \frac{1}{x^3-1} &= \frac{1}{(x-1)(x^2+x+1)} \\ &= \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{x-1} - \frac{1}{3} \cdot \frac{x+2}{x^2+x+1}. \end{aligned}$$

En intégrant cette expression on obtient

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{x^3-1} dx &= \frac{1}{3} \int \frac{1}{x-1} dx - \frac{1}{3} \int \frac{x+2}{x^2+x+1} dx \\ &= \frac{1}{3} \ln|x-1| - \frac{1}{3} \int \frac{2x+1}{2(x^2+x+1)} dx - \frac{1}{3} \int \frac{3}{2(x^2+x+1)} dx \\ &= \frac{1}{3} \ln|x-1| - \frac{1}{6} \ln(x^2+x+1) - \frac{1}{2} \int \frac{1}{x^2+x+1} dx. \end{aligned}$$

Il nous reste donc à évaluer l'intégrale de $1/(x^2+x+1)$. Pour se faire, il suffit de remarquer que

$$\begin{aligned}x^2+x+1 &= \left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}\\ &= \frac{3}{4}\left[\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right)^2+1\right].\end{aligned}$$

Ainsi, en utilisant un changement de variable adéquat, cette intégrale se ramène à évaluer l'intégrale de $1/(x^2+1)$. En 1675, Leibniz a su démontrer que

$$\int \frac{1}{x^2+1}dx = \arctan(x)+C.$$

Notre éminent ancêtre pointe ainsi l'utilité de décomposer notre expression x^n-1 en produit de facteurs linéaires ou quadratiques afin de pouvoir trouver une primitive de son inverse. Regardons ce que cela donne pour $n=4$.

Exemple 3 : Nous savons que $x^4-1=(x-1)(x+1)(x^2+1)$. En prenant son inverse, il vient que

$$\frac{1}{x^4-1}=\frac{a}{x-1}+\frac{b}{x+1}+\frac{cx+d}{x^2+1},$$

où a, b, c et d désignent quatre réels. Après calcul on obtient la décomposition suivante

$$\frac{1}{x^4-1}=\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{x-1}-\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{x+1}-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x^2+1}$$

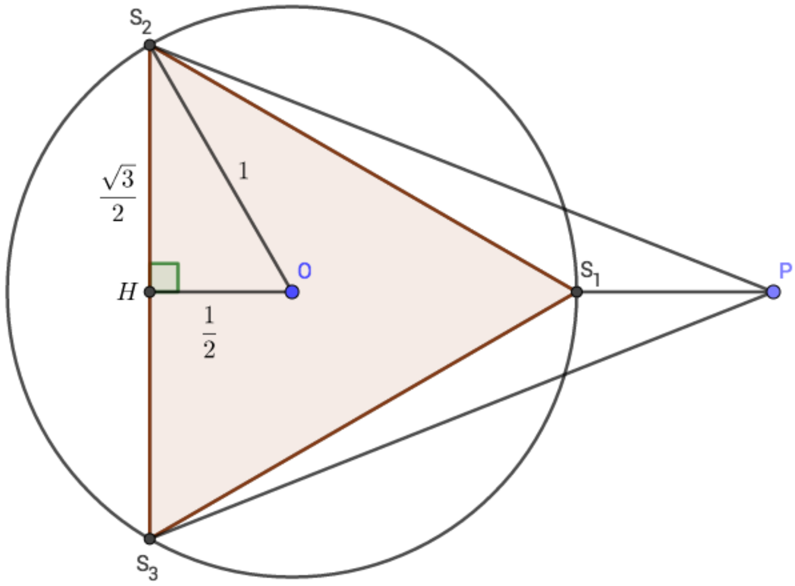
On en déduit que

$$\begin{aligned}\int\frac{1}{x^4-1}dx &= \frac{1}{4}\int\frac{1}{x-1}dx-\frac{1}{4}\int\frac{1}{x+1}dx-\frac{1}{2}\int\frac{1}{x^2+1}dx\\ &= \frac{1}{4}\ln\left(\left|\frac{x-1}{x+1}\right|\right)-\frac{1}{2}\arctan(x)+C.\end{aligned}$$

À ce stade, Leibniz a commencé à soupçonner que toute fraction rationnelle pouvait être intégrer seulement en fonction de $\int\frac{1}{x}dx$ et $\int\frac{1}{x^2+1}dx$, à condition de pouvoir factoriser son dénominateur en facteurs linéaires ou quadratiques. On doit les premières factorisations des expressions de la forme $x^n \pm a^n$ au mathématicien anglais Roger Cotes (1682-1716). Nous avons par exemple

$$\begin{aligned}x^{2n}-a^{2n} &= (x-a)(x+a)\prod_{k=1}^{n-1}\left(x^2-2a\cos\left(\frac{2k\pi}{2n}\right)x+a^2\right)\\ x^{2n+1}-a^{2n+1} &= (x-a)\prod_{k=1}^{n}\left(x^2-2a\cos\left(\frac{2k\pi}{2n+1}\right)x+a^2\right).\end{aligned}$$

La partie surprenante de ces identités est la méthode géométrique utilisée par Cotes afin de les établir. Ces formules découlent de la géométrie des polygones réguliers de n côtés, autrement dit, de la division du cercle en n arcs de même mesure. Soit $f_n(x)=x^n-1$ et regardons ce qui se passe géométriquement pour $n=3$.



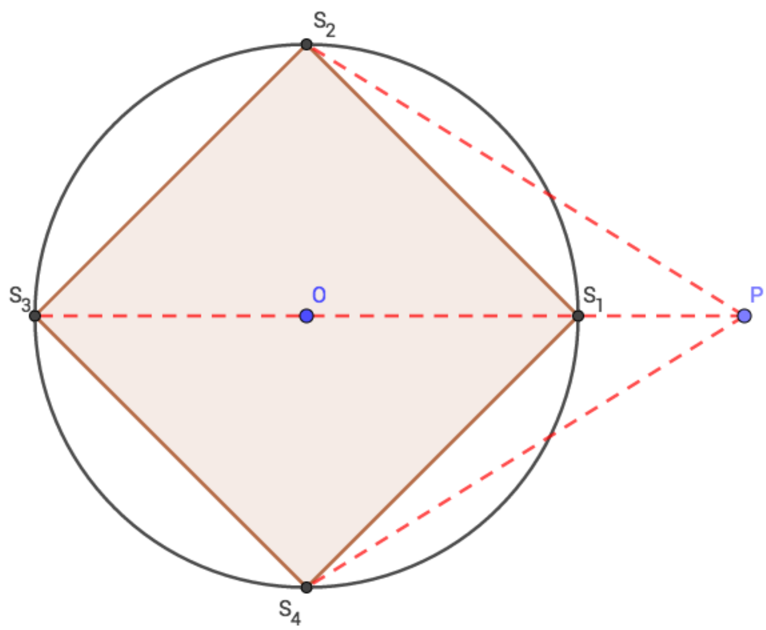
Sur la figure ci-dessus, $P \in (OS_1)$ et la longueur OP vaut x. S_1, S_2 et S_3 sont les sommets du 3-gone inscrit dans le cercle de centre O et de rayon égal à 1. Cotes prétend que la factorisation de $f_3(x)$ s'obtient en utilisant les sommets de notre triangle équilatéral de la manière suivante

$$f_3(x) = PS_1 \cdot PS_2 \cdot PS_3.$$

En effet, en appliquant le théorème de Pythagore dans le triangle HPS_2 on obtient

$$\begin{aligned} PS_1 \cdot PS_2 \cdot PS_3 &= PS_1 \cdot (PS_2)^2 \\ &= (x-1)\left[\left(x+\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2\right] \\ &= (x-1)(x^2+x+1). \end{aligned}$$

Incroyable, qu'en pensez-vous ? Regardons maintenant le cas de $n = 4$.



Cotes prétend là encore (sans donner de preuve) que

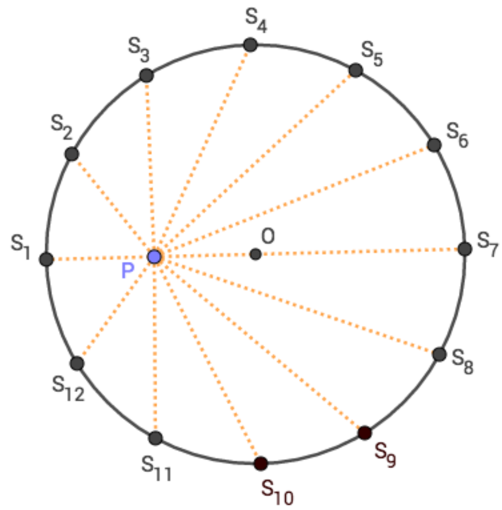
$$f_4(x) = PS_1 \cdot PS_2 \cdot PS_3 \cdot PS_4$$

Cela coincide bien avec la factorisation $x^4 - 1 = (x-1)(x+1)(x^2+1)$. En effet, $PS_2 = PS_4$ et le théorème de Pythagore appliqué dans le triangle POS_2 implique que $PS_2 = \sqrt{x^2+1}$. Par conséquent

$$\begin{aligned} PS_1 \cdot PS_2 \cdot PS_3 \cdot PS_4 &= (x-1)\sqrt{x^2+1}(x+1)\sqrt{x^2+1} \\ &= (x-1)(x+1)(x^2+1). \end{aligned}$$

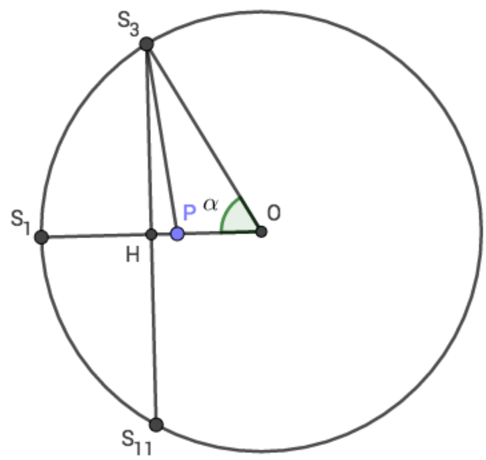
Nous verrons plus loin que les nombres complexes ainsi que la formule de De Moivre permettent d'établir les résultats de Cotes. Notons que dans ses travaux originaux, pour obtenir les factorisations de $a^n \pm x^n$, Cotes divise un cercle de rayon a en $2n$ arcs égaux. Soit en effet O le centre de ce cercle et P un point du segment [OA] tel que $OP = x$. Notre savant affirme alors que

$$\begin{aligned} a^n - x^n &= PS_1 \cdot PS_3 \cdot PS_5 \cdots \\ a^n + x^n &= PS_2 \cdot PS_4 \cdot PS_6 \cdots \end{aligned}$$



En effet, le théorème de Pythagore appliqué dans le triangle S_3PH de la figure simplifiée suivante donne la relation

$$S_3P^2 = PH^2 + HS_3^2.$$



Or $PH = OH - OP = a\cos\alpha - x$ et $HS_3 = a\sin\alpha$. Il en découle que

$$\begin{aligned} SP^2 &= (a\cos\alpha - x)^2 + (a\sin\alpha)^2 \\ &= x^2 - 2ax\cos\alpha + a^2(\sin^2\alpha + \cos^2\alpha) \\ &= x^2 - 2ax\cos\alpha + a^2 \end{aligned}$$

Ainsi $S_3P \cdot S_{11}P = S_3P^2 = x^2 - 2ax\cos\alpha + a^2$. La preuve des résultats de Cotes est due à Abraham de Moivre (1667-1754), en tentant d'exprimer $\cos\alpha$ quand $\cos n\alpha$ est connu. Notons alors que la division du cercle (à la règle non graduée et au compas) revient à exprimer $\cos(2\pi/n)$ sachant $\cos 2\pi$. Pour se faire, notre érudit a étudié la famille des polynômes P_n, qu'on appelle les polynômes de Chebyshev de première espèce, définie par $P_1(x) = x, P_2(x) = 2x^2 - 1$ et pour tout $n \geq 2$

$$P_{n+1}(x) = 2xP_n(x) - P_{n-1}(x).$$

Ces polynômes permettent en effet d'exprimer $\cos n\alpha$ en fonction de $\cos\alpha$. Autrement dit

$$P_n(\cos\alpha) = \cos n\alpha.$$

Pour le voir, il suffit de remarquer que

$$\begin{aligned} \cos 2\alpha &= 2\cos^2\alpha - 1 \\ \cos(n+1)\alpha &= \cos n\alpha\cos\alpha - \sin n\alpha\sin\alpha \\ &= \cos n\alpha\cos\alpha - (\cos\alpha\cos n\alpha - \cos(n-1)\alpha) \\ &= 2\cos\alpha\cos n\alpha - \cos(n-1)\alpha \end{aligned}$$

De Moivre a inspecté l'équation $P_n(x) = a$ pour n impair et s'est rendu compte que la solution est donnée par l'expression

$$x = \frac{1}{2}\sqrt[n]{a + \sqrt{a^2 - 1}} + \frac{1}{2}\sqrt[n]{a - \sqrt{a^2 - 1}}$$

En prenant $a = \cos n\alpha$ on obtient

$$\begin{aligned} \cos\alpha &= \frac{1}{2}\sqrt[n]{\cos n\alpha + \sqrt{\cos^2 n\alpha - 1}} + \frac{1}{2}\sqrt[n]{\cos n\alpha - \sqrt{\cos^2 n\alpha - 1}} \\ &= \frac{1}{2}\sqrt[n]{\cos n\alpha + \sqrt{-\sin^2 n\alpha}} + \frac{1}{2}\sqrt[n]{\cos n\alpha - \sqrt{-\sin^2 n\alpha}} \\ &= \frac{1}{2}\sqrt[n]{\cos n\alpha + i\sin n\alpha} + \frac{1}{2}\sqrt[n]{\cos n\alpha - i\sin n\alpha} \end{aligned}$$

Attention ici $\sqrt{\sin^2 n\alpha}$ ne vaut pas $\sin n\alpha$ mais $|\sin n\alpha|$. Je vous laisse voir seul pourquoi l'égalité reste vraie sans les barres de la valeur absolue. En poussant les calculs plus loin, De Moivre en déduit sa fameuse formule

$$(\cos\alpha + i\sin\alpha)^n = \cos n\alpha + i\sin n\alpha.$$

Cette formule permet de déduire les racines n-ièmes de l'unité, autrement dit tous les nombres complexes z vérifiant $z^n = 1$. Il s'agit en effet des nombres

$$\cos\frac{2k\pi}{n} + i\sin\frac{2k\pi}{n}, \quad \text{où} \quad k = 0, 1, \cdots, n-1.$$

Ces nombres sont deux à deux distincts et d'après la formule de de Moivre on a

$$\begin{aligned}\left(\cos\frac{2k\pi}{n}+i\sin\frac{2k\pi}{n}\right)^n &= \cos\left(n\frac{2k\pi}{n}\right)+i\sin\left(n\frac{2k\pi}{n}\right)\\ &= \cos 2k\pi + i\sin 2k\pi\\ &= 1.\end{aligned}$$

Nous sommes maintenant à même de démontrer les formules de Cotes. Tout d'abord, afin d'alléger les calculs, nous pouvons noter $\cos\alpha + i\sin\alpha$ sous la forme $e^{i\alpha}$ [10]. Dans ce cas, la formule

$$(\cos\alpha + i\sin\alpha)(\cos\beta + i\sin\beta) = \cos(\alpha+\beta) + i\sin(\alpha+\beta)$$

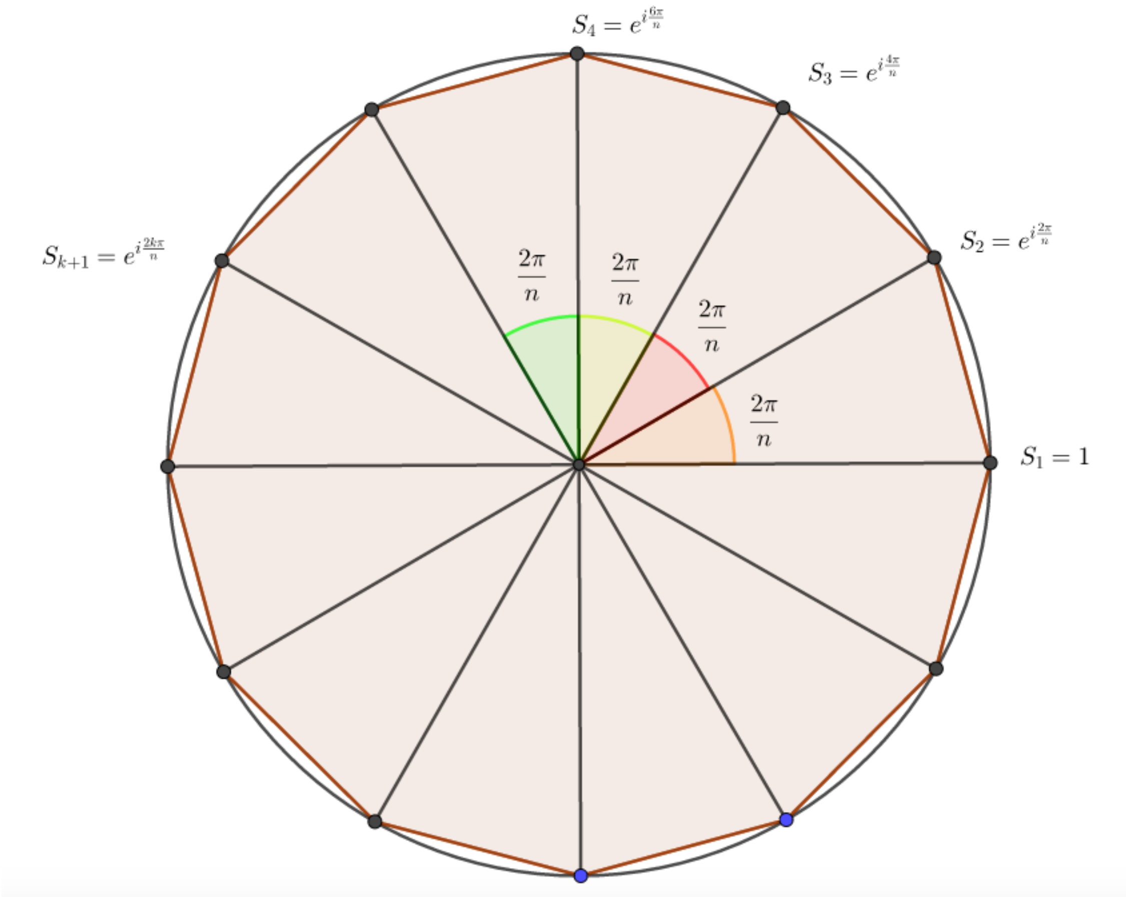
devient tout simplement

$$e^{i\alpha}e^{i\beta} = e^{i(\alpha+\beta)}.$$

Revenons maintenant à Cotes. Pour commencer, nous pouvons remarquer que les racines de l'équation $z^n = 1$ s'écrivent toutes sous la forme

$$S_{k+1} = e^{i\frac{2k\pi}{n}}, \quad \text{où} \quad k = 0, 1, \cdots, n-1.$$

Géométriquement, ce sont les sommets d'un polygone régulier à n côtés, comme le montre la figure ci-dessous.



10. Nous étudierons en détails cette notation dans la section suivante

Quelle surprise ! On voit ainsi que l'on s'approche davantage de la preuve des résultats géométriques de Cotes. Par ailleurs, si $z = e^{i\frac{2k\pi}{n}}$ alors $\overline{z} = e^{i\frac{-2k\pi}{n}}$ est aussi une solution de $z^n = 1$. De surcroît

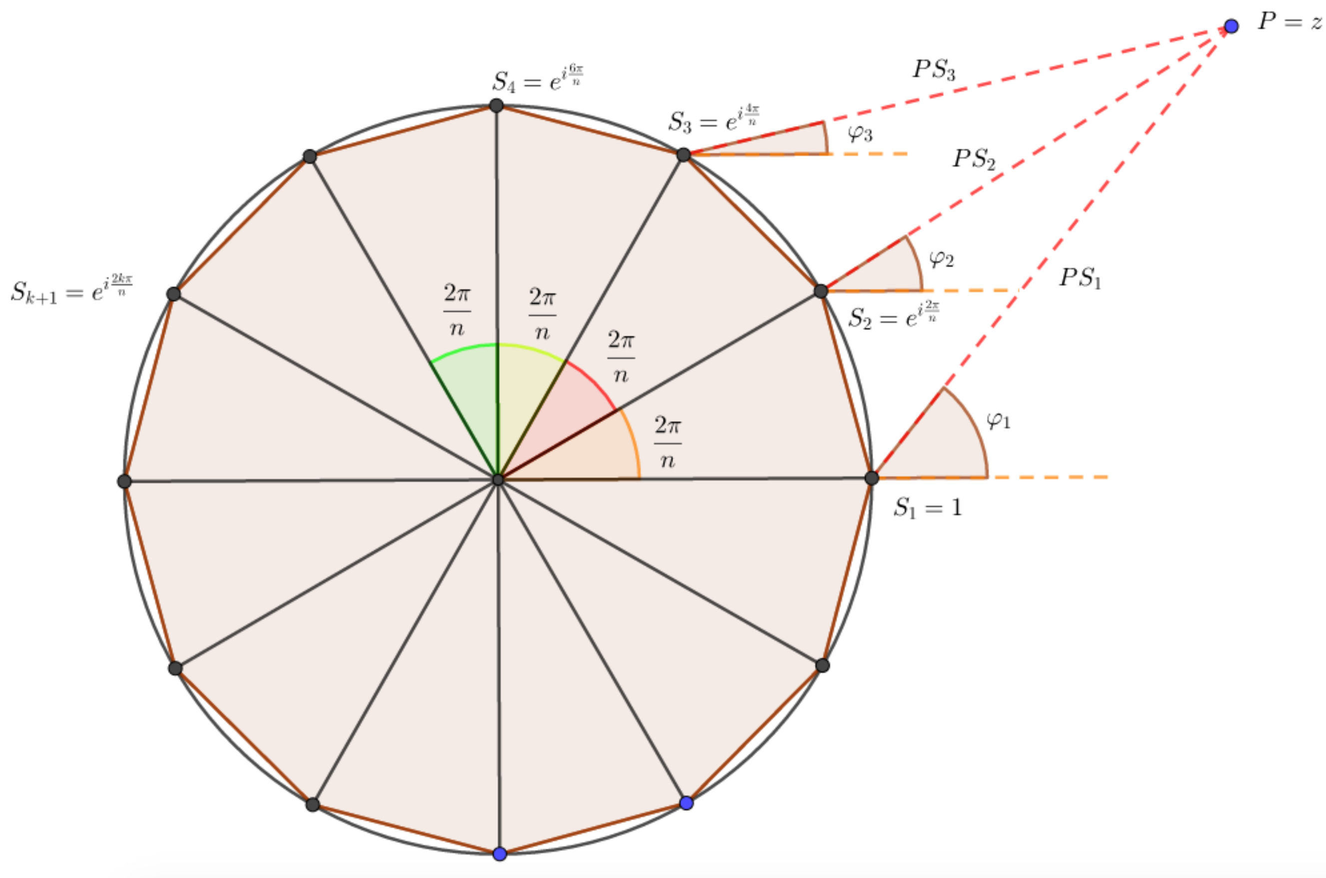
$$\begin{aligned}\left(z - e^{i\frac{2k\pi}{n}}\right)\left(z - e^{i\frac{-2k\pi}{n}}\right) &= z^2 - \left(e^{i\frac{2k\pi}{n}} + e^{i\frac{-2k\pi}{n}}\right)z + e^{i\frac{2k\pi}{n}} e^{i\frac{-2k\pi}{n}} \\ &= z^2 - 2\cos\left(\frac{2k\pi}{n}\right)z + 1.\end{aligned}$$

Le théorème de Descartes permettant de factoriser un polynôme en utilisant ses racines nous donne le moyen d'affirmer que

$$\begin{aligned}z^n - 1 &= \prod_{k=0}^{n-1}\left(z - S_{k+1}\right) \\ &= \prod_{k=1}^{n}\left(z - e^{i\frac{2k\pi}{n}}\right)\end{aligned}$$

Le résultat de la factorisation de Cotes en découle en regroupant chacune des solutions complexes avec son conjugué. Pour voir le résultat sous sa forme géométrique, il suffit de remarquer que chacun des facteurs de $z^n - 1$, à savoir $z - S_{k+1}$, est le nombre complexe reliant un point P représenté par le nombre complexe z et le sommet S_{k+1}. On peut alors écrire

$$z - S_{k+1} = PS_{k+1}e^{i\varphi_k}.$$



Ainsi

$$z^n - 1 = (PS_1 \cdot PS_2 \cdots PS_n)e^{i\varphi} \quad \text{où} \quad \varphi = \varphi_1 + \varphi_2 + \cdots + \varphi_n.$$

Ce résultat est valable pour tout point P dans le plan complexe $\mathbb{C}$. Si P correspond à un nombre réel alors $\varphi \equiv 0 \pmod{2\pi}$ [11] (pourquoi ?) et on récupère par conséquent le résultat de Cotes. Nous ne sommes pas au bout de nos surprises avec les nombres complexes !

5 La formule de De Moivre chez Euler

5.1 Les racines n-ièmes d'un nombre complexe

Il a fallu attendre le génie d'Euler pour comprendre la puissance unificatrice des nombres complexes et l'utilité de la formule de *De Moivre*. Nous verrons que nos nouveaux nombres permettent de réconcilier des branches en mathématiques et de découvrir des liens insoupçonnables sans ce passage dans le monde des imaginaires.

Leonhard Euler (1707 - 1783)

Euler commence ses investigations par la détermination des racines n-ièmes de l'unité. Son point de départ est purement algébrique. Le nombre 1 admet deux racines carrées, à savoir ± 1. De même, l'unité admet 3 racines cubiques 1, $(-1 \pm i\sqrt{3})/2$. Pour le voir, il suffit de résoudre l'équation $x^3 - 1 = 0$ et de voir qu'on a la factorisation

$$x^3 - 1 = (x-1)(x^2 + x + 1).$$

En appliquant le discrimant Δ à $x^2 + x + 1 = 0$ on obtient

$$x_{1,2} = \frac{-1 \pm i\sqrt{3}}{2}.$$

Pour les sceptiques, vous pouvez par exemple calculer le cube de x_1, vous tomberez bien sur 1. De même, Euler a montré qu'il existe 4 racines quatrièmes de 1, qui se calculent trivialement en résolvant l'équation $x^4 - 1 = 0$, dont le membre de gauche est factorisable dans $\mathbb{R}$ sous la forme $(x-1)(x+1)(x^2+1)$ et par conséquent dans $\mathbb{C}$

$$x^4 - 1 = (x-1)(x+1)(x-i)(x+i).$$

11. En réalité, $\varphi = 0$ quand P correspond à un nombre réel plus grand que 1 ou plus petit que -1.

Les racines quatrièmes de l'unité sont donc $\pm 1, \pm i$. Pourquoi s'arrêter aux racines quatrièmes ? Rien ne nous empêche d'aller plus loin. Combien y-a-t-il de racines cinquièmes de l'unité ? Ils sont là encore 5, données par

$$1, \quad \frac{-1-\sqrt{5}+i\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4}, \quad \frac{-1-\sqrt{5}-i\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4}$$
$$\frac{-1+\sqrt{5}+i\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}, \quad \frac{-1+\sqrt{5}-i\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}.$$

La résolution de l'équation $x^5-1=0$ est pour le coup moins triviale que les premières mais cela n'a pas empêché Euler d'avancer dans sa quête. Sa résolution repose sur une astuce algébrique de maître, due à De Moivre. En effet,

$$x^5-1=0 \iff x-1=0 \quad \text{ou} \quad x^4+x^3+x^2+x+1=0.$$

Puisque $x \neq 0$, en divisant $x^4+x^3+x^2+x+1=0$ par x^2 on obtient

$$\begin{aligned} x^4+x^3+x^2+x+1=0 &\iff x^2+x+1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}=0 \\ &\iff \left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)+\left(x+\frac{1}{x}\right)+1=0 \end{aligned}$$

En posant $z=x+1/x$ et en remarquant que $z^2=x^2+1/x^2+2$, notre équation devient

$$(z^2-2)+z+1=0,$$

ou encore $z^2+z-1=0$. Magique ! Notre équation de degré 4 se ramène à une équation de degré 2, qu'on sait résoudre trivialement. Ses solutions sont

$$z_{1,2}=\frac{-1\pm\sqrt{5}}{2}.$$

Je vous laisse faire la suite du boulot afin de retrouver les solutions données par Euler. À ce stade de ses recherches, Euler fait intervenir la formule de de Moivre afin de donner une solution générale à l'équation $x^n=1$. En réalité, il était le premier à écrire notre fameuse formule sous sa forme moderne

$$(\cos\theta+i\sin\theta)^n=\cos n\theta+i\sin n\theta$$

et à en donner une preuve élémentaire par une simple récurrence. Dans la suite de ses travaux, Euler donne une formule générale permettant de trouver les racines n-ièmes d'un nombre complexe a. Il commence par écrire a sous sa forme trigonométrique $a=|a|(\cos\theta+i\sin\theta)$ et affirme par la suite que nos nombres recherchés sont donnés par l'expression générale

$$\sqrt[n]{|a|}\left(\cos\frac{\theta+2k\pi}{n}+i\sin\frac{\theta+2k\pi}{n}\right), \quad \text{où} \quad k=0,1,\cdots,n-1.$$

Pour s'en convaincre, il suffit de mettre ces nombres à la puissance n et d'utiliser comme dans le paragraphe précédent la formule de De Moivre. En effet,

$$\begin{aligned} \left[\sqrt[n]{|a|}\left(\cos\frac{\theta+2k\pi}{n}+i\sin\frac{\theta+2k\pi}{n}\right)\right]^n &= |a|\left[\cos\left(n\frac{\theta+2k\pi}{n}\right)+i\sin\left(n\frac{\theta+2k\pi}{n}\right)\right] \\ &= |a|\big(\cos(\theta+2k\pi)+i\sin(\theta+2k\pi)\big) \\ &= |a|(\cos\theta+i\sin\theta) \\ &= a \end{aligned}$$

Il est important de remarquer qu'une racine n-ième d'un nombre complexe est encore un nombre complexe. Cette propriété est propre à $\mathbb{C}$ et n'est pas vérifiée ni dans $\mathbb{R}$, ni dans $\mathbb{Q}$ et encore moins dans $\mathbb{Z}$. Cette propriété algébrique fondamentale a poussé nos ancêtres à penser que tout polynôme P de degré $n \geq 1$ admet n racines dans $\mathbb{C}$. Il s'agit du **théorème fondamental de l'algèbre**, auquel cas on dit que $\mathbb{C}$ est *algébriquement clos*.

5.2 La formule de Cardan-Euler

En utilisant la formule de Viète, nous avons vu auparavant que l'équation $x^3 = 6x + 4$ admet 3 solutions, à savoir

$$-2, \quad 1+\sqrt{3} \quad \text{et} \quad 1-\sqrt{3}.$$

Toutefois, la formule de Cardan ne donne apriori qu'une seule solution. En effet, l'équation $x^3 = 6x + 4$ est de la forme $x^3 = 3px + 2q$, où $p = q = 2$. La formule de Cardan fournit la solution

$$\begin{aligned} x &= \sqrt[3]{q+\sqrt{q^2-p^3}} + \sqrt[3]{q-\sqrt{q^2-p^3}} \\ &= \sqrt[3]{2+2i} + \sqrt[3]{2-2i}. \end{aligned}$$

Est-ce l'expression d'une seule solution ? En réalité non, car d'après ce qui précède, un nombre complexe admet 3 racines cubiques. Euler utilise ce résultat, basé sur la formule de De Moivre afin de rectifier notre compréhension de la formule de Cardan et de montrer qu'elle donne en vrai toutes les solutions d'une équation cubique. En effet, pour déterminer les racines cubiques de $a = 2 + 2i$, on commence par calculer sa norme qui vaut $|a| = \sqrt{2^2+2^2} = 2\sqrt{2}$. Pour écrire a sous sa forme trigonométrique, il suffit de déterminer son angle $\theta = \arcsin(Im(a)/|a|)$. Dans notre cas,

$$\begin{aligned} \theta &= \arcsin(2/2\sqrt{2}) \\ &= \arcsin(1/\sqrt{2}) \\ &= \frac{\pi}{4}. \end{aligned}$$

Les racines cubiques de $a = 2 + 2i$ sont donc données par la formule

$$z_k = \sqrt[3]{2\sqrt{2}}\left(\cos\frac{\pi/4+2k\pi}{3} + i\sin\frac{\pi/4+2k\pi}{3}\right), \quad \text{où} \quad k = 0,1,2.$$

Plus explicitement, les solutions sont

$$\begin{aligned} z_0 &= \sqrt[3]{2\sqrt{2}}\left(\cos\frac{\pi}{12} + i\sin\frac{\pi}{12}\right) \\ z_1 &= \sqrt[3]{2\sqrt{2}}\left(\cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4}\right) \\ z_2 &= \sqrt[3]{2\sqrt{2}}\left(\cos\frac{17\pi}{12} + i\sin\frac{17\pi}{12}\right) \end{aligned}$$

J'espère que cela vous rappelle la formule de Viète. L'approche de Viète et celle de Cardan ne sont peut être pas si différentes après ce passage par les nombres complexes ! De même, les racines cubiques de $b = 2 - 2i$ prennent la forme

$$z'_k = \sqrt[3]{2\sqrt{2}}\left(\cos\frac{-\pi/4-2k\pi}{3} + i\sin\frac{-\pi/4-2k\pi}{3}\right), \quad \text{où} \quad k = 0,1,2.$$

Cela donne donc

$$\begin{aligned}
z'_0 &= \sqrt[3]{2\sqrt{2}}\Big[\cos\Big(-\frac{\pi}{12}\Big)+i\sin\Big(-\frac{\pi}{12}\Big)\Big] \\
z'_1 &= \sqrt[3]{2\sqrt{2}}\Big[\cos\Big(-\frac{3\pi}{4}\Big)+i\sin\Big(-\frac{3\pi}{4}\Big)\Big] \\
z'_2 &= \sqrt[3]{2\sqrt{2}}\Big[\cos\Big(-\frac{17\pi}{12}\Big)+i\sin\Big(-\frac{17\pi}{12}\Big)\Big]
\end{aligned}$$

Cela donne en tout 9 racines possibles, à savoir les $z_i + z_j$ où $0 \leq i, j \leq 2$. Il n'en est rien en réalité car dans la résolution de Cardan nous devons avoir

$$uv = -p/3.$$

Dans notre cas $z_i z'_j$ doit être un nombre réel, ce qui est le cas seulement quand $i = j$. Concrètement, par exemple $z_0 + z'_1$ ne peut pas être une solution de notre cubique car

$$\begin{aligned}
z_0 z'_1 &= \sqrt[3]{8} e^{i\left(\frac{\pi}{12}-\frac{3\pi}{4}\right)} \\
&= \sqrt[3]{8} e^{-i\frac{2\pi}{3}} \notin \mathbb{R}.
\end{aligned}$$

En utilisant les propriétés $\cos(-\theta) = \cos(\theta)$ et $\sin(-\theta) = -\sin(\theta)$ et en remarquant que $\sqrt[3]{2\sqrt{2}} = \sqrt{2}$, les solutions de $x^3 = 6x + 4$ sont

$$\begin{aligned}
z_0 + z'_0 &= 2\sqrt{2}\cos(\pi/12) = 1+\sqrt{3} \\
z_1 + z'_1 &= 2\sqrt{2}\cos(3\pi/4) = -2 \\
z_2 + z'_2 &= 2\sqrt{2}\cos(17\pi/12) = 1-\sqrt{3}.
\end{aligned}$$

Bingo ! Prenons un deuxième exemple pour nous fixer les idées. On souhaite utiliser la formule de Cardan afin de trouver toutes les solutions de l'équation cubique $x^3 = 3x - 2$ [12]. Ici $p = 1$ et $q = -1$. La formule de Cardan donne

$$\begin{aligned}
x &= \sqrt[3]{q+\sqrt{q^2-p^3}} + \sqrt[3]{q-\sqrt{q^2-p^3}} \\
&= \sqrt[3]{-1} + \sqrt[3]{-1}
\end{aligned}$$

Attention ici on ne peut pas conclure qu'il s'agit de $2\sqrt[3]{-1}$, car cette racine cubique n'a pas une seule détermination. Cette formule ne fournit donc pas qu'une seule solution car chez les complexes -1 admet 3 racines cubiques, à savoir

$$\begin{aligned}
z_0 &= \cos(\pi/3) + i\sin(\pi/3) = \frac{1+i\sqrt{3}}{2} \\
z_1 &= -1 \\
z_2 &= \cos(5\pi/3) + i\sin(5\pi/3) = \frac{1-i\sqrt{3}}{2}.
\end{aligned}$$

Les solutions de notre équation sont donc $z_0 + z_2, 2z_1$ et $z_2 + z_0$. N'oubliez pas qu'on les prend de façon à ce que

$$z_i z_j = 1,$$

12. Je vous rappelle qu'on a traité cet exemple avec la formule de Viète.

comme dans la formule de Cardan. Ainsi, on obtient bien les solutions 1 [13] et -2.

Plus généralement, si z_1 est solution de l'équation $z^3 = a$, où a désigne un nombre complexe non nul, alors les autres solutions sont données par jz_1 et $j^2 z_1$, où j désigne la racine cubique de l'unité $j = e^{i2\pi/3}$. En effet

$$\begin{aligned} z^3 = a &\iff z^3 = z_1^3 \\ &\iff \left(\frac{z}{z_1}\right)^3 = 1 \\ &\iff \frac{z}{z_1} \quad \text{est une racine cubique de l'unité} \\ &\iff \frac{z}{z_1} = 1 \quad \text{ou} \quad \frac{z}{z_1} = j \quad \text{ou} \quad \frac{z}{z_1} = j^2 \\ &\iff z = z_1 \quad \text{ou} \quad z = jz_1 \quad \text{ou} \quad z = j^2 z_1. \end{aligned}$$

Dans la méthode de Cardan, si u_1 est une racine cubique de u^3 alors les autres solutions sont ju_1 et j^2u_1. Pour déterminer les v correspondant à chacun des u on utilise la relation $uv = -p/3$, équivalente à la relation $v = -p/3u$ quand p est non nul. En notant $v_1 = -p/3u_1$, cela donne exactement 3 solutions de notre équation cubique, à savoir

$$u_1 + v_1, \quad ju_1 + j^2 v_1 \quad \text{et} \quad j^2 u_1 + jv_1.$$

Remarque : La méthode de Viète est-elle si différente de la méthode de Cardan ? Les apparences sont trompeuses comme en témoignent les lignes suivantes. Si on s'intéresse à la résolution des équations cubiques de la forme $x^3 = 3px + 2q$ alors quand $q^2 \leq p^3$ la formule de Viète fournit les solutions

$$x_k = 2\sqrt{p}\cos\left(\frac{1}{3}(\varphi + 2k\pi)\right) \quad \text{où} \quad k \in \{0,1,2\} \text{ et } \varphi = \arccos(q/p\sqrt{p}),$$

tandis que la formule de Cardan donne

$$x = u + v \quad \text{où} \quad u^3 = q + \sqrt{q^2 - p^3}, \quad v^3 = q - \sqrt{q^2 - p^3} \quad \text{et} \quad uv = p.$$

Remarquez que quand $q^2 < p^3$, cette formule fait intervenir les nombres complexes. Dans ce cas, u^3 et v^3 sont deux nombres conjugués : [14]

$$u^3 = q + i\sqrt{p^3 - q^2} \quad \text{et} \quad v^3 = \overline{u^3} = q - i\sqrt{p^3 - q^2}.$$

Le module de u^3 est égal à $|u^3| = p\sqrt{p}$ et son angle vaut

$$\begin{aligned} \varphi &= \arccos(\mathrm{Re}(u^3)/|u^3|) \\ &= \arccos(q/p\sqrt{p}). \end{aligned}$$

Surprise, il s'agit du même angle dans la formule de Viète ! Puisque $v^3 = \overline{u^3}$ et $uv = p$ est un nombre réel, alors u et v sont deux nombres complexes conjugués, autrement dit $v = \overline{u}$. Ainsi la formule de Cardan donne les solutions

$$x_k = u_k + v_k = u_k + \overline{u_k} = 2\mathrm{Re}(u_k) = 2\sqrt{p}\cos\left(\frac{1}{3}(\varphi + 2k\pi)\right)$$

Magique !

13. Cette solution est comptée deux fois.
14. Le conjugué de $z = a + ib$ est $\bar{z} = a - ib$.

5.3 La formule $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$

Contrairement à ce qu'on vous a fait croire, l'égalité $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$ n'est pas la définition de $e^{i\theta}$. [15] Dans la suite, nous présentons diverses approches permettant d'établir et de comprendre la formule d'Euler. Remarquons tout d'abord que la fonction f définie par $f(\theta) = \cos\theta + i\sin\theta$ vérifie la relation

$$f(\theta+\theta') = f(\theta)f(\theta'),$$

qui est bien l'équation fonctionnelle de la fonction exponentielle. Cela suggère un lien entre la fonction f et la fonction exp.

5.3.1 Première approche

Dans son livre *Introductio in analysin infinitorum*, Euler utilise la formule de De Moivre et celle du binôme de Newton [16] de façon suprenante pour déterminer les développements en série de Taylor des fonctions cos et sin. Nous avons en effet

$$\begin{aligned}\cos x &= 1 - \frac{x^2}{1\cdot 2} + \frac{x^4}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4} - \frac{x^6}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6} + \cdots\\ \sin x &= x - \frac{x^3}{1\cdot 2\cdot 3} + \frac{x^5}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5} - \cdots\end{aligned}$$

En utilisant les formules suivantes, valables pour tout $n \geq 1$

$$\cos n\theta + i\sin n\theta = (\cos\theta + i\sin\theta)^n \quad \text{et} \quad \cos n\theta - i\sin n\theta = (\cos\theta - i\sin\theta)^n,$$

on peut écrire

$$2\cos n\theta = (\cos\theta + i\sin\theta)^n + (\cos\theta - i\sin\theta)^n$$

À ce stade, Euler utilise le binôme de Newton pour obtenir

$$\begin{aligned}(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos^n\theta + \frac{ni\cos^{n-1}\theta\sin\theta}{1} &- \frac{n(n-1)\cos^{n-2}\sin^2\theta}{1\cdot 2}\\ &- \frac{n(n-1)(n-2)i\cos^{n-3}\sin^3\theta}{1\cdot 2\cdot 3} + \cdots.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(\cos\theta - i\sin\theta)^n = \cos^n\theta - \frac{ni\cos^{n-1}\theta\sin\theta}{1} &- \frac{n(n-1)\cos^{n-2}\theta\sin^2\theta}{1\cdot 2}\\ &+ \frac{n(n-1)(n-2)i\cos^{n-3}\theta\sin^3\theta}{1\cdot 2\cdot 3} + \cdots\end{aligned}$$

En prenant la somme des deux et en divisant par 2 on obtient

$$\cos n\theta = \cos^n\theta - \frac{n(n-1)\cos^{n-2}\theta\sin^2\theta}{1\cdot 2} + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)\cos^{n-4}\theta\sin^4\theta}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4} - \cdots$$

15. Raconter cela est non seulement réducteur de l'histoire de la découverte de cette identité et des travaux d'Euler, mais aussi méprisant pour l'esprit humain.

16. La formule du binôme est

$$(a+b)^n = a^n + \frac{na^{n-1}b}{1} + \frac{n(n-1)a^{n-2}b^2}{1\cdot 2} + \frac{n(n-1)(n-2)a^{n-3}b^3}{1\cdot 2\cdot 3} + \cdots + b^n$$

À ce stade de ses recherches, Euler pose $x = n\theta$ en prenant n infiniment grand. Cela implique que $\theta = x/n$ est infiniment petit. Il note que dans ce cas, $\cos\theta = 1$ et $\sin\theta = \theta = x/n$[17]. En notation moderne cela s'écrit

$$\lim_{\theta\to 0}\cos\theta = 1 \quad \text{et} \quad \lim_{\theta\to 0}\frac{\sin\theta}{\theta} = 1.$$

Par ailleurs, puisque n est infiniment grand, Euler prétend que l'on peut remplacer $n-1, n-2, n-3\cdots$ par n dans l'expression de $\cos n\theta$.[18] On obtient ainsi la série

$$\begin{aligned}\cos x &= 1^n - \frac{n\cdot n\cdot 1^{n-2}\cdot(x/n)^2}{1\cdot 2} + \frac{n\cdot n\cdot n\cdot n\cdot 1^{n-4}\cdot(x/n)^4}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4} - \cdots\\ &= 1 - \frac{x^2}{1\cdot 2} + \frac{x^4}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4} - \frac{x^6}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6} + \cdots\end{aligned}$$

D'où le résultat. De la même manière, il utilise la formule de De Moivre pour écrire

$$2i\sin n\theta = (\cos\theta + i\sin\theta)^n - (\cos\theta - i\sin\theta)^n$$

et en déduire au passage le développement en série de Taylor de la fonction sin.[19] Venons-en maintenant à e^{ix}. Euler utilise la même technique pour montrer que $e^{ix} = \cos x + i\sin x$. En effet, il commence par poser $x = n\theta$, en prenant n infiniment grand, il vient que $\theta = x/n$ est infiniment petit. On peut en déduire comme plus haut que $\cos\theta = 1$ et que $\sin\theta = \theta = x/n$. Par conséquent

$$\begin{aligned}2\cos x = 2\cos n\theta &= (\cos\theta + i\sin\theta)^n + (\cos\theta - i\sin\theta)^n\\ &= (1 + ix/n)^n + (1 - ix/n)^n\end{aligned}$$

Notre savant utilise par la suite le fait que

$$e^a = \lim_{n\to+\infty}\left(1 + \frac{a}{n}\right)^n,$$

qu'Euler écrit sous la forme $e^a = (1 + a/n)^n$ quand a est un nombre fini et n un infiniment grand. En l'appliquant formellement à $a = ix$ il vient que

$$2\cos x = e^{ix} + e^{-ix} \quad \text{ou encore} \quad \cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}.$$

Il a par la suite fait la même chose avec la fonction sinus. En effet, la formule de De Moivre donne

$$\begin{aligned}2i\sin x &= (\cos\theta + i\sin\theta)^n - (\cos\theta - i\sin\theta)^n\\ &= (1 + ix/n)^n - (1 - ix/n)^n\\ &= e^{ix} - e^{-ix}.\end{aligned}$$

En divisant de part et d'autre de cette égalité par 2i on obtient l'expression

$$\sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}.$$

En sommant l'expression de $\cos x$ et de $\sin x$ on obtient l'exceptionnelle exponentielle évaluée sur l'axe des ordonnées, à savoir

$$\cos x + i\sin x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} + i\frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i} = e^{ix}.$$

17. Il ne s'agit pas de vraies égalités avec nos notations modernes.
18. Attention, là encore Euler fait ces substitutions sans justification aucune. Il remarque, toutefois, que le résultat en vaut le coup.
19. Je vous invite à suivre les pas d'Euler et d'en déduire le résultat par vous-même.

5.3.2 Une deuxième approche

Euler a donné plusieurs preuves de son identité, certes pas aux normes de la rigueur moderne mais tout à fait justifiables avec l'artillerie mathématique dont on dispose aujourd'hui. Une deuxième approche consiste à partir du développement en série de Taylor de la fonction exponentielle réelle afin d'aboutir aux résultats. On sait d'abord que (sans passer par les complexes)

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{1\cdot 2} + \frac{x^4}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4} - \frac{x^6}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6} + \cdots$$
$$\sin x = x - \frac{x^3}{1\cdot 2\cdot 3} + \frac{x^5}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5} - \frac{x^7}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6\cdot 7}$$

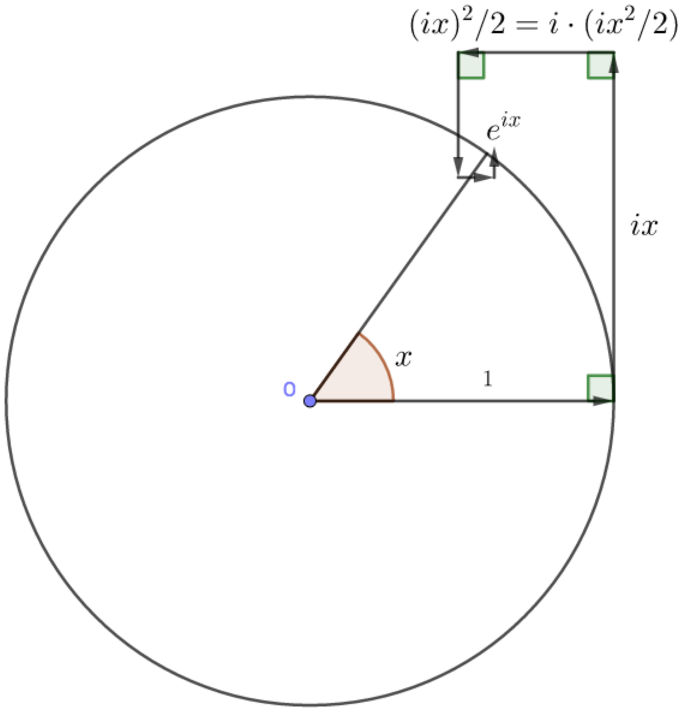
Par ailleurs le développement en série de la fonction exponentielle réelle est donné par

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{1\cdot 2} + \frac{x^3}{1\cdot 2\cdot 3} + \frac{x^4}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4} \cdots$$

On voit alors que dans ce développement, il y a un mélange du développement de cos et de sin muni d'un jeu subtil entre les signes. Ce jeu s'explique alors parfaitement quand on remplace x par ix. En effet, nous avons

$$\begin{aligned} e^{ix} &= 1 + ix + \frac{(ix)^2}{1\cdot 2} + \frac{(ix)^3}{1\cdot 2\cdot 3} + \frac{(ix)^4}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4} + \frac{(ix)^5}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5} \cdots \\ &= 1 + ix - \frac{x^2}{1\cdot 2} - \frac{ix^3}{1\cdot 2\cdot 3} + \frac{x^4}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4} + \frac{ix^5}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5} - \cdots \\ &= \left(1 - \frac{x^2}{1\cdot 2} + \frac{x^4}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4} - \cdots\right) + i\left(x - \frac{x^3}{1\cdot 2\cdot 3} + \frac{x^5}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5} - \cdots\right) \\ &= \cos x + i \sin x. \end{aligned}$$

Ce résultat admet une interprétation géométrique intéressante. Je vous rappelle que la multiplication par i fait tourner un nombre complexe autour de l'origine d'un angle droit.



Le résultat d'Euler dit alors que puisque $1+x+x^2/2+\cdots$ converge vers e^x alors $1+ix+(ix)^2/2+\cdots=e^{ix}$ converge vers le point situé sur le cercle unité d'angle égal à x, à savoir le nombre complexe $\cos x+i\sin x$! Cette petite balade dans le plan complexe $\mathbb{C}$ permet de voir que ce dernier offre plus de place à la convergence et par conséquent à un nouveau champ d'analyse, mais cette fois avec des nombres complexes.

5.3.3 Euler l'audacieux et sa troisième approche

La troisième approche à sa fameuse formule est encore plus spectaculaire que les autres. Décidément, Euler ne recule devant rien. Nous commençons tout d'abord par démontrer le résultat suivant

$$\int \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}dx=\ln\left(\sqrt{1+x^2}+x\right)+C,$$

où C désigne une constante. Nous pouvons y arriver en dérivant l'expression de droite, mais nous allons utiliser une deuxième méthode utilisant un changement de variable. Je vous rappelle que la fonction sinus hyperbolique est définie sur $\mathbb{R}$ par

$$\sinh(x)=\frac{e^x-e^{-x}}{2}.$$

Cette fonction est clairement dérivable sur $\mathbb{R}$ de dérivée égale à la fonction cosinus hyperbolique défini par l'expression $\cosh(x)=(e^x+e^{-x})/2.$[20] Notez par ailleurs l'identité $\cosh^2(x)-\sinh^2(x)=1$. Venons-en maintenant à notre intégrale. En effectuant le changement de variable $x=\sinh u$, on obtient $dx=\cosh(u)du$. Ainsi

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}dx &= \int \frac{\cosh u}{\sqrt{1+\sinh^2 u}}du\\ &= \int \frac{\cosh u}{\cosh u}du\\ &= \int 1du\\ &= u+C\\ &= \sinh^{-1}(x)+C\\ &= \ln\left(\sqrt{1+x^2}+x\right)+C\end{aligned}$$

car $x\mapsto \ln(\sqrt{1+x^2}+x)$ est la réciproque de la fonction sinh. En effet,

$$\begin{aligned}\sinh(x)=y &\iff \frac{e^x-e^{-x}}{2}=y\\ &\iff e^x-e^{-x}=2y\\ &\iff (e^x)^2-1=2ye^x \quad \text{en multipliant par } e^x\\ &\iff (e^x)^2-2ye^x-1=0.\end{aligned}$$

20. Remarquez alors l'analogie entre ces fonctions et les formules d'Euler donnant les fonctions sin et cos en fonction de e^{ix}.

En posant $X = e^x$, notre équation devient $X^2 - 2yX - 1 = 0$. Or[21]

$$\begin{aligned} X^2 - 2yX - 1 = 0 &\iff X^2 - 2yX + y^2 - y^2 - 1 = 0 \\ &\iff (X-y)^2 - (y^2+1) = 0 \\ &\iff \left[X - (y - \sqrt{y^2+1})\right]\left[X + (y + \sqrt{y^2+1})\right] = 0 \\ &\iff X = y - \sqrt{y^2+1} \quad \text{ou} \quad X = y + \sqrt{y^2+1}. \end{aligned}$$

Puisque $X = e^x > 0$, la première solution $X = y - \sqrt{y^2+1} < 0$ est à rejeter. Par ailleurs, puisque $y^2+1 > y^2$, il vient par la stricte croissance de la racine carrée sur $\mathbb{R}_+$ que $\sqrt{y^2+1} > |y|$ et par conséquent $X = y + \sqrt{y^2+1} > y + |y| \geq 0$. Il s'ensuit que $e^x = y + \sqrt{y^2+1}$ et donc par composition par la fonction ln,

$$x = \ln(y + \sqrt{y^2+1}).$$

Revenons à nos moutons. Je vous rappelle que l'on souhaite suivre les pas d'Euler pour démontrer que $e^{ix} = \cos x + i \sin x$. En posant $y = \sin x$ alors

$$x = \arcsin(y) = \int \frac{1}{\sqrt{1-y^2}} dy.$$

À ce stade, Euler effectue formellement le changement de variable complexe $y = iz$. Dans ce cas $dy = idz$ et

$$\begin{aligned} x &= \int \frac{i}{\sqrt{1-(iz)^2}} dz \\ &= i \int \frac{1}{\sqrt{1+z^2}} dz \\ &= i \ln\left(x + \sqrt{1+x^2}\right). \end{aligned}$$

Puisque $z = y/i = -iy = -i \sin x$ alors $z^2 = -\sin^2 x$. Sans se soucier de la signification d'un logarithme complexe, notre cher mathématicien affirme que si on continue à calculer formellement on obtient

$$\begin{aligned} x &= i \ln\left(\sqrt{1 - \sin^2 x} - i \sin x\right) \\ &= i \ln(\cos x - i \sin x). \end{aligned}$$

Ainsi puisque $(\cos x - i \sin x)(\cos x + i \sin x) = 1$ il vient que

$$\begin{aligned} ix &= i^2 \ln(\cos x - i \sin x) \\ &= \ln \frac{1}{\cos x - i \sin x} \\ &= \ln(\cos x + i \sin x). \end{aligned}$$

En appliquant, là encore formellement, la fonction exponentielle de part et d'autre de cette dernière égalité on obtient

$$e^{ix} = e^{\ln(\cos x + i \sin x)} = \cos x + i \sin x.$$

21. Oui je déteste utiliser le delta pour rien.

Cette preuve n'est pas du tout aux normes de la rigueur moderne, on pourra par exemple lui reprocher d'intégrer sans prendre en considération la constante, ce qui peut induire en erreur. Mais c'est Euler et vous pouvez me croire, il sait ce qu'il fait.

Comment a-t-il pu penser à cette preuve et à évaluer cette intégrale en particulier ? Une raison plausible est la suivante. Euler sait que $x \mapsto \ln(x+\sqrt{1+x^2})$ est la fonction réciproque de la fonction sinh : $x \mapsto (e^x - e^{-x})/2$. De plus, il sait qu'il doit obtenir à la fin l'identité

$$\sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}$$

Le lien entre sinh et sin paraît alors évident. On voit que

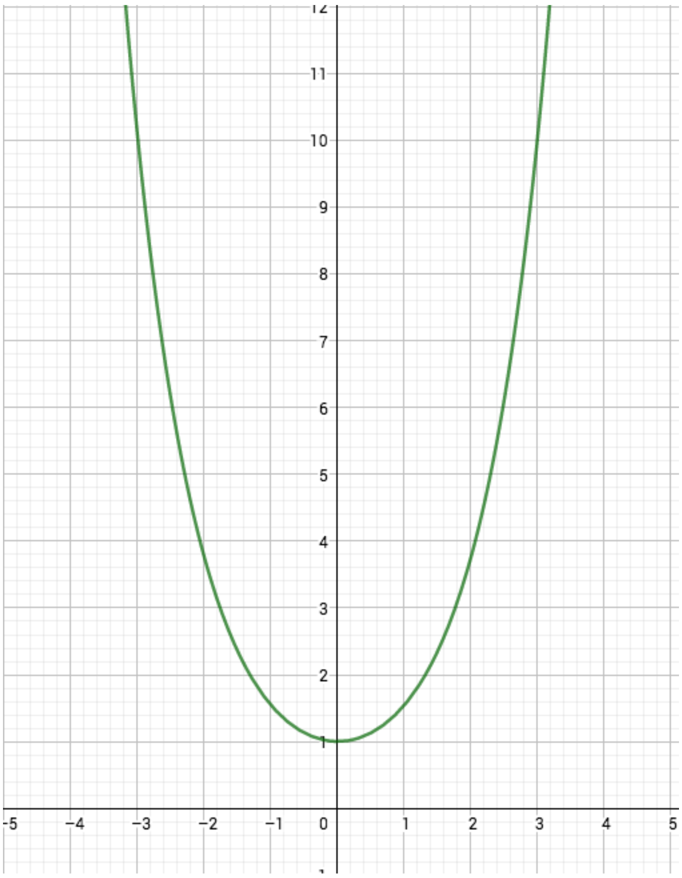
$$\sinh(ix) = i \sin x.$$

D'où peut-être son idée de passer par la réciproque de sinh, donnée par l'intégrale *loc.cit*.

5.3.4 Retour sur Viète-Cardan

À ce stade, rien ne nous empêche d'évaluer formellement les fonctions circulaires tout au long de l'axe des ordonnées. Euler sait maintenant que $\cos x = (e^{ix} + e^{-ix})/2$. En remplaçant x par iy on obtient la formule suivante donnant le cosinus d'un arc imaginaire

$$\begin{aligned}\cos(iy) &= \frac{e^{i^2 y} + e^{-i^2 y}}{2}\\ &= \frac{e^{-y} + e^{y}}{2}\\ &= \cosh(y).\end{aligned}$$



Le cosinus d'un arc imaginaire est donc un nombre réel mais nous ne sommes pas au bout de nos surprises. Le graphe ci-dessus de la fonction cosh montre que celle-ci atteint des valeurs plus grandes que 1. Nous pouvons donc maintenant résoudre, toujours formellement, des équations comme $\cos x = 2$! En effet

$$\begin{aligned}\cos x = 2 &\underset{x=iy}{\iff} \cosh(y) = 2\\ &\iff y = \cosh^{-1}(2)\\ &\iff y = \ln(2+\sqrt{3}),\end{aligned}$$

car $\cosh^{-1} : x \mapsto \ln(x+\sqrt{x^2-1})$.[22] Ainsi $x = iy = i\ln(2+\sqrt{3})$ est solution de notre équation $\cos x = 2$. Aussi surprenant que cela puisse paraître, cette résolution imaginaire n'est pas sans conséquences sur la résolution réelle des équations. Pour le voir nous allons nous intéresser à la résolution d'une cubique par Viète. Je vous rappelle que sans les nombres complexes, sa formule ne fonctionne que si $q^2 \leq p^3$ pour les équations de la forme $x^3 = 3px + 2q$. Cette condition sur p et q découle du fait qu'un cosinus est toujours compris entre -1 et 1. Maintenant qu'on dispose d'un cosinus imaginaire, nous allons pouvoir contouner cette difficulté.

Prenons tout d'abord un exemple. Soit l'équation $x^3 = 3x+4$, où $p = 1, q = 2$ et donc $q^2 > p^3$. Je vous rappelle que la formule de Viète est donnée par

$$x_n = 2\sqrt{p}\cos\left(\frac{1}{3}(\varphi + 2n\pi)\right) \quad \text{où} \quad n \in \{0,1,2\} \text{ et } \varphi = \arccos(q/p\sqrt{p}).$$

Dans notre cas, $\varphi = \arccos(2/1\sqrt{1}) = \arccos(2)$. Or d'après ce qui précède

$$\arccos(2) = i\ln(2+\sqrt{3}).$$

La première solution de $x^3 = 3x+4$ serait donc donnée par la formule

$$\begin{aligned}x_0 &= 2\sqrt{1}\cos\big(i\ln(2+\sqrt{3})/3\big)\\ &= 2\cos\left[i\ln\left(\sqrt[3]{2+\sqrt{3}}\right)\right]\\ &= 2\frac{e^{\ln(\sqrt[3]{2+\sqrt{3}})} + e^{-\ln(\sqrt[3]{2+\sqrt{3}})}}{2}\\ &= \sqrt[3]{2+\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt[3]{2+\sqrt{3}}}\\ &= \sqrt[3]{2+\sqrt{3}} + \sqrt[3]{2-\sqrt{3}}.\end{aligned}$$

Le constat est sans appel, cette formule est exactement celle de Cardan. Est-ce un pur hasard ? Bien sûr que non. En effet, dans le cas général si $q/p\sqrt{p} \geq 1$ alors φ est un arc imaginaire qu'on pourra écrire $\varphi = i\theta$. Dans ce cas,

$$\begin{aligned}\varphi = \arccos(q/p\sqrt{p}) &\iff \cos i\theta = q/p\sqrt{p}\\ &\iff \cosh\theta = q/p\sqrt{p}\\ &\iff \theta = \cosh^{-1}(q/p\sqrt{p}).\end{aligned}$$

22. Je vous laisse le soin de démontrer ce résultat seul.

Or la fonction réciproque du cosinus hyperbolique est $x \mapsto \ln(x+\sqrt{x^2-1})$. Cela donne donc

$$\begin{aligned}
\varphi &= i\theta \\
&= i\ln\left(\frac{q}{p\sqrt{p}}+\sqrt{\left(\frac{q}{p\sqrt{p}}\right)^2-1}\right) \\
&= i\ln\left(\frac{q+\sqrt{q^2-p^3}}{p\sqrt{p}}\right) \\
&= i\Big[\ln(q+\sqrt{q^2-p^3})-\ln(p\sqrt{p})\Big] \\
&= i\Big[\ln(q+\sqrt{q^2-p^3})-3\ln(\sqrt{p})\Big].
\end{aligned}$$

Ainsi la première solution donnée par la formule de Viète est

$$\begin{aligned}
x_0 &= 2\sqrt{p}\cos(\varphi/3) \\
&= 2\sqrt{p}\cosh(\theta/3) \\
&= 2\sqrt{p}\cdot\frac{e^{\frac{1}{3}\ln(q+\sqrt{q^2-p^3})-\ln(\sqrt{p})}+e^{-\frac{1}{3}\ln(q+\sqrt{q^2-p^3})+\ln(\sqrt{p})}}{2} \\
&= \sqrt{p}\cdot\frac{\sqrt[3]{q+\sqrt{q^2-p^3}}}{\sqrt{p}}+\sqrt{p}\cdot\frac{\sqrt{p}}{\sqrt[3]{q+\sqrt{q^2-p^3}}} \\
&= \sqrt[3]{q+\sqrt{q^2-p^3}}+\frac{p}{\sqrt[3]{q+\sqrt{q^2-p^3}}}.
\end{aligned}$$

C'est incroyable, nous ne sommes pas loin de la formule de Cardan. Il reste à voir que

$$\frac{p}{\sqrt[3]{q+\sqrt{q^2-p^3}}}=\sqrt[3]{q-\sqrt{q^2-p^3}}.$$

C'est quasiment immédiat puisque

$$\frac{p}{\sqrt[3]{q+\sqrt{q^2-p^3}}}=\frac{p\sqrt[3]{q-\sqrt{q^2-p^3}}}{\sqrt[3]{q+\sqrt{q^2-p^3}}\cdot\sqrt[3]{q-\sqrt{q^2-p^3}}}.$$

Je vous laisse finir le calcul seul et montrer que l'expression au dénominateur vaut p. Pour trouver les autres solutions de notre cubique nous devons pouvoir calculer $\cos\big[(\varphi+2k\pi)/3\big]=\cos\big[(i\theta+2k\pi)/3\big]$. Cela revient donc à définir plus généralement $\cos(a+ib)$. Pour se faire, Euler utillise tout simplement la formule d'addition d'angles pour le cosinus [23] et obtient

$$\begin{aligned}
\cos(a+ib) &= \cos a\cos ib-\sin a\sin ib \\
&= \cos a\cosh b+i\sin a\sinh b \\
&= \cos a\cdot\frac{e^b+e^{-b}}{2}+i\sin a\cdot\frac{e^b-e^{-b}}{2} \\
&= \frac{e^b}{2}(\cos a+i\sin a)+\frac{e^{-b}}{2}(\cos a-i\sin a) \\
&= \frac{e^be^{ia}+e^{-b}e^{-ia}}{2}.
\end{aligned}$$

23. $\cos(a+b)=\cos a\cos b-\sin a\sin b$.

On a ici envie de noter $e^b e^{ia} = e^{b+ia}$, auquel cas on obtient la formule finale

$$\cos(a+ib) = \frac{e^{b+ia} + e^{-(b+ia)}}{2}.$$

Revenons maintenant à la formule de Viète. Nous avons en effet

$$\begin{aligned}
x_n &= 2\sqrt{p}\cos\left(\frac{\varphi}{3} + \frac{2n\pi}{3}\right) \\
&= 2\sqrt{p}\cos\left(\frac{i\theta}{3} + \frac{2n\pi}{3}\right) \\
&= 2\sqrt{p}\cdot\frac{e^{\theta/3}e^{2in\pi/3} + e^{-\theta/3}e^{-2in\pi/3}}{2} \\
&= \left(\sqrt{p}e^{\theta/3}\right)e^{2in\pi/3} + \left(\sqrt{p}e^{-\theta/3}\right)e^{-2in\pi/3}
\end{aligned}$$

En remarquant que

$$u_1 = \sqrt{p}e^{\theta/3} = \sqrt[3]{q + \sqrt{q^2 - p^3}} \quad \text{et} \quad v_1 = \sqrt{p}e^{-\theta/3} = \sqrt[3]{q - \sqrt{q^2 - p^3}},$$

on obtient pour $n = 1$, $x_1 = ju_1 + j^2 v_1$ et pour $n = 2, x_2 = j^2 u_1 + jv_1$. J'espère que vous avez remarqué qu'il s'agit exactement des solutions suggérées par la formule de Cardan. Wow !

6 Quelques applications

Nous donnons dans cette section quelques applications instructives de l'utilisation des nombres complexes dans diverses branches des mathématiques.

6.1 Le pentagone régulier

Dans la section 2.1, nous avons vu que calculer la valeur du $\cos(2\pi/5)$ permet de construire effectivement le pentagone régulier inscrit dans le cercle unité à l'aide de la règle non graduée et du compas. Cette valeur vaut

$$\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right) = \frac{\sqrt{5} - 1}{4}.$$

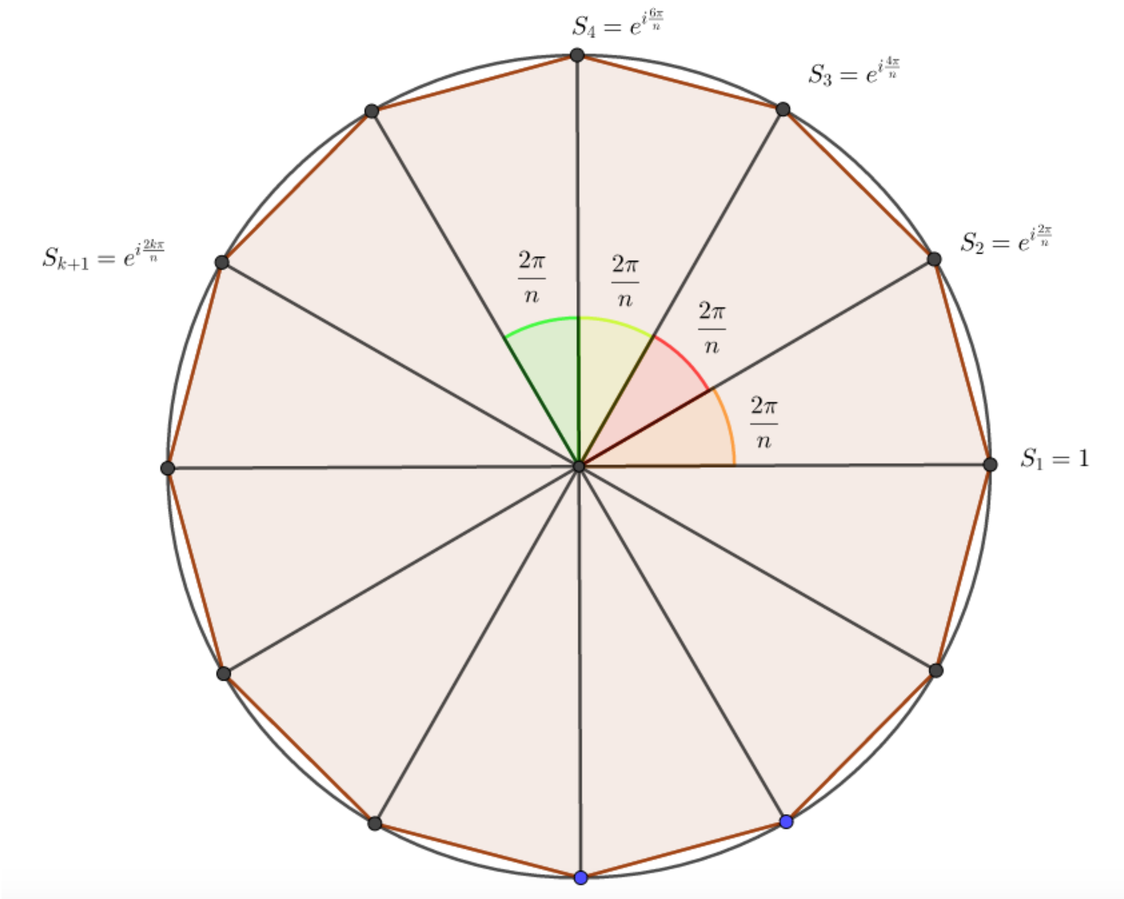
Pour le montrer nous utiliserons les nombres complexes. De façon générale, construire un polygone régulier à n côtés inscrit dans le cercle unité revient à diviser ce cercle en n arcs égaux. On parle alors dans ce cas de *cyclotomie*. Par ailleurs, nous avons vu que les sommets d'un polygone régulier sont représentés par les nombres complexes

$$S_{k+1} = e^{i\frac{2k\pi}{n}} \quad \text{où} \quad k = 0, 1, \cdots, n-1.$$

Ces nombres sont distincts et vérifient l'équation $z^n = 1$. Or

$$z^n - 1 = (z-1)(z^{n-1} + z^{n-2} + \cdots + z + 1),$$

$z = 1$ étant une solution triviale correpondant au premier sommet S_1. Résoudre $z^n = 1$ revient donc essentiellement à résoudre $z^{n-1} + z^{n-2} + \cdots + z + 1 = 0$. Une fois la résolution effectuée, il suffit de placer $S_2 = e^{i2\pi/n}$ et de reporter avec le compas la longueur S_1S_2 tout au long du cercle.



Gauss a réussi la prouesse technique de construire l'heptadécagone régulier (polygone à 17 côtés) en résolvant l'équation

$$z^{16} + z^{15} + \cdots + z + 1 = 0.$$

En dévissant celle-ci d'une manière ingénieuse, il a pu exprimer $\cos(2\pi/17)$ de la façon suivante

$$\begin{aligned} 2\cos\left(\frac{2\pi}{17}\right) = &-\frac{1}{8} + \frac{1}{8}\sqrt{17} + \frac{1}{8}\sqrt{34 - 2\sqrt{17}} \\ &+ \frac{1}{4}\sqrt{17 + 3\sqrt{17} - \sqrt{34 - 2\sqrt{17}} - 2\sqrt{34 + 2\sqrt{17}}}. \end{aligned}$$

Remarquez alors que l'expression de $\cos(2\pi/17)$ ne contient que des racines carrées ainsi que les 4 opérations constructibles à la règle non graduée et au compas. Cela implique sans surprise que l'heptadécagone est bel et bien constructible avec les outils de base de la géométrie d'Euclide. Nous ne prouverons pas ce résultat ici mais nous adapterons la méthode de Gauss pour 17-côtés afin de calculer $\cos(2\pi/5)$.

Si $z = e^{i2\pi/5}$, construire le pentagone régulier revient à résoudre l'équation $z^4 + z^3 + z^2 + z + 1 = 0$ avec les opérations constructibles. Pour se faire, nous prenons deux nouvelles variables $x = z + z^4$ et $y = z^2 + z^3$. Un simple calcul montre que

$$\begin{aligned} x + y &= (z + z^4) + (z^2 + z^3) \\ &= z + z^2 + z^3 + z^4 \\ &= -1 \quad \text{car} \quad z^4 + z^3 + z^2 + z + 1 = 0. \end{aligned}$$

De même

$$\begin{aligned} xy &= (z+z^4)(z^2+z^3) \\ &= z^3+z^4+z^6+z^7, \end{aligned}$$

or le nombre complexe z vérifie $z^5 = 1$, donc $z^6 = z$ et $z^7 = z^2$. Cela implique donc que $xy = z+z^2+z^3+z^4 = -1$. Au final x et y vérifient le système

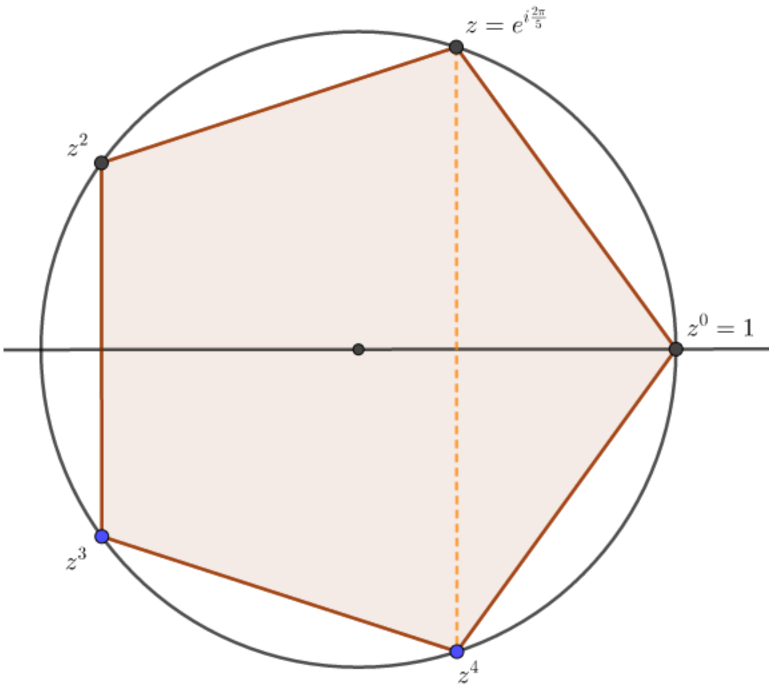
$$\begin{cases} x+y &= -1 \\ xy &= -1 \end{cases}$$

Ils sont donc solutions de l'équation quadratique

$$(t-x)(t-y) = t^2-(x+y)t+xy = t^2+t-1 = 0.$$

Le discriminant Δ de celle-ci vaut $\Delta = \sqrt{5}$. Les solutions sont donc

$$t_{1,2} = \frac{-1\pm\sqrt{5}}{2}$$



Sur la figure ci-dessus, on voit que $z^4 = \overline{z}$.[24] De même $\overline{z^2} = z^3$. Cela signifie que

$$\begin{aligned} x &= z+z^4 = z+\overline{z} = 2\mathrm{Re}(z) = 2\cos(2\pi/5) \\ y &= z^2+z^3 = z^2+\overline{z^2} = 2\cos(4\pi/5). \end{aligned}$$

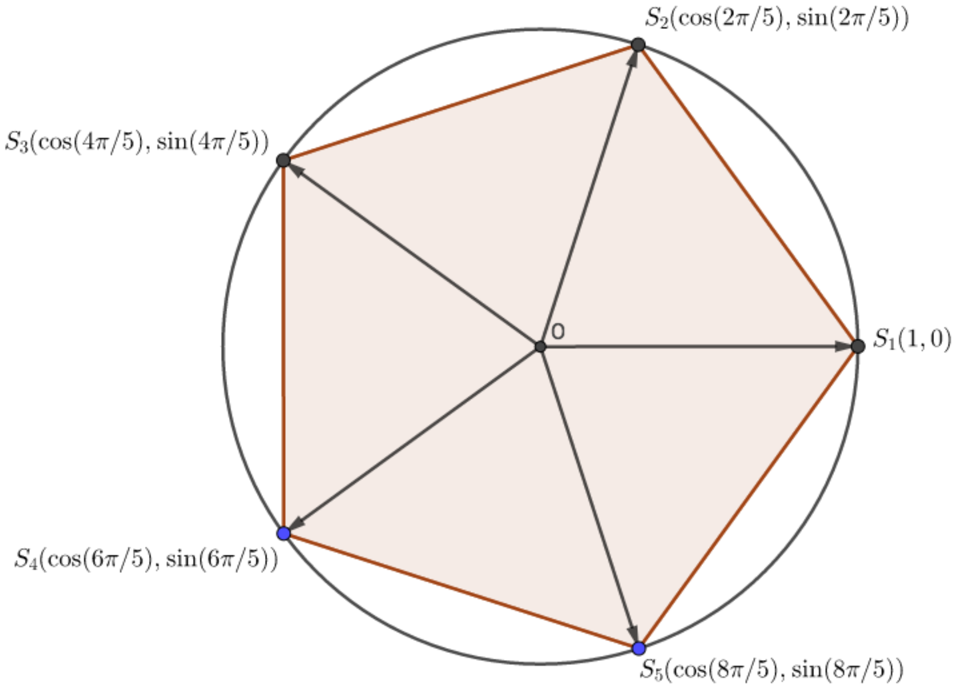
On en déduit que x est la solution positive de $t^2+t-1=0$. Donc

$$2\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right) = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}.$$

24. Je vous invite à le démontrer algébriquement.

Le résultat en découle. Formidable, qu'en pensez-vous ? Il existe un autre argument utilisant les vecteurs, permettant d'arriver à la même conclusion. Soit en effet $\overrightarrow{V}$ le vecteur défini par

$$\overrightarrow{V} = \overrightarrow{OS_1} + \overrightarrow{OS_2} + \overrightarrow{OS_3} + \overrightarrow{OS_4} + \overrightarrow{OS_5}.$$



La transformation du vecteur $\overrightarrow{V}$ par la rotation de centre O et d'angle $2\pi/5$ le laisse invariant. Il faut s'en convaincre en regardant la figure ci-dessus. Le seul vecteur invariant par une telle rotation est le vecteur nul. On en déduit que

$$\overrightarrow{V} = \overrightarrow{0}.$$

Cela implique en particulier que la première composante du vecteur $\overrightarrow{V}$ est nulle. Par conséquent

$$1 + \cos(2\pi/5) + \cos(4\pi/5) + \cos(6\pi/5) + \cos(8\pi/5) = 0.$$

Puisque $\cos(4\pi/5) = \cos(6\pi/5)$ et $\cos(8\pi/5) = \cos(2\pi/5)$, cette dernière équation devient

$$1 + 2\cos(2\pi/5) + 2\cos(4\pi/5) = 0.$$

Par ailleurs, on sait par la formule d'addition des cosinus que $\cos 2\theta = 2\cos^2\theta - 1$, en particulier on obtient

$$\cos(4\pi/5) = 2\cos^2(2\pi/5) - 1.$$

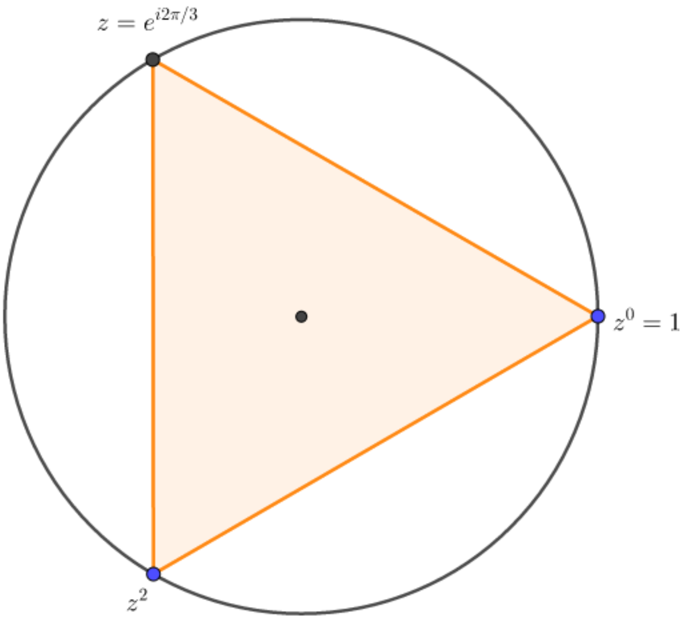
En posant $x = \cos(2\pi/5)$, l'équation devient

$$4x^2 + 2x - 1 = 0.$$

Le discriminant Δ de cette équation vaut 20. Après calcul, la racine positive de cette équation est

$$\cos(2\pi/5) = \frac{\sqrt{5} - 1}{4}.$$

Remarque : Il est facile de démontrer que $\cos(2\pi/3) = -1/2$ et de trisecter un cercle à partir de cette valeur. Nous pouvons aussi le faire en utilisant les idées ci-dessus.



Le nombre $z = e^{i2\pi/3}$ vérifie l'équation $z^2 + z + 1 = 0$. Or d'après la figure $z^2 = \overline{z}$.[25] Ainsi

$$z^2 + z = 2\cos(2\pi/3).$$

Par conséquent $2\cos(2\pi/3) + 1 = 0$, d'où $\cos(2\pi/3) = -1/2$. Nous pouvons y arriver sans remarquer que $z^2 = \overline{z}$, en résolvant tout simplement l'équation quadratique $z^2 + z + 1 = 0$. En effet, son discriminant vaut $\Delta = -3 = (\sqrt{3}i)^2$. Les solutions sont ainsi

$$z_{1,2} = \frac{-1 \pm i\sqrt{3}}{2}.$$

Le résultat est donc la partie réelle de ces solutions.

6.2 L'heptadécagone de Gauss

À seulement l'âge de 19 ans, Carl Freidrich Gauss a réussi à percer le mystère de la constructibilité des polygones réguliers.

Carl Freidrich Gauss (1777 - 1855)

25. Je vous invite là encore à le démontrer algébriquement. Vous pouvez utiliser le fait que $z^3 = 1$.

Pour exprimer $\cos(2\pi/17)$ sous sa forme constructible, Gauss commence par réordonner les sommets du 17-gone. En effet, au lieu de les mettre dans l'ordre $1, z, z^2, \dots, z^{16}$, où $z = e^{i2\pi/17}$, il a compris qu'il y avait une manière plus judicieuse pour se faire. Notons tout d'abord que z^k dépend seulement du reste modulo 17 de k. Par exemple z^{19} et z^{36} donne tous les deux z^2 car

$$36 \equiv 19 \equiv 2 \pmod{17}.$$

Par ailleurs, on peut remarquer que pour $k = 0, 1, \dots, 15$, le nombre 3^k donne tous les restes non nuls par la division euclidienne par 17 et on obtient donc le tableau suivant

k	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
$3^k \pmod{17}$	1	3	9	10	13	5	15	11	16	14	8	7	4	12	2	6

Le nouvel ordre de nos racines 17-ièmes de l'unité différents de 1 est donc

$$z^1, z^3, z^9, z^{10}, z^{13}, z^5, z^{15}, z^{11}, z^{16}, z^{14}, z^8, z^7, z^4, z^{12}, z^2, z^6.$$

Par la suite, en prenant un élément sur deux de cette liste, Gauss considère les deux quantités

$$\begin{aligned} x_1 &= z^1 + z^9 + z^{13} + z^{15} + z^{16} + z^8 + z^4 + z^2 \\ x_2 &= z^3 + z^{10} + z^5 + z^{11} + z^{14} + z^7 + z^{12} + z^6. \end{aligned}$$

On remarque facilement que

$$x_1 + x_2 = z^1 + z^2 + \cdots + z^{16} = -1.$$

Je vous laisse faire le produit de x_1 par x_2, vous trouverez $x_1 x_2 = -4$.[26] Ainsi x_1 et x_2 vérifient le système

$$\begin{cases} x_1 + x_2 &= -1 \\ x_1 x_2 &= -4. \end{cases}$$

Ils sont donc solutions de l'équation

$$(x - x_1)(x - x_2) = x^2 - (x_1 + x_2)x + x_1 x_2 = x^2 + x - 4 = 0.$$

Le discriminant de cette équation vaut $\Delta = 17$ et donc

$$x_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{17}}{2}.$$

Pour distinguer x_1 de x_2, en notant $\varphi = 2\pi/17$ il suffit de remarquer que

$$\begin{aligned} x_1 &= (z^1 + z^{16}) + (z^2 + z^{15}) + (z^4 + z^{13}) + (z^8 + z^9) \\ &= (z^1 + \overline{z^1}) + (z^2 + \overline{z^2}) + (z^4 + \overline{z^4}) + (z^8 + \overline{z^8}) \\ &= 2\Big(\cos(\varphi) + \cos(2\varphi) + \cos(4\varphi) + \cos(8\varphi)\Big) \end{aligned}$$

Il s'ensuit que $x_1 > 0$. En effet, $\varphi < \pi/3$ donc par la stricte décroissance de la fonction cosinus sur $[0, \pi]$, $\cos(\varphi) > 1/2$. De même $2\varphi < \pi/3$ et $4\varphi < \pi/2$. Par conséquent $\cos(2\varphi) > 1/2$ et $\cos(4\varphi) > 0$. Le résultat en découle et on peut en déduire que

$$x_1 = \frac{-1 + \sqrt{17}}{2} \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{-1 - \sqrt{17}}{2}.$$

26. Ce calcul est laborieux mais élémentaire.

En prenant un élément sur deux de x_1 et x_2, on définit maintenant 4 nouvelles quantités

$$\begin{aligned}
y_1 &= z^1 + z^{13} + z^{16} + z^4 \\
y_2 &= z^9 + z^{15} + z^8 + z^2 \\
y_3 &= z^3 + z^5 + z^{14} + z^{12} \\
y_4 &= z^{10} + z^{11} + z^7 + z^6.
\end{aligned}$$

Après calcul (à faire seul) on trouve

$$\begin{cases} y_1 + y_2 = x_1 \\ y_1 y_2 = -1 \end{cases} \qquad \text{et} \qquad \begin{cases} y_3 + y_4 = x_2 \\ y_3 y_4 = -1 \end{cases}$$

Les nombres y_1 et y_2 sont donc solutions de l'équation $y^2 - x_1 y - 1 = 0$. Ainsi

$$\begin{aligned}
y_{1,2} &= \frac{x_1 \pm \sqrt{x_1^2 + 4}}{2} \\
&= \frac{-1 + \sqrt{17} \pm \sqrt{34 - 2\sqrt{17}}}{4}.
\end{aligned}$$

Pour distinguer y_1 de y_2, il suffit de remarquer que

$$\begin{aligned}
y_1 &= (z^1 + z^{16}) + (z^4 + z^{13}) \\
&= (z^1 + \overline{z^1}) + (z^4 + \overline{z^4}) \\
&= 2\Big(\cos(\varphi) + \cos(4\varphi)\Big) \\
y_2 &= (z^2 + z^{15}) + (z^8 + z^9) \\
&= (z^2 + \overline{z^{15}}) + (z^8 + \overline{z^8}) \\
&= 2\Big(\cos(2\varphi) + \cos(8\varphi)\Big).
\end{aligned}$$

Là encore, la stricte décroissante de la fonction cosinus sur $[0, \pi]$ permet d'affirmer que $y_1 > y_2$. On en déduit donc que

$$\begin{aligned}
y_1 &= \frac{-1 + \sqrt{17} + \sqrt{34 - 2\sqrt{17}}}{4} \\
y_2 &= \frac{-1 + \sqrt{17} - \sqrt{34 - 2\sqrt{17}}}{4}.
\end{aligned}$$

De même, les nombres y_3 et y_4 sont solutions de l'équation $y^2 - x_2 y - 1 = 0$. Le même argument permet d'affirmer que

$$\begin{aligned}
y_3 &= \frac{-1 - \sqrt{17} + \sqrt{34 + 2\sqrt{17}}}{4} \\
y_4 &= \frac{-1 - \sqrt{17} - \sqrt{34 + 2\sqrt{17}}}{4}.
\end{aligned}$$

Pour calculer $\cos(\varphi)$, nous finissons par définir les quantités

$$\begin{aligned}
t_1 &= z^1 + z^{16} \\
t_2 &= z^4 + z^{13}.
\end{aligned}$$

On remarque alors que

$$\begin{cases} t_1 + t_2 & = y_1 \\ t_1 t_2 & = y_3 \end{cases}$$

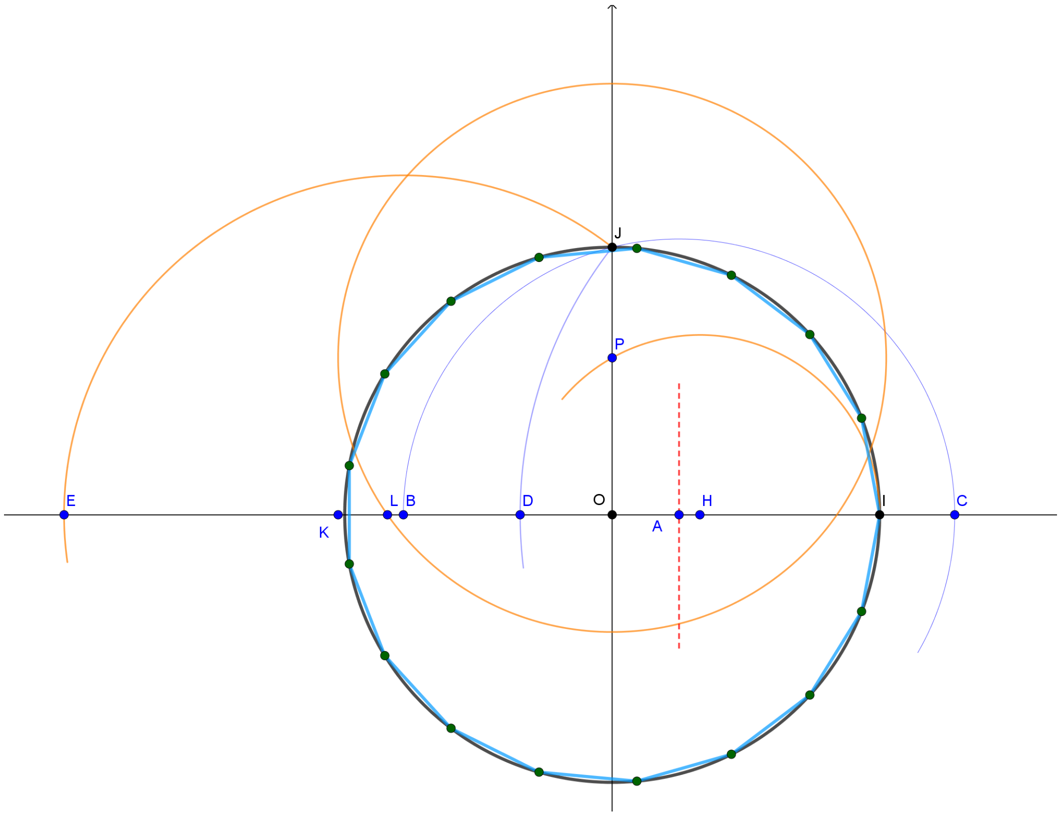
Ainsi t_1 et t_2 sont solutions de l'équation $t^2 - y_1 t + y_3 = 0$ avec $t_1 > t_2$. Par conséquent on obtient le résultat annoncé *loc.cit*

$$\begin{aligned} t_1 &= 2\cos\left(\frac{2\pi}{17}\right) \\ &= \frac{y_1 + \sqrt{y_1^2 - 4y_3}}{2} \\ &= -\frac{1}{8} + \frac{1}{8}\sqrt{17} + \frac{1}{8}\sqrt{34 - 2\sqrt{17}} \\ &+ \frac{1}{4}\sqrt{17 + 3\sqrt{17} - \sqrt{34 - 2\sqrt{17}} - 2\sqrt{34 + 2\sqrt{17}}}. \end{aligned}$$

On comprend mieux maintenant d'où vient la réputation de Gauss. Ce procédé extrêmement ingénieux laisse beaucoup de questions en suspens. Gauss a ramené la résolution d'une équation de degré 17 à la résolution de plusieurs équations de degré 2. Mais par quel éclair de génie a-t-il pu y penser ? Pourquoi avoir choisi les puissances de 3 pour réordonner ses racines et puis pourquoi prendre exactement les quantités ci-dessus ? La théorie des équations permet de répondre à toutes ces questions, mais elle n'est pas notre sujet ici.

Le procédé suivant permet de construire notre heptadécagone à la règle non-graduée et au compas. Étant donné 3 points O, I et J définissant un repère orthonormé :

1. Construire le point A $\in$ [OI] tel que OC $= \dfrac{1}{4}$OI.
2. Tracer le cercle de centre A et de rayon AJ coupant (OI) en B et en C
3. Tracer le cercle de centre C de rayon AJ coupant (OI) en D du côté opposé à I par rapport à O.
4. Tracer le cercle de centre B et de rayon BJ coupant (OI) en E (toujours du côté opposé à I par rapport à O)
5. Construire H, milieu de ID
6. Construire le cercle de centre H et de rayon HI coupant [OJ] en P
7. Construire K, le milieu de OE
8. Tracer le cercle de centre P et de rayon OK coupant (OI) en L du côté opposé à I par rapport à O.
9. La longueur KL est celle du côté d'un 34-gone : finir la construction.



6.3 Les triplets pythagoriciens

Le problème des triplets pythagoriciens est le plus ancien de l'histoire des mathématiques. La quête de ces nombres entiers, solutions de l'équation $a^2 + b^2 = c^2$, fait l'objet d'une tablette en argile au nom de Plimpton322 appartenant à la civilisation babylonienne.

Plimpton322-Courtoisie Rare Book & Manuscript Library
Columbia University

Ce petit bijou contient des triplets pythagoriciens sophistiqués datant environ de l'an 1800 av. J.-C. Cela signifie en clair que le théorème de Pythagore était probablement connu bien avant ce dernier. La recherche de ces entiers a inspiré beaucoup de mathématiciens de premier plan. Euclide a développé dans ses *Éléments* la théorie de divisibilité et par des considérations géométriques, a su répondre à cette question en utilisant l'identité

$$\left(\frac{x-y}{2}\right)^2 + xy = \left(\frac{x+y}{2}\right)^2.$$

Diophante d'Alexandrie a utilisé une fameuse méthode géométrique fort ingénieuse, connue sous le nom de la méthode des cordes-tangentes de Diophante. Il affirme ainsi que la recherche des solutions entières de l'équation $a^2+b^2=c^2$ est équivalente à la localisation des points à coordonnées rationnelles situés sur le cercle unité défini par l'équation

$$X^2+Y^2=1.$$

Les brillants travaux de Gauss ont permis de comprendre l'équation de Pythagore et bien d'autres équations sous un nouvel angle, plus fécond et plus instructif. Au lieu d'utiliser la factorisation réelle

$$a^2=(c-b)(c+b)$$

comme Euclide, Gauss factorise a^2+b^2 dans $\mathbb{C}$ pour obtenir

$$a^2+b^2=(a-ib)(a+ib).$$

La fameuse formule donnant tous les triplets pythagoriciens, à savoir

$$(u^2-v^2)^2+(2uv)^2=(u^2+v^2)^2,$$

en découle en utilisant la géométrie des nombres complexes et en étudiant les propriétés arithmétiques de l'ensemble $\mathbb{Z}[i]$ des entiers de Gauss, défini par

$$\mathbb{Z}[i]=\{a+ib; \quad a,b\in\mathbb{Z}\}.$$

Dans la suite, nous allons essayer de comprendre ce lien sans s'attarder sur les détails techniques. En effet, si on effectue le changement de variables $u=\cos\theta$ et $v=\sin\theta$ dans l'expression ci-dessus on obtient

$$(\cos^2\theta-\sin^2\theta)^2+(2\cos\theta\sin\theta)^2=(\cos^2\theta+\sin^2\theta)^2.$$

Or on sait par les formules trigonométriques que

$$\cos^2\theta-\sin^2\theta=\cos 2\theta \quad \text{et} \quad 2\cos\theta\sin\theta=\sin 2\theta.$$

Notre relation devient ainsi

$$\cos^2 2\theta+\sin^2 2\theta=(\cos^2 2\theta+\sin^2 2\theta)^2.$$

Si vous avez des yeux de lynx, vous remarquerez que la formule des triplets pythagoriciens n'est qu'un cas particulier d'une formule plus générale, en prenant $\theta+\theta'$ au lieu de 2θ. En effet, on a

$$\cos^2(\theta+\theta')+\sin^2(\theta+\theta')=(\cos^2\theta+\sin^2\theta)(\cos^2\theta'+\sin^2\theta').$$

En utilisant les formules $\cos(\theta+\theta')=\cos\theta\cos\theta'-\sin\theta\sin\theta'$ et $\sin(\theta+\theta')=\sin\theta\cos\theta'+\sin\theta'\cos\theta$ on obtient

$$(\cos\theta\cos\theta'-\sin\theta\sin\theta')^2+(\sin\theta\cos\theta'+\sin\theta'\cos\theta)^2=(\cos^2\theta+\sin^2\theta)(\cos^2\theta'+\sin^2\theta').$$

Ainsi, en posant $a=\cos\theta$, $b=\sin\theta$, $c=\cos\theta'$ et $d=\sin\theta'$ il vient

$$(ac-bd)^2+(ad+bc)^2=(a^2+b^2)(c^2+d^2),$$

qui n'est autre que la fameuse formule d'Al-Khazin affirmant que le produit de deux entiers, chacun somme de deux carrés, est un entier somme de deux carrés. N'est-ce pas incroyable ? Quel lien alors avec les nombres complexes ? Les formules d'addition trigonométrique ne sont qu'une manifestation plus compliquée de la règle de multiplication de deux nombres complexes, on peut alors soupçonner que les imaginaires ne sont pas bien loin. En effet, sans passer par la trigonométrie on a

$$\begin{aligned}(a^2+b^2)(c^2+d^2) &= (a-ib)(a+ib)(c-id)(c+id)\\ &= (a-ib)(c-id)(a+ib)(c+id)\\ &= [(ac-bd)-i(ad+bc)][(ac-bd)+i(ad+bc)]\\ &= (ac-bd)^2+(ad+bc)^2.\end{aligned}$$

Tout simplement ! Maintenant en prenant $a=c$ et $b=d$, on obtient

$$(a^2+b^2)(a^2+b^2) = (a^2-b^2)^2+(2ab)^2,$$

qui est bien la fameuse formule donnant les triplets pythagoriciens.

Références

[1] Jean-Claude Carrega. *Théorie des corps, la règle et le compas*. Hermann, 1997.

[2] William Dunham. *Euler, The Master of Us All*. The Mathematical Association of America, 1999.

[3] Robin Hartshorne. *Geometry : Euclid and Beyond*. Springer, 2000.

[4] Tristan Needham. *Visual Complex Analysis*. Oxford University Press, 1997.

[5] Daniel Perrin. *Mathématiques d'école, nombres, mesures et géométrie*. Cassini, 2011.

[6] John Stillwell. *Elements of Algebra*. Springer, 1994.

[7] John Stillwell. *The Four Pillars of Geometry*. Springer, 2005.

[8] Jean-Pierre Tignol. *Galois' Theory of Algebraic Equations*. World Scientific, 2016.

