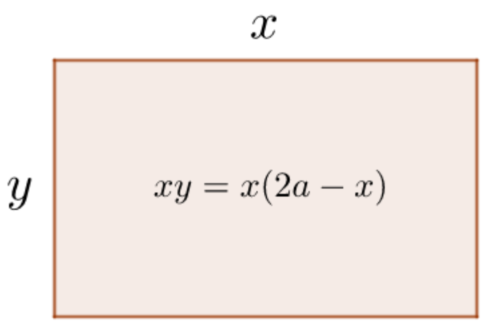
Un peu de calcul infinitésimal

Dans ses *Éléments, livre VI*, Euclide a démontré géométriquement le problème isopérimétrique suivant

Euclide : Parmi tous les rectangles ayant le même périmètre (ou demi-périmètre), le carré est celui dont l'aire est maximale.

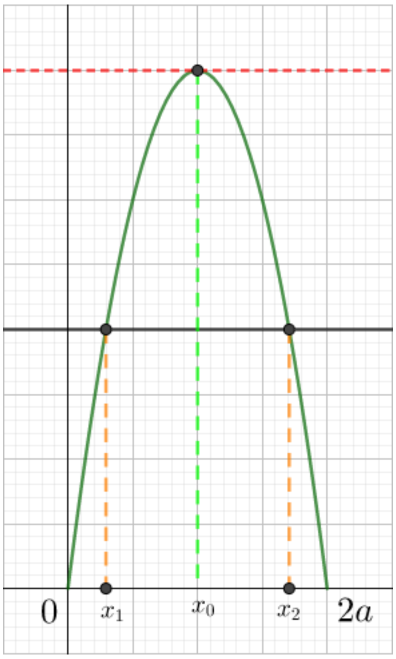
Nous allons donner dans la suite deux preuves relativement modernes de ce résultat. Soit en effet R un rectangle de longueur x et largeur y dont le demi-périmètre vaut $2a$. Cela signifie que

$$x + y = 2a.$$



On cherche alors à maximiser l'aire de R, à savoir xy. Puisque $y = 2a - x$, cette aire est donnée par la fonction f définie par l'expression

$$f(x) = x(2a - x), \quad \text{où} \quad 0 \leq x \leq 2a$$



Ainsi, f est une parabole dont le maximum vaut a^2 quand $x = a$. En effet, nous avons

$$\begin{aligned}
f(x) &= x(2a - x) \\
&= -x^2 + 2ax \\
&= -(x^2 - 2ax) \\
&= -(x^2 - 2ax + a^2 - a^2) \\
&= -(x-a)^2 + a^2 \\
&= a^2 - (x-a)^2.
\end{aligned}$$

Cette forme canonique nous permet de déduire quelques informations géométriques concernant notre parabole. En effet, à a^2 on enlève un nombre positif, à savoir $(x-a)^2$. Par conséquent la fonction f ne dépasse pas a^2 et vaut cette valeur quand $x = a$. Dans ce cas $y = 2a - x = 2a - a = a$. On en déduit donc que l'aire de R est maximale quand $x = y = a$ auquel cas notre rectangle est un carré. Élégant, n'est-ce pas ? Attendez alors de voir la méthode ingénieuse de Fermat.

Dans la figure ci-dessus, Fermat prend x_1 et x_2 tels que $f(x_1) = f(x_2)$ et $x_1 \neq x_2$ et prétend que quand x_1 et x_2 convergent l'un vers l'autre alors la droite noire devient tangente à la courbe en son maximum, ce qui permettra de déterminer celui-ci et la valeur de x pour lequel il est atteint. En effet

$$\begin{aligned}
f(x_1) = f(x_2) &\iff x_1(2a - x_1) = x_2(2a - x_2) \\
&\iff 2ax_1 - x_1^2 = 2ax_2 - x_2^2 \\
&\iff x_2^2 - x_1^2 = 2a(x_2 - x_1) \\
&\iff (x_2 - x_1)(x_2 + x_1) = 2a(x_2 - x_1) \\
&\iff x_2 + x_1 = 2a \quad \text{car } x_2 - x_1 \neq 0.
\end{aligned}$$

Fermat prend maintenant $x_1 = x_2 = x_0$ ou x_0 désigne leur valeur de convergence. Il obtient ainsi

$$2x_0 = 2a.$$

Par conséquent $x_0 = a$, ce qui implique que le maximum est atteint quand $x = a$ et celui-ci vaut

$$f(a) = a(2a - a) = a^2.$$

Voilà donc en un claquement de doigts.

