

Travaux Dirigés de Thermodynamique

Recueil d'exercices et problèmes avec solutions

Prof. A. ELANIQUE

Novembre 2018

1. Equation d'état. Coefficients thermoélastiques. (1)

L'étude expérimentale d'un gaz réel a permis de déterminer ses coefficients thermoélastiques :

$$\alpha = \frac{R}{PV} + \frac{a}{VT^2} \quad \text{et} \quad \chi = \frac{RT}{VP^2}$$

Avec $a =$ constante,

Etablir l'équation d'état du gaz.

2. Equation d'état. Coefficients thermoélastiques. (2).

1. Le coefficient de dilation isobare et le coefficient de compression isochore d'un fluide sont égaux. Montrer alors que le produit PV est une fonction de la température T .

2. Déterminer cette fonction dans le cas où : $\alpha = \frac{1}{T}$.

3. Echauffement isochore.

Un flacon contenant un liquide est à une température telle qu'il soit complètement rempli de ce liquide.

Les coefficients thermoélastiques supposés constants sont :

$$\alpha = 11,0 \cdot 10^{-3} \text{K}^{-1} \quad \text{et} \quad \chi = 3,0 \cdot 10^{-5} \text{atm}^{-1}$$

Montrer qu'une simple élévation de température de $0,5^\circ\text{C}$ suffit à créer une surpression considérable. Que se passe-t-il ?

4. Gaz de Dieterici.

Une mole de ce gaz a pour équation :

$$P(V-b) = RT \exp\left(-\frac{a}{RTV}\right)$$

1. Donner les expressions des coefficients thermoélastiques α et β pour ce gaz.
2. Dans le domaine des faibles pressions, on peut utiliser une expression du type :

$$PV = RT \left(1 + \frac{A}{V}\right)$$

- i. Retrouver l'équation d'état du gaz parfait si $V \rightarrow \infty$.
- ii. Déterminer A par un développement limitée au premier ordre en $\left(\frac{1}{V}\right)$.
- iii. Que deviennent α et β ?

5. Reconstruction de l'équation d'état à partir des coeff. thermoélastiques.

Le coefficient de dilatation isobare a été mesuré sur un système et trouvé de la forme:

$$\alpha = \frac{A}{AT+BP}$$

Le coefficient de compressibilité isotherme χ du même système est :

$$\chi = \frac{1}{P} - \frac{B}{AT+BP}$$

Quelle est l'équation d'état de ce système ?

6. Détermination de la capacité thermique par la méthode des mélanges.

- a) Un calorimètre contient 95 g d'eau à 20°C . On ajoute 71 g d'eau à 50°C . Quelle serait la température d'équilibre si on pouvait négliger la capacité calorifique du calorimètre et de ses accessoires ?
- b) La température d'équilibre observée est $31,3^\circ\text{C}$. En déduire la capacité calorifique du calorimètre et de ses accessoires.
- c) Le même calorimètre contient maintenant 100 g d'eau à 15°C . On y plonge un échantillon métallique pesant 25 g sortant d'une étuve (four) à 95°C . La température d'équilibre étant $16,7^\circ\text{C}$, calculer la capacité calorifique massique du métal.

A. N. : capacité calorifique de l'eau $4,18 \text{ J ; K}^{-1} \cdot \text{g}^{-1}$.

Solutions des TD du Chapitre 1 :

Coefficients thermoélastiques, équation d'état et calorimétrie

1. Equation d'état. Coefficients thermoélastiques.

On utilise la définition du coefficient de dilatation isobare :

$$\alpha = \frac{1}{V} \left(\frac{\partial V}{\partial T} \right)_P = \frac{R}{PV} + \frac{a}{VT^2} \rightarrow \left(\frac{\partial V}{\partial T} \right)_P = \frac{R}{P} + \frac{a}{T^2}$$

A pression constante on a :

$$dV = \frac{R}{P} dT + a \frac{dT}{T^2}$$

$$V = \frac{R}{P} T - \frac{a}{T} + Cte(P) \text{ avec } Cte(P) \text{ une constante dépendant } a \text{ priori de la pression } P.$$

Afin de déterminer l'expression de $Cte(P)$ en fonction de la pression on utilise alors la définition du coefficient de compressibilité isotherme :

$$\chi_T = -\frac{1}{V} \left(\frac{\partial V}{\partial P} \right)_T = \frac{RT}{VP^2}$$

On injecte l'expression du volume trouvée précédemment dans la dérivée partielle :

$$-\frac{1}{V} \left(\frac{\partial}{\partial P} \left(\frac{R}{P} T - \frac{a}{T} + Cte(P) \right) \right)_T = \frac{RT}{VP^2}$$

$$-\frac{1}{V} \left(-\frac{R}{P^2} T + \left(\frac{\partial Cte(P)}{\partial P} \right)_T \right) = \frac{RT}{VP^2}$$

$$\left(\frac{\partial Cte(P)}{\partial P} \right)_T = 0$$

$$Cte(P) = Cte = b$$

On obtient :

$$V = \frac{RT}{P} - \frac{a}{T} + b$$

$$\boxed{P(V - b) = RT - a \frac{P}{T}}$$

2. Equation d'état. Coefficients thermoélastiques (2).

1. Produit PV .

Nous avons : $\alpha = \beta$ or $\frac{\alpha}{\beta\chi} = P \rightarrow \chi = \frac{1}{P}$.

En utilisant la définition de χ , nous obtenons l'égalité suivante :

$$\chi = -\frac{1}{V} \left(\frac{\partial V}{\partial P} \right)_T = \frac{1}{P}$$

A température constante :

$$\frac{dV}{V} + \frac{dP}{P} = 0$$

$$\ln PV = Cte$$

Or cette constante dépend de la température, soit $Cte = \ln f(T)$.

2. Détermination de la fonction d'état.

Nous avons : $\alpha = \frac{1}{T}$

Or :

$$\alpha = \frac{1}{V} \left(\frac{\partial V}{\partial T} \right)_P = \left(\frac{\partial \ln V}{\partial T} \right)_P = \frac{1}{T}$$

Comme $\ln PV = \ln f(T)$

on peut écrire $\ln V = \ln f(T) - \ln P$

En injectant cette dernière expression dans la définition de α , nous obtenons :

$$\left(\frac{\partial \ln V}{\partial T} \right)_P = \left(\frac{\partial \ln(f(T) - \ln P)}{\partial T} \right)_P = \left(\frac{\partial \ln f(T)}{\partial T} \right)_P = \frac{1}{T}$$

Comme $f(T)$ ne dépend pas de la pression,

l'intégration de cette dernière équation donne :

$$\ln f(T) = \ln T + Cte = \ln T + \ln K$$

Ici la constante d'intégration K est une « vraie » constante ne dépendant pas de la pression.

Finalement :

$$f(T) = KT$$
$$PV = KT$$

3. Echauffement isochores.

On désire déterminer la variation de pression à volume constant du fait d'une élévation de température.

Le coefficient β rend compte de cela.

$$\beta = \frac{1}{P} \left(\frac{\partial P}{\partial T} \right)_V \rightarrow \left(\frac{\partial P}{\partial T} \right)_V = P\beta$$

Les différents coefficients thermoélastiques sont reliés entre eux par la relation :

$$P\beta\chi = \alpha \rightarrow P\beta = \frac{\alpha}{\chi}$$

Dans le cas d'une faible élévation de température,

on peut estimer que :

$$\left(\frac{\partial P}{\partial T} \right)_V \approx \left(\frac{\Delta P}{\Delta T} \right)_V$$

On obtient alors :

$$\Delta P = \frac{\alpha}{\chi} \Delta T$$
$$\Delta P = 165 \text{ atm}$$

Une telle élévation de pression conduit à la destruction du thermomètre.

4. Gaz de Dieterici :

$$P(V-b) = RT \exp\left(-\frac{a}{RTV}\right)$$

1) Coeff. thermoelastiques -

$$\alpha = \frac{1}{V} \left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_P \quad \text{coef de dilatation à pression constante.}$$

$$\beta = \frac{1}{P} \left(\frac{\partial P}{\partial T}\right)_V \quad \text{coef d'augmentation de pression à volume constant.}$$

$$\gamma_T = -\frac{1}{V} \left(\frac{\partial V}{\partial P}\right)_T \quad \text{coef de compressibilité isotherme.}$$

$$\rightarrow \beta = \frac{1}{P} \left(\frac{\partial P}{\partial T}\right)_V = \left(\frac{\partial \ln P}{\partial T}\right)_V$$

$$\text{or } P = \frac{RT}{V-b} \exp\left(-\frac{a}{RTV}\right) \quad \text{d'où } \ln P = \ln \frac{RT}{V-b} - \frac{a}{RTV}$$

$$\left(\frac{\partial \ln P}{\partial T}\right)_V = \frac{a}{RT^2V} + \frac{1}{T}$$

$$\boxed{\beta = \frac{1}{T} + \frac{a}{RV} \frac{1}{T^2}}$$

→ Pour obtenir α on différencie l'équation d'état à pression constante.

$$\ln P + \ln(V-b) = \ln R + \ln T - \frac{a}{RTV}$$

$$\frac{dV}{V-b} = \frac{dT}{T} - \frac{a}{R} d\left(\frac{1}{TV}\right)$$

$$= \frac{dT}{T} - \frac{a}{R} \left(-\frac{1}{T^2V^2} d(TV)\right)$$

$$= \frac{dT}{T} + \frac{a}{R} \left(\frac{VdT}{T^2V^2} + \frac{TdV}{T^2V^2}\right)$$

$$= \frac{dT}{T} + \frac{a}{RTV} \left(\frac{dV}{V} + \frac{dT}{T}\right)$$

$$dV \left[\frac{1}{V-b} - \frac{a}{RTV^2} \right] = dT \left(\frac{1}{T} + \frac{a}{RT^2V} \right)$$

$$\alpha = \frac{1}{V} \left(\frac{\partial V}{\partial T} \right)_P = \frac{1}{V} \frac{\frac{1}{T} + \frac{a}{RT^2V}}{\frac{1}{V-b} - \frac{a}{RT^2V}}$$

$$\alpha = \frac{1}{T} \frac{1 + a/RTV}{\frac{V}{V-b} - \frac{a}{RTV}}$$

b) $PV = RT \left[1 + \frac{A}{V} \right]$ • si $V \rightarrow \infty$ $P \rightarrow 0$
 $PV \approx RT.$

$$\bullet P = \frac{RT}{V-b} e^{-\frac{a}{RTV}}$$

$$P = \frac{RT}{V(1-\frac{b}{V})} e^{-\frac{a}{RTV}}$$

$$P \approx \frac{RT}{V} \left(1 + \frac{b}{V} \right) \left(1 - \frac{a}{RTV} \right)$$

$$PV \approx RT \left(1 + \frac{b}{V} \right) \left(1 - \frac{a}{RTV} \right) \approx RT \left[1 - \frac{a}{RTV} + \frac{b}{V} - \frac{ab}{RTV^2} \right]$$

$$PV \approx RT \left[1 - \frac{a}{RTV} + \frac{b}{V} \right] \quad \text{néglige}$$

$$PV \approx RT \left[1 - \frac{a+bRT}{RTV} \right] \Rightarrow A = \frac{bRT-a}{RT}$$

$$PV \approx RT \left[1 + \frac{b - \frac{a}{RT}}{V} \right]$$

$$A = b - \frac{a}{RT}$$

• Pour trouver β partons de l'expression de $PV = RT \left[1 - \frac{b - \frac{a}{RT}}{V} \right]$.

$$\beta = \frac{1}{P} \left(\frac{\partial P}{\partial T} \right)_V = \frac{1}{P} \left[\frac{R}{V} \left(1 + \frac{b - \frac{a}{RT}}{V} \right) + \frac{RT}{V} \left(+ \frac{\dot{a}}{RT^2V} \right) \right]$$

$$\beta = \frac{R}{PV} \left(1 + \frac{b}{V} \right)$$

Pour déterminer α effectuons un DL de son expression :

$$\alpha = \frac{1}{T} \frac{1 + \frac{a}{RTV}}{\left(1 - \frac{b}{V}\right)^{-1} - \frac{a}{RTV}} = \frac{1}{T} \left(1 + \frac{a}{RTV}\right) \left(1 + \frac{b}{V} - \frac{a}{RTV}\right)^{-1}$$

$$\alpha = \frac{1}{T} \left(1 + \frac{a}{RTV}\right) \left(1 - \frac{b}{V} + \frac{a}{RTV}\right)$$

$$= \frac{1}{T} \left(1 - \frac{b}{V} + \frac{a}{RTV} + \frac{a}{RTV}\right) = \frac{1}{T} \left(1 - \frac{b}{V} + \frac{2a}{RTV}\right)$$

$$\boxed{\alpha = \frac{1}{T} \left(1 + \frac{\frac{2a}{RT} - b}{V}\right)}$$

5. Reconstruction d'une équation d'état.

On a :

$$\alpha = \frac{1}{V} \left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_P = \frac{A}{AT + BP} \quad (1)$$

$$\chi_T = -\frac{1}{V} \left(\frac{\partial V}{\partial P}\right)_T = \frac{1}{P} - \frac{B}{AT + BP} \quad (2)$$

On peut écrire (1) sous la forme :

$$\alpha = \frac{1}{V} \left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_P = \left(\frac{\partial \ln V}{\partial T}\right)_P = \left(\frac{\partial \ln(AT + BP)}{\partial T}\right)_P \quad (3)$$

L'intégration de cette équation conduit à :

$$\ln V = \ln(AT + BP) + f(P) \quad (4)$$

Les primitives ne dépendent que d'une fonction de P indépendante de T .

L'équation (2) s'écrit grâce à (4) :

$$\chi_T = -\frac{1}{V} \left(\frac{\partial V}{\partial P}\right)_T = -\left(\frac{\partial \ln V}{\partial P}\right)_T = \left(\frac{\partial (\ln(AT + BP) + f(P))}{\partial P}\right)_T \quad \text{ce qui conduit à :}$$

$$\chi_T = -\frac{B}{AT + BP} - \frac{df(P)}{dP} \quad \text{en tenant compte de l'expression de } \chi_T \text{ on obtient :}$$

$$-\frac{B}{AT + BP} - \frac{df(P)}{dP} = \frac{1}{P} - \frac{B}{AT + BP}$$

Par identification on obtient :

$$\frac{df(P)}{dP} = -\frac{1}{P} \Rightarrow f(P) = \ln \frac{C}{P} \text{ avec } C \text{ une « vraie » constante}$$

Finalement l'équation d'état de ce système est :

$$\ln V = \ln(AT + BP) + \ln \frac{C}{P}$$

$$\ln \frac{PV}{C} = \ln(AT + BP)$$

$$PV = C(AT + BP)$$

6. Détermination de la capacité thermique par la méthode des mélanges.

a) Le système eau initiale + eau ajoutée constitue un système isolé donc

$$\Delta U_A + \Delta U_B = 0 = m_A C(T_f - T_A) + m_B C(T_f - T_B)$$

C désigne la capacité thermique de l'eau par conséquent :

$$T_f = \frac{m_A T_A + m_B T_B}{m_A + m_B}$$

A. N. $\theta_f = 32.8^\circ\text{C}$

b) Soit **A** l'eau à 20°C , **B**, l'eau à 50°C , **C'** la capacité thermique du calorimètre et de ses accessoires. L'ensemble constitue un système isolé donc d'après le premier principe :

$$\Delta U_A + \Delta U_B + \Delta U_{C'} = 0 \text{ soit } m_A C(T'_f - T_A) + m_B C(T'_f - T_B) + C'(T'_f - T_A) = 0$$

$$\text{donc } C' = \frac{m_A C(T'_f - T_A) + m_B C(T'_f - T_B)}{T_A - T'_f}$$

A N $C' = 94,2 \text{ J K}^{-1}$.

c) A 100g d'eau, C calorimètre, B le métal de capacité thermique C_B , le même raisonnement que précédemment donne

$$C_B = \frac{m_A C(T''_f - T_A) + C'(T''_f - T_A)}{m_B(T_B - T''_f)}$$

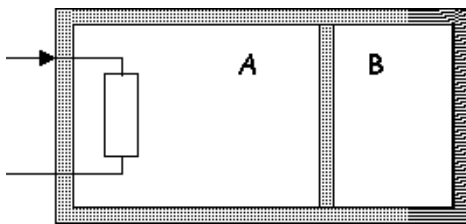
A N $C_B = 0,44 \text{ J K}^{-1} \cdot \text{g}^{-1}$.

1. Transformations réversibles couplées d'un gaz parfait.

On considère un cylindre *calorifugé* séparé en deux par un piston aussi calorifugé qui peut coulisser sans frottements sur les parois.

A l'instant initial, chaque compartiment contient 1 mole d'un gaz parfait à la température $T_0 = 298 \text{ K}$ et à la pression $P_0 = 1 \text{ bar}$.

On chauffe *réversiblement* le gaz contenu dans le compartiment A à l'aide d'une résistance électrique jusqu'à ce que la pression finale dans le compartiment A soit égale à $P_a = 2P_0$.



1. Déterminer dans l'état final : P_b, T_b, T_a .
2. Déterminer l'énergie fournie par la résistance électrique.

On donne: $\gamma = 1,4$; $R = 8,31 \text{ J/K.mol}$

2. Bilan énergétique sur un cycle (1).

On dispose d'un thermostat à la température $T_A = 300 \text{ K}$ et on considère un gaz parfait monoatomique dans l'état initial défini par $T_A, P_A = 1,0 \text{ bar}$ et $V_A = 10 \text{ L}$.

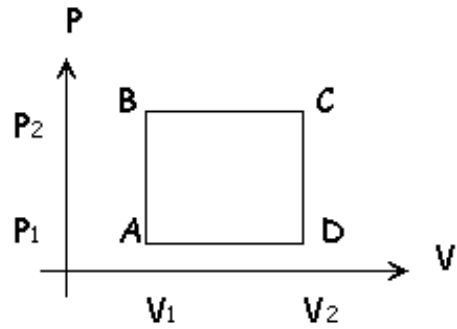
On effectue les transformations suivantes :

- une transformation adiabatique réversible AB telle $V_B = 20 \text{ L}$
- une transformation isochore BC telle que $P_C > P_B$ amenant le gaz à T_A ;
- une transformation isotherme CA ramenant le gaz dans son état initial.

Calculer les travaux et les transferts thermiques au cours de chaque transformation. Donnée : $\gamma = 5/3$.

3. Bilan énergétique sur un cycle. (2)

On fait subir à une mole de gaz décrit par le modèle du gaz parfait monoatomique le cycle suivant :



$P_1 = 1 \text{ atm}, P_2 = 5 \text{ atm}, V_1 = 22,4 \text{ L}, V_2 = 44,8 \text{ L}$.

Calculer :

1. la chaleur reçue au cours du cycle ;
2. la variation d'énergie interne $U_C - U_A$;
3. la chaleur reçue Q_{BC} au cours de la transformation BC ;
4. la chaleur si on passe directement de A à C par une droite.

Constante des gaz parfaits : $R = 8,31 \text{ S.I.} \gamma = 5/3$

4. Transformation polytropique d'un gaz parfait.

Un gaz parfait subit une transformation quasi statique et mécaniquement réversible dite polytropique d'indice k définie par $\delta Q = a dT$.

1. Montrer que dans ces conditions PV^k est une constante, k étant une constante à exprimer en fonction de a, C_v et C_p .
2. Etudier les cas particuliers $a = C_v, a = C_p, a = 0$ et $1/a = 0$.

5. Travail des forces de pression.

Partie A.

On réalise la compression isotherme d'une mole de gaz parfait contenu dans un cylindre de section S . On suppose que le poids du piston est négligeable devant les autres forces intervenant dans le problème. La température T_0 est maintenue constante par un thermostat. P_1 et P_2 sont les pressions initiale et finale. P_1 est la pression atmosphérique.

1. Comment réaliser une compression isotherme ?
2. Représenter graphiquement cette transformation en coordonnées (V, P) .
3. Calculer le travail fourni W_1 à une mole de gaz parfait.

Partie B.

On réalise maintenant cette compression brutalement; en posant sur le piston de section S une masse M calculée de telle sorte que la pression finale à l'équilibre soit P_2 à la température T_0 .

- Discuter ce qui se passe.
- Calculer le travail fourni W_2 à une mole de gaz parfait.

Partie C.

- Représenter le travail fourni dans ces deux situations en traçant $y = W_1/P_1V_1$ et $y' = W_2/P_2V_2$ en fonction de $x = P_2/P_1$.

On vérifiera que le travail fourni au gaz dans la transformation brutale, décrite ici, est toujours supérieur au travail fourni lors de la compression isotherme quasi statique.

Partie D.

On effectue l'expérience en deux étapes successives: compression brutale de P_1 à $2P_1$ puis de $2P_1$ à P_2 , avec $P_1 < 2P_1 < P_2$.

- Comparer avec les situations antérieures. Conclure.

6. Etude du cycle de Lenoir.

L'état initial d'une mole de gaz parfait est caractérisé par $P_0 = 2 \cdot 10^5$ pascals, $V_0 = 14$ litres. On fait subir successivement à ce gaz :

- une détente isobare, qui double son volume
- une compression isotherme, qui le ramène à son volume initial,
- un refroidissement isochore, qui le ramène à l'état initial (P_0, V_0).

- Représenter le cycle de transformation dans le diagramme (P, V).
A quelle température T_1 s'effectue la compression isotherme ?
En déduire la pression maximale atteinte.
- Calculer le travail et la quantité de chaleur échangés par le système au cours du cycle.
Constante des gaz parfaits : $R = 8,32$ SI.

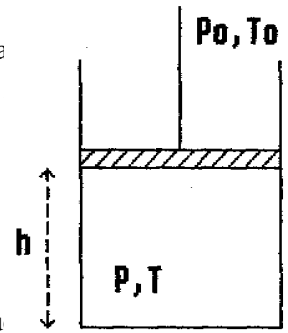
7. Compression adiabatique irréversible.

Un cylindre de section s est fermé par un piston de masse négligeable et coulissant sans frottement. Il

contient un gaz parfait caractérisé par les trois variables d'état P, h, T .

L'extérieur est l'atmosphère à la température T_0 et à la pression P_0 . Au départ le piston est en équilibre, et les paramètres initiaux du gaz parfait sont :

$$T = T_0 \text{ et } h = h_0.$$



Un opérateur applique brusquement au piston une force dirigée vers le bas telle que la pression totale exercée sur le piston soit P_1 et soit constante lors de la transformation.

La transformation est rapide et ne permet pas d'échanges de chaleur entre gaz parfait et milieu extérieur.

Exprimer la hauteur, notée

h_f dans l'état final où l'équilibre mécanique est réalisé.

On donne : Gaz parfait monoatomique : $\gamma = 5/3$.

8. Compression d'un gaz parfait.

Une mole d'un gaz parfait est contenue dans un cylindre vertical comportant un piston mobile, de masse négligeable en contact avec une atmosphère extérieure à pression constante $P_0 = 1,0$ bar et à la température $T_0 = 300$ K.

- On réalise la compression isotherme de ce gaz parfait. La température T_0 du gaz est maintenue constante grâce à l'atmosphère. On note $P_1 = 2,0$ bars la pression finale.
Déterminer le travail W des forces de pression lors de cette évolution.
- On réalise maintenant cette compression brutalement, en posant sur le piston de section S une masse M calculée de telle sorte que la pression finale à l'équilibre thermodynamique soit P_1 à la température T_0 .
Déterminer le travail W' des forces de pression lors de cette évolution.
- Représenter le travail fourni dans ces deux situations en traçant $y = W/(nRT_0)$ et $y' = W'/(nRT_0)$ en fonction de $x = P_1/P_0$. On vérifiera que le travail fourni au gaz dans la transformation brutale est toujours supérieur au travail fourni dans la compression isotherme. Quelle est la chaleur échangée avec l'air dans les deux cas ?

SOLUTIONS DES TD DU CHAPITRE 2 :
Chaleur, Travail et Premier principe

1. Transformations réversibles couplées d'un gaz parfait.

1. Etat final.

A l'état final, il y a équilibre mécanique du piston :

$$P_b = P_a = 2P_o$$

Le gaz parfait du compartiment B subit une transformation adiabatique réversible. D'après la loi de Laplace:

$$T_b = T_o \left(\frac{P_o}{P_b} \right)^{\frac{1-\gamma}{\gamma}} = 2^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} T_o$$

$$T_b = 363 \text{ K}$$

Le volume du cylindre est :

$$V = 2V_o = V_a + V_b$$

soit:

$$2V_o = \frac{2nRT_o}{P_o} = \frac{nRT_a}{P_a} + \frac{nRT_b}{P_b}$$

d'où:

$$\frac{2T_o}{P_o} = \frac{T_a + T_b}{2P_o} .$$

Finalelement:

$$T_a = 4T_o - T_b \\ T_a = 829 \text{ K}$$

2. Energie fournie par la résistance électrique.

Pour le gaz du compartiment B, comme car la transformation est adiabatique :

$$\Delta U_b = W_b + Q_b = \frac{nR}{\gamma-1} (T_b - T_o) = W_b$$

Pour le gaz du compartiment A, où Q_a est l'énergie fournie par la résistance au gaz :

$$\Delta U_a = W_a + Q_a = \frac{nR}{\gamma-1} (T_a - T_o)$$

Comme le volume total du cylindre est constant, on a :

$$W = W_a + W_b = 0.$$

On peut alors exprimer Q_a sous la forme suivante :

$$Q_a = \frac{nR}{\gamma-1} (T_a - T_o) + W_b = \frac{nR}{\gamma-1} (T_a + T_b - 2T_o)$$

En tenant compte de l'expression trouvée pour T_a ,

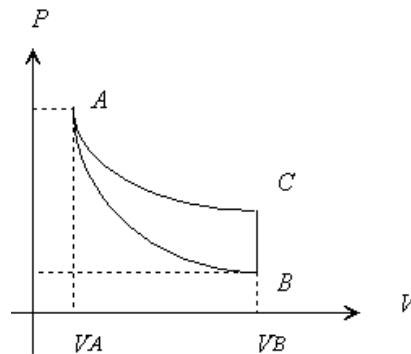
on obtient :

$$Q_a = \frac{2nRT_o}{\gamma-1}$$

$$Q_a = 12,4 \text{ kJ}$$

2. Bilan énergétique sur un cycle (1)

Dans un diagramme (V, p) on représente le cycle de transformations suivies par le gaz parfait :



Transformation AB.

Le gaz parfait décrit une transformation adiabatique et réversible. Si l'on suppose le coefficient γ indépendant de la température, on peut alors utiliser la loi de Laplace pour déterminer la température T_B .

$$\Delta U_{AB} = Q_{AB} + W_{AB}$$

Comme la transformation est adiabatique on a : $Q_{AB} = 0$. D'où :

$$\Delta U_{AB} = W_{AB} = C_V(T_B - T_A) = \frac{nR}{\gamma - 1}(T_B - T_A)$$

$$\text{Or : } \frac{P_A V_A}{T_A} = nR \text{ et } T_A V_A^{\gamma-1} = T_B V_B^{\gamma-1} \Rightarrow T_B = T_A \frac{V_A^{\gamma-1}}{V_B^{\gamma-1}}$$

En remplaçant dans l'expression de la variation d'énergie interne :

$$\Delta U_{AB} = W_{AB} = \frac{nR}{\gamma - 1}(T_B - T_A) = \frac{P_A V_A}{T_A} \frac{1}{\gamma - 1} \left(T_A \frac{V_A^{\gamma-1}}{V_B^{\gamma-1}} - T_A \right)$$

$$\Delta U_{AB} = W_{AB} = \frac{P_A V_A}{\gamma - 1} \left(\frac{V_A^{\gamma-1}}{V_B^{\gamma-1}} - 1 \right)$$

$$\Delta U_{AB} = W_{AB} = -5,55 \cdot 10^2 \text{ J}$$

Transformation BC.

La transformation est isochore on a alors : $W_{BC} = 0$.

La variation d'énergie interne s'écrit alors :

$$\Delta U_{BC} = Q_{BC} = C_V(T_C - T_B) = \frac{nR}{\gamma - 1}(T_A - T_B)$$

On peut remarquer que :

$$\Delta U_{BC} = Q_{BC} = -W_{AB}$$

$$Q_{BC} = 5,55 \cdot 10^2 \text{ J}$$

Transformation CA.

La transformation est isotherme. La variation d'énergie interne est alors nulle sur cette transformation. Soit :

$$\Delta U_{CA} = Q_{CA} + W_{CA} = 0 \rightarrow W_{CA} = -Q_{CA} = -\int p_{ext} dV$$

Une transformation isotherme étant réversible on a : $p_{ext} = p_{gaz} = p$. On obtient alors :

$$W_{CA} = -Q_{CA} = -\int p dV = -\int_C^A nRT_A \frac{dV}{V}$$

$$W_{CA} = nRT_A \ln \frac{V_C}{V_A}$$

Comme $V_C = V_B$

$$W_{CA} = nRT_A \ln \frac{V_B}{V_A}$$

$$W_{CA} = 6,9 \cdot 10^2 \text{ J}$$

3. Bilan énergétique sur un cycle. (2)

1. Chaleur reçue.

Sur un cycle la variation d'énergie interne est nulle on a donc :

$$\Delta U = W_{cycle} + Q_{cycle} = 0 \Rightarrow Q_{cycle} = -W_{cycle}$$

$$W_{cycle} = W_{AB} + W_{BC} + W_{CD} + W_{DA}$$

Les transformations AB et CD sont isochores, le gaz n'échange pas de travail avec le milieu extérieur sur ces transformations : $W_{AB} = W_{CD} = 0$.

Les transformations BC et DA sont isobares, il s'en suit pour une de ces transformations les relations suivantes :

$$W = -\int p_{ext} dV = -\int p_{gaz} dV \text{ car une transformation isobare est mécaniquement réversible}$$

$$W = -p_{gaz} \Delta V \text{ car la pression du gaz est constante pendant la transformation}$$

On obtient :

$$W_{BC} = -p_2 (V_2 - V_1)$$

$$W_{DA} = -p_1 (V_1 - V_2)$$

La quantité de chaleur échangée sur le cycle s'écrit alors :

$$Q_{cycle} = -W_{BC} - W_{DA} = p_2(V_2 - V_1) + p_1(V_1 - V_2)$$

$$Q_{cycle} = (p_2 - p_1)(V_2 - V_1)$$

$$Q_{cycle} = 4 \times 1,013 \cdot 10^5 \times 22,4 \cdot 10^{-3} = 9,1 \text{ kJ}$$

2. Variation d'énergie interne lors de la transformation AC.

L'énergie interne d'un gaz parfait ne dépend que de la température.

$$\Delta U_{AC} = \frac{nR}{\gamma - 1} (T_C - T_A)$$

L'équation d'état d'un gaz parfait permet d'écrire :

$$\Delta U_{AC} = \frac{nR}{\gamma - 1} \left(\frac{P_2 V_2}{nR} - \frac{P_1 V_1}{nR} \right)$$

$$\Delta U_{AC} = \frac{1}{\gamma - 1} (P_2 V_2 - P_1 V_1)$$

$$\Delta U_{AC} = \frac{1}{\frac{5}{3} - 1} (5 \times 44,8 - 1 \times 22,4) \times 1,013 \cdot 10^5 \times 1,0 \cdot 10^{-3} = 31 \text{ kJ}$$

3. Chaleur échangée au cours de la transformation BC.

Sur une isobare, la chaleur échangée par un gaz parfait est égale à la variation de son enthalpie :

$$Q_{BC} = \Delta H_{BC} = Cp \Delta T = \frac{nR\gamma}{\gamma - 1} (T_C - T_B)$$

On utilise de nouveau l'équation d'état du gaz parfait :

$$Q_{BC} = \frac{\gamma}{\gamma - 1} (P_2 V_2 - P_2 V_1)$$

$$Q_{BC} = \frac{\gamma}{\gamma - 1} P_2 (V_2 - V_1)$$

$$Q_{BC} = \frac{\frac{5}{3}}{\frac{5}{3} - 1} 5 \times 1,013 \cdot 10^5 (44,8 - 22,4) \cdot 10^{-3} = 28,3 \text{ kJ}$$

4. Chaleur de A à C.

L'énergie interne étant une fonction d'état, sa variation entre deux états d'équilibre donnés ne dépend pas de la nature de la transformation réalisée entre ces deux états. La variation d'énergie interne déterminée à la question 2 est donc la même pour la transformation envisagée dans cette question. On peut alors écrire :

$$\Delta U_{AC} = \frac{1}{\gamma - 1} (P_2 V_2 - P_1 V_1) = Q'_{AC} + W'_{AC}$$

$$Q'_{AC} = \Delta U_{AC} - W'_{AC} = \frac{1}{\gamma - 1} (P_2 V_2 - P_1 V_1) - W'_{AC}$$

Comme $W'_{AC} = -\int p_{ext} dV = -\int p_{gaz} dV$, le travail apparaît égal à l'opposé de l'aire de la surface sous la droite AC que l'on peut décomposer en un triangle ACD et un rectangle de côté AD et de hauteur A'A, A' étant le projeté de A sur l'axe des abscisses.

$$W'_{AC} = -\left(\frac{1}{2}(V_2 - V_1)(p_2 - p_1) + p_1(V_2 - V_1)\right)$$

$$W'_{AC} = -(V_2 - V_1)\left(\frac{1}{2}(p_2 - p_1) + p_1\right) = -\frac{1}{2}(V_2 - V_1)(p_1 + p_2)$$

On obtient ainsi :

$$Q'_{AC} = \Delta U_{AC} - W'_{AC} = \frac{1}{\gamma - 1}(P_2 V_2 - P_1 V_1) + \frac{1}{2}(V_2 - V_1)(p_1 + p_2)$$

$$Q'_{AC} = 37,4 \text{ kJ}$$

4. Transformation polytropique d'un gaz parfait.

1. Recherche de l'expression de k .

On applique le premier principe:

$$dU = \delta Q + \delta W$$

soit

$$C_V dT = adT - pdV \text{ (Eq.A)}$$

En multipliant par $(1/T)$ et en appliquant la relation d'état du gaz parfait on obtient :

$$(C_V - a) \frac{dT}{T} + nR \frac{dV}{V} = 0$$

Or :

$$\frac{dT}{T} = \frac{d(pV)}{pV}$$

et

$$nR = C_P - C_V$$

On obtient par intégration :

$$p^{(C_V - a)} V^{(C_V - a + nR)} = p^{(C_V - a)} V^{(C_P - a)} = cte$$

Finalement :

$$pV^k = C$$

avec C une constante et

$$k = \frac{C_P - a}{C_V - a}$$

2. Etude des cas particuliers.

On peut exprimer a en fonction de k :

$$a = \frac{\gamma - k}{1 - k} \cdot C_v \quad (\text{Eq.B})$$

- Pour $a = C_v$ (Eq.A) s'écrit $-pdV = 0$. La transformation est isochore. (Eq.B) implique alors que $k = \infty$.
- Pour $a = C_v$ (Eq.B) implique que $k = 0$. La transformation est isochore.
- Pour $a = 0$, on retrouve la loi de Laplace pour une adiabatique réversible dans le cas d'un G.P. de γ constant.
- Pour $1/a = 0$ on obtient $k = 1$. On retrouve la loi de Mariotte, la transformation est isotherme.

5. Travail des forces de pression.

Partie A.

1. Réalisation d'une compression isotherme de la pression P_1 à la pression P_2 .

Une transformation *isotherme* est une transformation *quasi statique* et *réversible* au cours de laquelle la température du système est constante et égale à celle du milieu extérieur.

Une transformation est *quasi statique* lorsqu'elle amène le système d'un état d'équilibre initial à un état d'équilibre final en le faisant passer par une succession continue d'états d'équilibre.

Une transformation est dite *mécaniquement réversible* si elle est quasi statique et si en outre à chaque instant de l'évolution il y a équilibre mécanique entre le système considéré et l'extérieur avec lequel il est en contact. S'il y avait un équilibre parfait entre le système et le milieu extérieur il ne pourrait pas se produire de transformation : pour que celle-ci puisse exister il est donc nécessaire qu'il existe un très faible déséquilibre tel que si on le supprime, l'évolution progresse alors dans le sens contraire en repassant exactement par les mêmes états intermédiaires mécaniques.

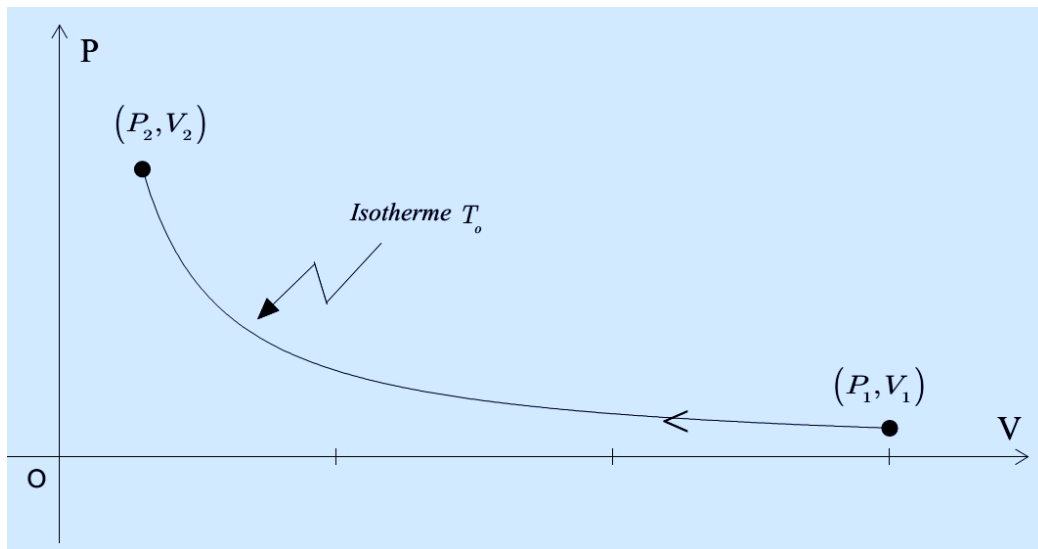
L'exercice étudie une compression *isotherme* d'un gaz parfait de la pression P_1 à la pression P_2 : à chaque étape de l'évolution, le travail mécanique fourni par l'extérieur au système doit être intégralement échangé par chaleur par le système avec l'extérieur (les parois du système sont nécessairement **diathermanes**¹). Pour que cet échange soit complet cela impose de procéder très lentement : on peut, par exemple, déposer très progressivement un à un des grains de sable sur le piston de telle manière à ce que la pression extérieure (et donc celle du système) passe de façon quasi continue de la pression P_1 à la pression P_2 .

2. Représentation graphique.

Au cours d'une transformation isotherme à la température T_0 d'un gaz parfait, l'équation d'état permet d'écrire que :

$$PV = nRT_0 = Cste$$
$$P = \frac{Cste}{V}$$

¹ Diathermane : Se dit d'un corps qui laisse passer la chaleur.



3. Travail fourni.

On étudie le système constitué du cylindre, du piston sans masse et du gaz parfait. Le travail élémentaire s'écrit :

$$\delta W_1 = -p_{ext} dV \underset{\substack{\text{mécaniquement} \\ \text{réversible}}}{=} -p_{gaz} dV = -nRT_o \frac{dV}{V}$$

Or :

$$PV = nRT_o = Cste \Rightarrow d(PV) = 0$$

$$PdV + VdP = 0$$

$$\frac{dV}{V} = -\frac{dP}{P}$$

On obtient ainsi :

$$\delta W_1 = -nRT_o \frac{dV}{V} = nRT_o \frac{dP}{P}$$

$$W_1 = \int_{P_1}^{P_2} nRT_o \frac{dP}{P} = nRT_o \int_{P_1}^{P_2} \frac{dP}{P}$$

$$W_1 = nRT_o \ln \frac{P_2}{P_1}$$

Partie B.

4. Caractéristiques de la transformation.

Il y a maintenant une descente brusque du piston. La transformation n'est plus mécaniquement réversible car la pression du gaz n'est pas définie au cours de l'évolution.

Cette compression est non représentable par une courbe dans le diagramme P, V : seuls les points correspondant à l'état initial et l'état final peuvent y figurés.

Cependant la pression extérieure :

$$P_2 = P_1 + \frac{Mg}{S}$$

et la température extérieure sont considérées comme constantes.

Le gaz subit une évolution monobare à la pression P_2 et monotherme² à la température T_o .

² Se dit d'une transformation au cours de laquelle un système n'échange de chaleur qu'avec une seule source à température déterminée.

5. Travail.

Le travail élémentaire s'écrit :

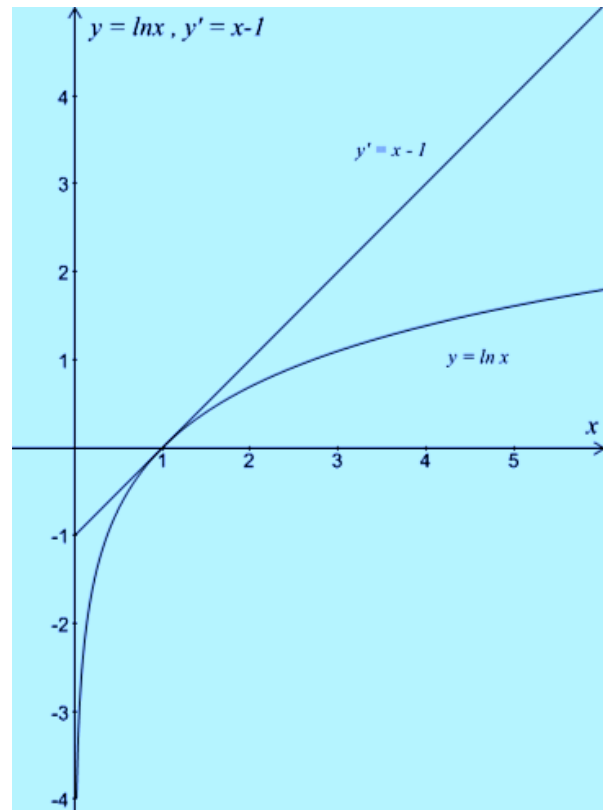
$$\begin{aligned}\delta W_2 &= -P_{ext} dV = -P_2 dV \\ &\quad \text{mécaniquement} \\ &\quad \text{réversible} \\ W_2 &= -\int_{V_1}^{V_2} P_2 dV = -P_2 \int_{V_1}^{V_2} dV \\ W_2 &= -P_2 (V_2 - V_1) = P_2 V_2 \left(\frac{V_1}{V_2} - 1 \right) \\ W_2 &= nRT_0 \left(\frac{P_2}{P_1} - 1 \right)\end{aligned}$$

Partie C.

6. Représentations graphiques.

On pose :

$$y = \frac{W_1}{nRT_o} = \ln \frac{P_2}{P_1} = \ln x \quad \text{et} \quad y' = \frac{W_2}{nRT_o} = \frac{P_2}{P_1} - 1 = x - 1$$



On peut remarquer que : $y' > y$. Le travail fourni lors de la compression isotherme qui est réversible est **plus faible que** celui fourni lors de la compression brutale qui n'est pas réversible.

Partie D.

7. Compressions en deux étapes.

On calcule le travail total fourni au système lors d'une nouvelle compression effectuée de manière brutale mais cette fois en deux étapes successives.

Pour la première étape :

$$W = nRT_o \left(\frac{2P_1}{P_1} - 1 \right)$$

Pour la seconde étape :

$$W' = nRT_o \left(\frac{P_2}{2P_1} - 1 \right)$$

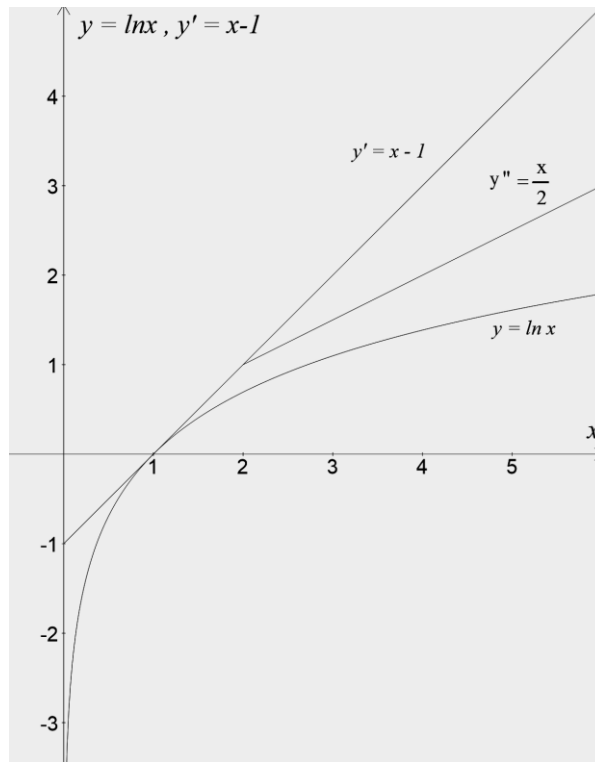
Le travail total W_3 a pour expression :

$$W_3 = W + W' = nRT_o \frac{P_2}{2P_1}$$

Ce résultat correspond à la courbe $y'' = \frac{W_3}{nRT_o} = \frac{x}{2}$

La condition $P_2 > 2P_1$ implique $x > 2$. On ne trace alors que la partie $x > 2$ de la

droite $y'' = \frac{x}{2}$.

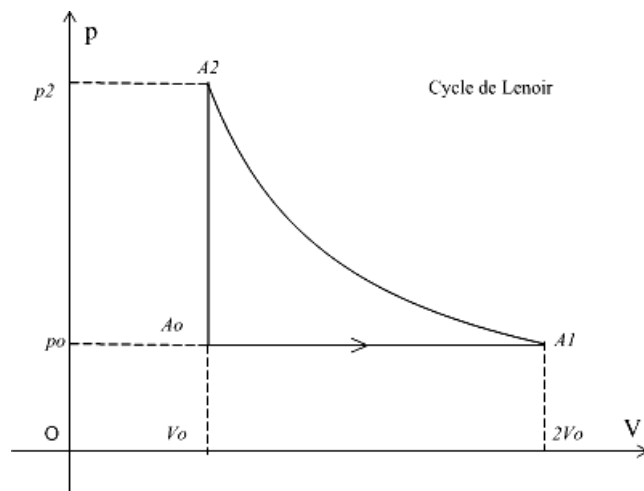


On peut remarquer qu'opérer en deux étapes successives permet de se rapprocher de la courbe y , c'est-à-dire d'une transformation réversible.

5. Etude du cycle de Lenoir.

1. Cycle. Pression et températures.

Représentation du cycle :



- Température de la compression isotherme :

Dans l'état $A1$:

$$p_1 V_1 = RT_1 \text{ or } p_1 = p_o \text{ et } V_1 = 2V_o$$

$$T_1 = 2 \frac{p_o V_o}{R}$$

$$T_1 = 673 \text{ K}$$

- Pour la compression isotherme de $A1$ de $A2$:

$$p_1 V_1 = RT_1 = p_2 V_2 \text{ or } p_1 = p_o, V_1 = 2V_o \text{ d'où :}$$

$$p_o 2V_o = p_2 V_o$$

$$p_2 = 2p_o \quad p_2 = 4,0 \cdot 10^5 \text{ Pa}$$

2. Travaux et quantités de chaleur.

Sur la transformation isobare $A0A1$:

$$W_{AoA1} = -\int p_{ext} dV \underset{\text{isobare}}{=} -\int p_{gaz} dV = -\int p_o dV$$

$$W_{AoA1} = -p_o (V_{A1} - V_{Ao}) = -p_o (2V_o - V_o) = -p_o V_o$$

$$W_{AoA1} = -2,8 \cdot 10^3 \text{ J}$$

Sur la transformation isotherme A1A2 :

$$W_{A1A2} = -\int p_{ext} dV \underset{\text{isotherme}}{=} -\int p_{gaz} dV = -\int RT_1 \frac{dV}{V}$$

$$W_{A1A2} = -RT_1 \ln \frac{V_{A2}}{V_{A1}} = -RT_1 \ln \frac{V_o}{2V_o} = RT_1 \ln 2 \text{ or } T_1 = 2 \frac{p_o V_o}{R}$$

$$W_{A1A2} = p_o V_o \ln 2$$

$$W_{A1A2} = 3,8 \cdot 10^3 \text{ J}$$

Sur la transformation isochore A2Ao :

$$W_{A2Ao} = 0$$

Sur l'ensemble du cycle on a :

$$\Delta U = W + Q = W_{AoA1} + W_{A1A2} + Q = 0$$

$$Q = -(W_{AoA1} + W_{A1A2}) = p_o V_o (1 - \ln 2)$$

$$Q = -1,06 \cdot 10^3 \text{ J}$$

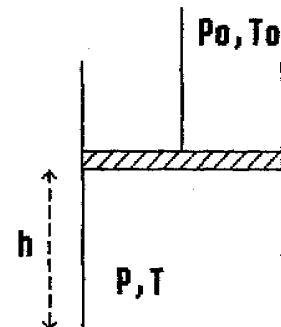
6. Etude d'une compression adiabatique irréversible.

On considère le système formé de l'association du cylindre, du piston de poids négligeable devant les autres mises en jeu et du gaz que l'on suppose parfait.

Dans les états initial et final, il y a **équilibre mécanique** :

Etat initial : état (0) $(p_o, V_o = Sh_o, T_o)$

Etat final : état (1) $(p_1, V_1 = Sh_1, T_1)$



On applique le premier principe à ce système :

$$\Delta U = W + Q$$

Or $Q = 0$ car les parois sont **athermanes**, la transformation est donc adiabatique.

Comme le gaz est supposé parfait et que la transformation est monobare on a l'égalité suivante :

$$\Delta U = C_v(T_1 - T_o) = -p_1(V_1 - V_o)$$

$$\frac{nR}{\gamma - 1} \left(\frac{p_1 V_1}{nR} - \frac{p_o V_o}{nR} \right) = -p_1(V_1 - V_o)$$

$$\frac{1}{\gamma - 1} (p_1 h_1 - p_o h_o) = -p_1(h_1 - h_o)$$

En regroupant les termes on obtient :

$$h_1 = h_o \frac{P_o + (\gamma - 1) P_1}{\gamma P_1}$$

7. Compression d'un gaz parfait.

1. Compression isotherme.

Lors d'une compression isotherme on a à chaque stade de la transformation :

$$T_{ex} = T_o = T_{gaz} = cste$$

$$p_{ex} = p_{gaz}$$

Le travail des forces de pression s'écrit alors :

$$W = -\int_i^f p_{ext} dV = -\int_i^f p_{gaz} dV$$

Le gaz étudié est supposé parfait, d'où : $p_{gaz} = \frac{nRT_o}{V}$

$$W = -\int_i^f \frac{nRT_o}{V} dV = nRT_o \ln \frac{V_o}{V_1}$$

$$W = nRT_o \ln \frac{P_1}{P_o} \quad W = 1,7.10^3 \text{ J}$$

2. Compression brutale.

Si à l'équilibre thermodynamique à l'état final la pression est égale à P_1 pour le gaz, cela veut dire que la pression extérieure est justement P_1 et qui est constante.

$$W' = -\int_i^f p_{ext} dV = -\int_i^f p_1 dV = -p_1 (V_1 - V_o)$$

$$W' = -p_1 V_1 \left(1 - \frac{V_o}{V_1} \right)$$

Or $p_1 V_1 = nRT_o$ et $p_o V_o = nRT_o$ d'où :

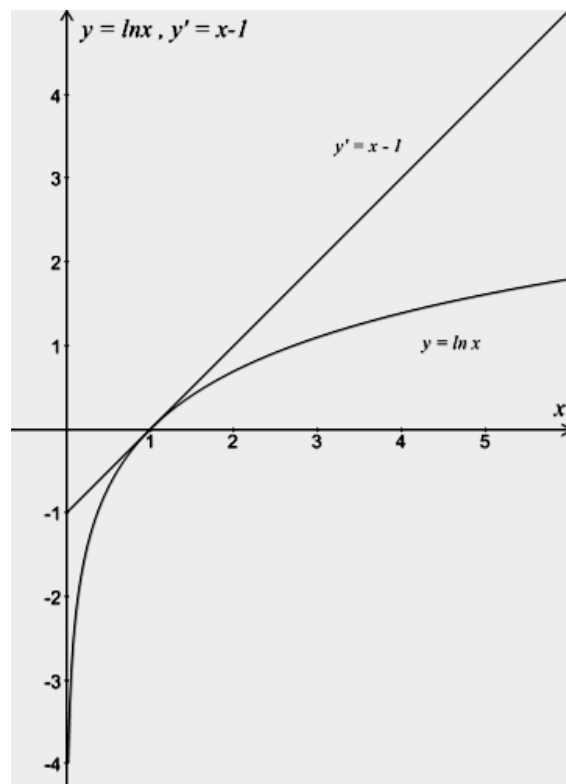
$$W' = -nRT_o \left(1 - \frac{P_1}{P_o} \right)$$

$$W' = nRT_o \left(\frac{P_1}{P_o} - 1 \right) \quad W' = 2,5.10^3 \text{ J}$$

3. Représentation graphique

On pose :

$$y = \frac{W}{nRT_o} = \ln \frac{P_1}{P_o} = \ln x \quad \text{et} \quad y' = \frac{W'}{nRT_o} = \frac{P_1}{P_o} - 1 = x - 1$$



On peut remarquer que : $y' \geq y$. Le travail fourni lors de la compression réversible est plus faible que celui fourni lors de la compression brutale.

Chaleur échangée.

Dans les cas, la température finale du gaz parfait est la même que celle de son état initial. D'où :

$$\Delta U = W + Q = 0 \Rightarrow Q = -W$$

$$\Delta U = W' + Q' = 0 \Rightarrow Q' = -W'$$

1. Gaz parfaits séparés par une paroi mobile diathermane.

Un récipient calorifugé est séparé en deux compartiments par un piston perméable à la chaleur. Le premier compartiment contient n_1 moles d'un gaz parfait (G.P.) à la température T_0 , volume V_0 et pression $2P_0$. Le second contient n_2 moles du même gaz, à température T_0 , volume V_0 et pression P_0 . On libère le piston.

- 1) Exprimer la différentielle de l'entropie en fonction de la variation élémentaire de l'énergie interne du gaz contenu dans le premier compartiment et de la variation élémentaire de son volume. En déduire l'état d'équilibre thermodynamique.
- 2) Calculer la température T_f , la pression P_f et le volume occupé par chaque dans l'état d'équilibre final.
- 3) Calculer la variation d'entropie.

2. Bilans entropiques.

Une enceinte placée dans un thermostat à la température $T_0 = 273\text{K}$ contient n moles d'hélium (gaz parfait, $\gamma = 3R/2$).

- 1) A $t = 0$, la température de l'hélium est $T_i = 300\text{K}$. Calculer la création d'entropie au cours d'une évolution isochore. Conclure.
- 2) A $t = 0$ la température de l'hélium est $T_e = 273\text{K}$. On abaisse le volume V jusqu'à $V/2$ de manière isotherme et réversible. Montrer que la création d'entropie est nulle.

3. Compression monotherme d'un gaz parfait.

Un cylindre vertical de section S , à parois diathermanes, contient un gaz parfait. Le cylindre est fermé par un piston sans masse.

La pression initiale du gaz est P_0 et sa température T_0 . L'atmosphère est aussi à la pression P_0 et à la température T_0 . On dépose sur le piston une masse. La nouvelle pression d'équilibre est P_1 .

Déterminer l'entropie créée lors de cette transformation.

4. Critère de réversibilité. Transformation monotherme. Bilan entropique.

Un solide de capacité thermique mc , initialement à T_0 , est mis en contact thermique avec une source de chaleur de température T_e invariable. Exprimer entre l'état initial et l'état final:

1. La variation d'entropie du solide.
2. La création d'entropie. Vérifier son signe si
3. $T_e = T_0(1 + \varepsilon)$ avec $\varepsilon \ll 1$.
4. Quelle conclusion opératoire peut-on tirer sur la réversibilité de cette transformation dans le cas où les températures T_0 et T_e sont très différentes ?

5. Optimisation d'un compresseur

On veut réaliser une installation de production d'air comprimé répondant au « cahier des charges » suivant : état initial de l'air : pression : $P_1 = 105\text{ Pa}$, température $T_1 = 290\text{ K}$ (T_1 : température ambiante) ; état final de l'air : pression : $P_2 = 5.105\text{ Pa}$, température T_1 . L'air sera assimilé à un gaz parfait

$$\gamma = \frac{C_p}{C_v} = 1,40$$

($R = 8,31\text{ J.mol}^{-1}\text{K}^{-1}$), de rapport Les échanges thermiques éventuels se font uniquement avec l'extérieur à la température uniforme T_1 .

- 1)
 - a) Déterminer l'entropie créée S_c lors de cette transformation en fonction du travail W pour la réaliser. Quel est le travail minimal W_m nécessaire à cette transformation ?
 - b) A quel type de transformation correspond cette valeur W_m ? Montrer que ce travail est bien celui recherché.
- 2) La transformation précédente étant irréalisable en pratique, on propose les opérations suivantes:
 - compression adiabatique réversible de l'état initial jusqu'à la pression P_2 ;
 - refroidissement isobare jusqu'à l'état final.
 Représenter dans un diagramme (P,V) les différentes transformations. Exprimer le travail total W_1 nécessaire ainsi que le Rapport :

$$\eta_1 = \frac{W_1}{W_m}$$

Faire l'application numérique pour η_1 dans le cas d'une mole de gaz parfait.

1. Gaz parfaits séparés par une paroi mobile diathermane.

1) Etat final d'équilibre.

On considère comme système le récipient et son contenu (n_1 moles d'un G.P. & n_2 moles du même G.P.).

En partant de l'identité thermodynamique appliquée à chaque sous-système gazeux et en remarquant que $dV_1 = -dV_2$ car la transformation est *isochore* et que $dU_1 = -dU_2$ car le système est *isolé*,

la différentielle dS s'écrit :

$$dS = dS_{(\text{sous système 1})} + dS_{(\text{sous système 2})}$$

$$dS = \left(\frac{1}{T_{f1}} - \frac{1}{T_{f2}} \right) dU_1 + \left(\frac{p_{f1}}{T_{f1}} - \frac{p_{f2}}{T_{f2}} \right) dV_1$$

A l'équilibre, la différentielle de l'entropie est nulle, quels que soient dU_1 et dV_1 , d'où:

$$p_{f1} = p_{f2} = p_f \text{ et } T_{f1} = T_{f2} = T_f$$

2) Température, pression et volume.

La loi des gaz parfaits, appliquée à chaque gaz dans l'état initial, permet de trouver que

$$n_1 = 2 n_2.$$

L'énergie interne étant constante lors de cette transformation :

$$\Delta U = \Delta U_1 + \Delta U_2 = 2C_v(T_f - T_0) + C_v(T_f - T_0) = 0.$$

Par conséquent :

$$T_f = T_0.$$

L'application de l'équation d'état du gaz parfait et de la conservation du volume du système lors de la transformation donne :

$$V_{f1} = (4/3)V_0 \text{ et } V_{f2} = (2/3)V_0 \text{ et } p_f = (3/2)p_0$$

3) Variation d'entropie.

L'entropie étant une fonction extensive on a :

$$\Delta S = \Delta S_{(1)} + \Delta S_{(2)}$$

En se servant de l'expression de la fonction entropie $S(T,V)$ dans le cas d'un gaz parfait on obtient, compte tenu des résultats précédents:

$$\Delta S = n_1 R \ln \frac{V_{f1}}{V_0} + n_2 R \ln \frac{V_{f2}}{V_0}$$

soit:

$$\Delta S = n_2 R \ln \frac{32}{27}$$

2. Bilans Entropiques.

1) Transformation isochore.

La création d'entropie du gaz est définie par : $Sc = \Delta S - Se$. Or :

$$dS = \frac{dU}{T} + \frac{p}{T}dV.$$

Comme la transformation est isochore et que le gaz est parfait, on obtient:

$$\Delta S = \frac{3}{2} nR \ln \frac{T_o}{T_i}$$

D'autre part l'entropie d'échange dans le cas d'une transformation monotherme s'écrit :

$$Se = \frac{Q}{T_o} \text{ où } Q \text{ est la chaleur réellement échangée par le gaz avec le thermostat.}$$

On applique le premier principe pour déterminer Q :

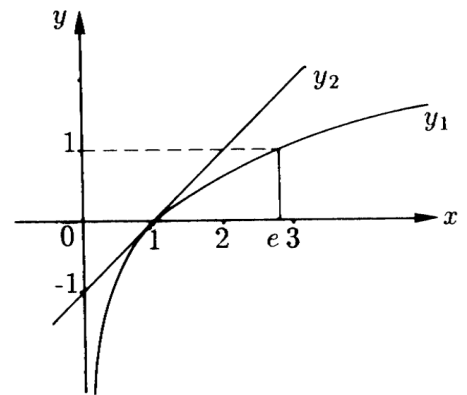
$$\Delta U = \frac{3}{2} nR(T_o - T_i) = W + Q = Q$$

car $W = 0$ car la transformation est isochore.

En regroupant les différents résultats, on obtient:

$$Sc = \frac{3}{2} nR \left(\frac{T_i}{T_o} - 1 - \ln \frac{T_i}{T_o} \right)$$

En posant $x = \frac{T_i}{T_o}$ et en étudiant les représentations graphiques des fonctions $x - 1$ et $\ln x$, on montre que Sc est positive et cela quelque soit $x > 0$.



2) Transformation isotherme.

La création d'entropie du gaz est définie par : $Sc = \Delta S - Se$.

Comme :

$$dS = \frac{dU}{T} + \frac{p}{T}dV.$$

La transformation est isotherme et comme le gaz étudié est considéré comme parfait, on peut écrire :

$$dU = 0$$

$$dS = nR \frac{dV}{V}$$

On obtient :

$$\Delta S = - nR \ln 2$$

D'autre part :

$$Se = \frac{Q}{T_o}$$

où Q est la chaleur réellement échangée par le gaz avec le thermostat.

On applique le premier principe pour déterminer Q . La transformation étant isotherme on a :

$$\Delta U = W + Q = 0$$

La transformation étant mécaniquement réversible, le travail des forces de pression s'écrit :

$$Q = -W = \int p_{ext} dV = \int p dV$$

$$Q = \int nRT_o \frac{dV}{V} = - nRT_o \ln 2$$

L'entropie d'échange est donc égale à : $Se = -nR \ln 2$

En regroupant les différents résultats, on obtient : $Sc = 0$

La transformation étant réversible, la création d'entropie est nulle.

3. Compression monotherme d'un gaz parfait.

On détermine la variation d'entropie du gaz parfait sur l'isotherme T_o qui constitue un chemin réversible :

$$dS = \frac{\delta Q^{\text{réversible}}}{T_{\text{ystème}}}$$

Or la variation d'énergie interne d'un gaz parfait est nulle sur une isotherme. On a alors :

$$\delta Q^{\text{réversible}} = -\delta W^{\text{réversible}} = p_{\text{ystème}} dV$$

$$dS = \frac{p_{\text{ystème}} dV}{T_{\text{ystème}}} = nR \frac{dV}{V}$$

$$T_{\text{ystème}} = T_o$$

Par intégration :

$$\Delta S = nR \ln \frac{V_1}{V_o} = nR \ln \frac{P_o}{P_1}$$

On a :

$$\Delta S = S_e + S_c$$

$$S_e \text{ entropie d'échange : } S_e = \frac{\overset{\text{réellement échangée}}{\underset{\text{lors de la transformation}}{Q}}}{T_{\text{extérieure}}} = \frac{Q}{T_o}$$

S_c entropie créée (irréversibilité de la transformation)

Pour déterminer la quantité Q d'énergie échangée par chaleur au cours de la transformation, on utilise le premier principe au gaz parfait :

$$\Delta U = W + Q = 0 \rightarrow Q = -W = \int_{V_o}^{V_1} P_{\text{ext}} dV = \int_{V_o}^{V_1} P_1 dV = P_1(V_1 - V_o)$$

$$S_e = \frac{\overset{\text{réellement échangée}}{\underset{\text{lors de la transformation}}{Q}}}{T_{\text{extérieure}}} = \frac{P_1(V_1 - V_o)}{T_o}$$

Or :

$$V_1 = \frac{nRT_o}{P_1} \text{ et } V_o = \frac{nRT_o}{P_o} \text{ d'où :}$$

$$S_e = \frac{P_1(V_1 - V_o)}{T_o} = nR \left(1 - \frac{P_1}{P_o} \right)$$

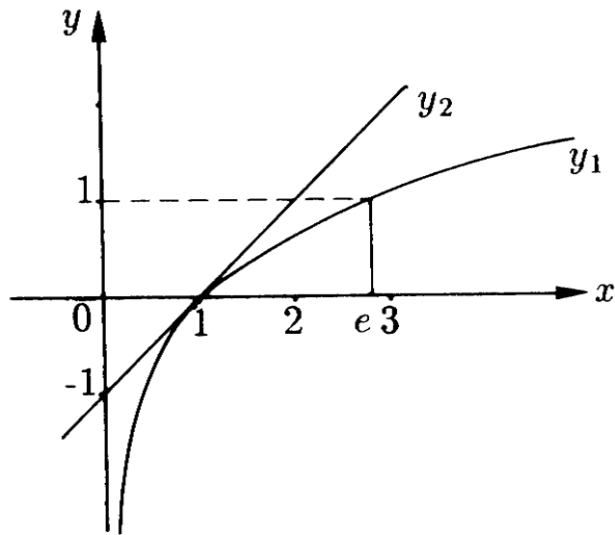
L'entropie créée a pour expression :

$$S_c = \Delta S - S_e = nR \left(\ln \frac{P_o}{P_1} - 1 + \frac{P_1}{P_o} \right)$$

On pose : $x = \frac{P_1}{P_o}$

$$S_c = \Delta S - S_e = nR(x - 1 - \ln x)$$

On représente les courbes $y_1 = \ln x$ et $y_2 = x - 1$:



L'écart entre ces deux courbes est proportionnel à l'entropie créée. On peut s'apercevoir que cette entropie est positive et cela pour tout $x > 0$.

4. Critère de réversibilité. Transformation monotherme. Bilan entropique.

1) Variation d'entropie du solide.

Dans le cas d'une phase condensée on peut écrire, compte tenu de la très faible variation de volume du système :

$$dU = mcdT$$

L'identité thermodynamique (toujours vraie quelque soit la transformation car U est une fonction d'état) s'écrit alors :

$$dS = \frac{dU}{T} = mc \frac{dT}{T}$$

$$\Delta S = mc \ln \frac{T_e}{T_o}$$

2) Création d'entropie.

On a :

$$\Delta S = S_e + S_c$$

$$S_e \text{ entropie d'échange : } S_e = \frac{Q^{\text{réellement échangée lors de la transformation}}}{T_{\text{extérieure}}} = \frac{Q}{T_e}$$

S_c entropie créée (irréversibilité de la transformation)

$$S_c = \Delta S - S_e = mc \ln \frac{T_e}{T_o} - \frac{Q}{T_e} = mc \ln \frac{T_e}{T_o} - mc \frac{(T_e - T_o)}{T_e}$$

$$S_c = mc \left(\ln \frac{T_e}{T_o} - \frac{(T_e - T_o)}{T_e} \right)$$

Soit : $T_e = T_o(1 + \varepsilon)$

On écrit l'entropie créée sous la forme :

$$S_c = mc \left(\ln \frac{T_e}{T_o} - \frac{(T_e - T_o)}{T_e} \right) = mc \left(\ln \frac{T_o(1+\varepsilon)}{T_o} - 1 + \frac{T_o}{T_o(1+\varepsilon)} \right)$$

$$S_c = mc \left(\ln(1+\varepsilon) - 1 + (1+\varepsilon)^{-1} \right)$$

On opère un développement limité en le limitant à l'ordre où l'entropie créée est non nulle :

$$S_c = mc \left(\varepsilon - \frac{\varepsilon^2}{2} - 1 + 1 - \varepsilon + \varepsilon^2 \right)$$

$$S_c = mc \frac{\varepsilon^2}{2}$$

L'entropie créée est positive et cela quelque soit le signe de ε .

Conclusion.

On peut remarquer que l'entropie créée est nulle à l'ordre 1. Cela indique que lorsque les températures du système et de l'extérieur sont très proches, les échanges d'énergie par chaleur tendent alors vers la réversibilité.

Dans le cas où la différence de température entre le système et l'extérieur est importante on peut imaginer qu'en fragmentant la transformation, c'est-à-dire qu'en disposant d'une collection de thermostat dont la température varie de façon continue de T_o à T_e , on a alors $S_c = 0$.

En réalité, s'il y avait un équilibre « parfait » entre le système et le monde extérieur il ne pourrait se développer une transformation. Pour qu'il existe une transformation il faut au moins la présence d'un très léger déséquilibre entre le système et l'extérieur. On se place ici dans le cas où ce déséquilibre est suffisamment faible pour être négligeable.

5. Optimisation d'un compresseur.

1) Entropie créée.

On étudie le système constitué du gaz, du piston et du corps de pompe.

La variation d'entropie de ce système s'écrit :

$$\Delta S = S_e + S_c$$

L'entropie d'échange S_e s'écrit dans le cas de cette transformation monotherme :

$$S_e = \int \frac{\delta Q}{T_{ext}} = \frac{Q}{T_1}$$

Comme les états extrêmes de température du système sont les mêmes on a :

$$\Delta U = W + Q = 0$$

$$Q = -W$$

$$S_e = -\frac{W}{T_1}$$

Pour déterminer la variation d'entropie, on part de l'identité thermodynamique et de l'équation d'état du gaz parfait :

$$dS = \frac{dU}{T} + \frac{p}{T} dV = C_v \frac{dT}{T} + nR \frac{dV}{V}$$

$$\text{or } dT = 0 \rightarrow dS = nR \frac{dV}{V}$$

$$\Delta S = nR \ln \frac{V_2}{V_1} = nR \ln \frac{p_1}{p_2}$$

On obtient le bilan entropique suivant :

$$\Delta S = nR \ln \frac{p_1}{p_2} = -\frac{W}{T_1} + S_c$$

$$S_c = nR \ln \frac{p_1}{p_2} + \frac{W}{T_1}$$

Le travail effectué lors de cette transformation est :

$$W = nRT_1 \ln \frac{p_2}{p_1} + T_1 S_c$$

L'entropie créée S_c ne peut être que positive ou nulle. Le travail minimal à fournir correspond à $S_c = 0$ valeur caractéristique d'une transformation réversible.

$$W_{\min} = nRT_1 \ln \frac{p_2}{p_1}$$

Pour obtenir cette il faut réaliser une transformation qui assure la réversibilité des échanges thermiques avec l'extérieur à la température T_1 et une réversibilité mécanique. La transformation souhaitée est alors une *isotherme*.

On calcule le travail sur une telle transformation :

$$W = -\int p_{\text{ext}} dV \underset{\substack{\text{réversibilité} \\ \text{mécanique}}}{=} -\int p_{\text{gaz}} dV$$

$$\text{or } p_{\text{gaz}} V = nRT_1$$

$$W = -\int nRT_1 \frac{dV}{V} = -nRT_1 \ln \frac{V_2}{V_1}$$

$$W = nRT_1 \ln \frac{p_2}{p_1} = W_{\min}$$

2) Travail W_1 . Comparaison.

Sur l'adiabatique réversible : $Q_{AB} = 0$

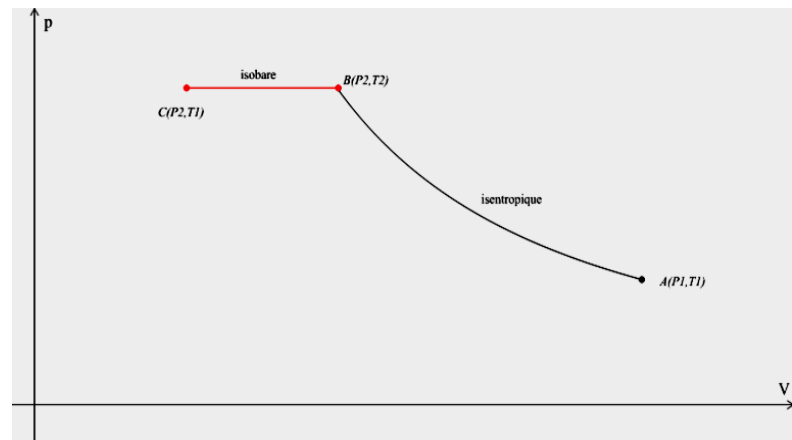
Sur l'isobare : $Q_{BC} = \Delta H_{BC} = C_P (T_1 - T_2)$

Sur l'ensemble de la transformation :

$\Delta U = W_1 + Q = W_1 + \Delta H_{BC} = C_V \Delta T$ or $\Delta T = 0$ d'où :

$$W_1 = -\Delta H_{BC} = -C_P (T_1 - T_2)$$

Pour déterminer T_2 , on utilise le fait que la transformation AB soit une isentropique d'un gaz parfait de coefficient γ constant et que la loi de Laplace est alors applicable :



$$p_1^{1-\gamma} T_1^\gamma = p_2^{1-\gamma} T_2^\gamma \rightarrow T_2 = T_1 \left(\frac{p_2}{p_1} \right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}$$

$$W_1 = C_p T_1 \left(\left(\frac{p_2}{p_1} \right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} - 1 \right)$$

$$W_1 = nR \frac{\gamma}{\gamma-1} T_1 \left(\left(\frac{p_2}{p_1} \right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} - 1 \right)$$

$$\frac{W_1}{W_{\min}} = \frac{\frac{\gamma}{\gamma-1} \left(\left(\frac{p_2}{p_1} \right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} - 1 \right)}{\ln \frac{p_2}{p_1}}$$

$$\frac{W_1}{W_{\min}} = 1,27$$

TD du Chapitre 4 : Machines Thermiques.

1. Pompe à chaleur.

On considère une pompe à chaleur fonctionnant par cycles réversibles courts et servant à chauffer un volume $V = 1000$ L d'eau dont la température initiale est $T_{1i} = 280$ K. La source froide est constituée par l'atmosphère de température $T_2 = 280$ K.

- 1) Quel est le travail reçu par la pompe lorsque $T_{1f} = 320$ K ?
- 2) Quelle est l'efficacité e de cette pompe ?

La capacité calorifique de l'eau est $c = 4,18$ kJ/(K.kg).

2. Cycle d'un moteur Diesel.

Une mole de gaz parfait subit les transformations réversibles suivantes:

- 1 \rightarrow 2 Compression adiabatique.
- 2 \rightarrow 3 Dilatation à pression constante.
- 3 \rightarrow 4 Détente adiabatique.
- 4 \rightarrow 1 Refroidissement à volume constant.

Chaque état est défini par la pression P_i , la température T_i et le volume V_i (i variant de 1 à 4).

On appelle γ le rapport des chaleurs molaires.

On définit : $a = \frac{V_1}{V_2}$; $b = \frac{V_4}{V_3}$. On note R la constante des gaz parfaits.

1. Représenter le cycle sur un diagramme de Clapeyron.
Donner les expressions de la pression en fonction de P_1 et de la température en fonction de T_1 pour les états 2,3 et 4 et aussi en fonction de a , b et γ .
2. Calculer les travaux et les chaleurs échangés pour toutes les transformations subies en fonction de n , R , T_1 , a , b et γ .
Préciser le sens des échanges.
3. Proposer une expression pour le rendement d'un moteur fonctionnant suivant ce cycle fonction des travaux et chaleur échangés.
Donner l'expression de ce rendement en fonction de γ , a et b .

3. Rendement d'une machine thermique.

Une mole de gaz parfait suit le cycle $ABCD$:
 BC et DA sont isochores ;
 CD et AB isentropiques.

On donne : $R = 8,31$ J/(K.mol) ; $P_A = 1$ bar ; $\gamma = 1,4$; $T_A = 300$ K ; $a = 8 = V_A/V_B$; $Q_0 = 25$ kJ la chaleur reçue par le gaz entre B et C .

1. Calculer pression, température et volume en chaque point en fonction de P_A , T_A , a , Q_0 , R et γ
2. Calculer le travail reçu par le gaz.
3. Calculer le rendement du système.

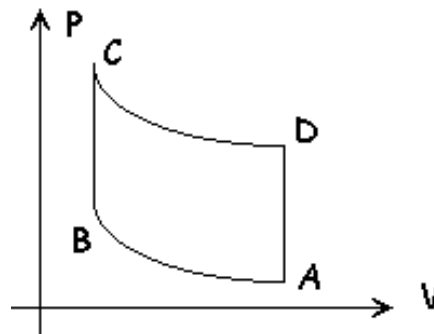
4. Cycle de Beau de Rochas.

Le cycle du moteur à explosion est composé d'une compression isentropique AB , d'un chauffage isochore BC , d'une détente isentropique CD et d'un refroidissement isochore DA . Il y a aussi l'admission à pression atmosphérique P_A de V_B à V_A .

Exprimer le rendement en fonction du taux de compression $a = V_A/V_B$ et de γ du gaz supposé parfait.

5. Cycle de Stirling.

Le cycle $ABCD$ décrit par un gaz parfait de coefficient γ est constitué de deux isothermes et de deux isochores et est décrit dans le sens horaire.



- 1) Pour chacune des quatre transformations, déterminer les variations d'énergie interne et d'entropie ainsi que les travaux et transferts thermiques reçus par le gaz en fonction de P_A , V_A , T_A , V_B , T_C et γ .
- 2) Comment pourrait-on définir le rendement d'un tel cycle ?

6. Cycle de Joule

Une masse $m = 1$ kg d'air décrit le cycle thermodynamique suivant :

Etat A : $T_0 = 300$ K, $P_0 = 1,0 \cdot 10^5$ Pa ;

Etat B : T_1 , $P_1 = kP_0$

Etat C : $T_2 = 1000\text{K}$, P_1

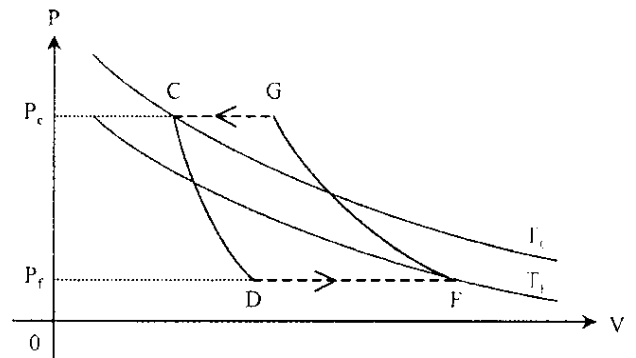
Etat D : T_3 , P_o

Transformations AB et CD : adiabatiques réversibles ;

Transformations BC et DA : isobares.

L'air est assimilé à un gaz parfait, de capacité calorifique à pression constante C_p et de rapport $\gamma = 1,40$.

Constante des gaz parfaits : $R = 8,31 \text{ S.I}$



1. Calculer les valeurs des températures T_1 et T_3 pour $k = 10$.

Donner l'allure du cycle en diagramme de Clapeyron (P en fonction de V).

2. Faire le bilan énergétique du cycle :

□ quantités d'énergie thermique échangées ;

□ travail total : est-il reçu ou fourni ?

De quel type de machine s'agit-il ?

Définir et calculer son rendement (ou efficacité).

3. Les échanges thermiques du fluide ont lieu uniquement avec deux sources :

– une source chaude à T_2 ;

– une source froide à T_o .

Le cycle étudié est-il réversible ? Expliquer pourquoi il l'est ou ne l'est pas.

Que peut-on calculer pour le vérifier numériquement ?

4. Calculer les variations d'entropie de l'air pour les différentes transformations.

Quelles relations doivent vérifier ces différentes quantités ?

5. Le cycle étant décrit dans le sens correspondant à un moteur, et les températures des sources restant inchangées, exprimer le travail total récupéré en fonction de C_p, T_o, T_2, k et γ .

Quelle valeur doit-on donner à k pour obtenir le travail maximal ?

7. Etude d'une machine frigorifique.

Un réfrigérateur permet de maintenir la température d'une enceinte à $T_f = 263 \text{ K}$ lorsque l'atmosphère extérieure est à la température $T_c = 298 \text{ K}$. La machine utilise $n = 5$ moles d'un gaz parfait diatomique, de coefficient $\gamma = 1,4$ auquel elle impose le cycle I décrit ci-dessous.

- $F \rightarrow G$: compression adiabatique réversible ;
- $G \rightarrow C$: évolution isobare au contact de la source chaude ;
- $C \rightarrow D$: détente isentropique ;
- $D \rightarrow F$: évolution isobare au contact de la source froide.

On note $\tau = \frac{P_C}{P_F}$ le taux de compression.

1. Exprimer la température du point du cycle dont la température est la plus faible à partir de T_C , du taux de compression τ et du coefficient γ . Exprimer de même T_G . Faire les applications numériques dans le cas où $\tau = 2$.
2. Déterminer l'expression des différents transferts thermiques réalisés au cours du cycle. Calculer numériquement ces transferts dans le cas où $\tau = 2$ et commenter les résultats.
3. Déterminer le travail nécessaire à la réalisation d'un cycle.
4. Définir l'efficacité e du cycle et en déterminer l'expression. Calculer numériquement e et commenter la valeur obtenue.
5. Quel serait le rendement d'une machine optimale dans les conditions de l'étude ? Pourquoi le rendement de ce réfrigérateur est-il différent ?

Donnée: constante des gaz parfaits $R = 8,32 \text{ J.K}^{-1} \cdot \text{mol}^{-1}$.

8. Climatiseur.

Un climatiseur est une machine thermique ditherme. Elle décrit des cycles à partir de deux « sources » thermiques constituées d'une part par l'air extérieur de température invariable $T_{ex} = 298 \text{ K}$ et d'autre part par une pièce de température initiale T_i ($T_i = T_{ex}$) que l'on désire porter à la température $T_f = 293 \text{ K}$.

1. Donner le principe de fonctionnement d'un climatiseur. Préciser le signe des échanges énergétiques.

- Déterminer le travail électrique W_r nécessaire à la machine dans le cas où son fonctionnement est réversible. On supposera que la pièce, dont on évalue la capacité thermique à $C = 5,0 \cdot 10^3 \text{ kJ.K}^{-1}$, n'échange de l'énergie thermique qu'avec la machine. Quel est le temps nécessaire à la mise en température de cette pièce pour une puissance électrique de 250 W ?
- Dans le cas où la machine est irréversible, établir une relation entre la création d'entropie S_c et la différence $W_{irr} - W_r$ où W_{irr} est la nouvelle valeur du travail fourni à la machine.

9. Moteur Diesel.

On adopte le modèle de moteur Diesel suivant : une même quantité d'un gaz parfait de coefficient isentropique $\gamma = 1,40$ décrit de manière quasistatique et en équilibre mécanique avec l'extérieur un cycle $ABCD$: Les évolutions AB et CD sont adiabatiques réversibles; l'évolution BC modélise la phase de combustion provoquée par l'inflammation spontanée du mélange par une évolution isobare au cours de laquelle le gaz reçoit un transfert thermique Q_c en provenance d'une source chaude fictive ; l'évolution DA est modélisée par une évolution isochore au contact de l'atmosphère jouant le rôle de source froide.

On donne $R = 8,314 \text{ J.K}^{-1} \cdot \text{mol}^{-1}$.

Le tableau ci-dessous résume les données concernant les différents états du gaz.

	A	B	C	D
p en bar	1,00			
T en K	323	954		
V en L	2,40		0,24	2,40

- Compléter le tableau, en déterminant les volumes, températures et pressions des états A , B , C et D .
- Tracer l'allure du cycle décrit par le gaz dans un diagramme de Clapeyron. On ne recherchera pas à respecter une échelle précise.
- Calculer le nombre n de moles de gaz qui évolue.
- Calculer les capacités thermiques à volume constant et à pression constante.
- Calculer les travaux et les transferts thermiques reçus par le gaz au cours de chacune des évolutions AB , BC , CD et DA .
- Définir l'efficacité thermodynamique e du moteur Diesel, la calculer et la comparer à l'efficacité d'un moteur de Carnot fonctionnant entre deux sources de température égales à T_A et T_C . Quelles conclusions pouvez-vous tirer sur les transferts thermiques et pourquoi ?

10. Diagramme de Raveau.

Une machine thermique ditherme échange au cours d'un cycle un travail W avec l'extérieur et les quantités de chaleur Q_1 (avec une source chaude à T_1) et Q_2 (avec une source froide à T_2)

- Dans un système d'axes Q_2 en abscisse et Q_1 en ordonnée, délimiter le demi-plan correspond aux cycles possibles.
- Quel est le lieu des points qui correspond aux cycles réversibles ?
- Quel est le lieu des points correspondant à un cycle au cours duquel le travail échangé est nul ?
- Les axes et les droites des questions 1 et 2 partagent la région des cycles possibles en quatre domaines. Indiquer les deux domaines correspondant l'un aux moteurs, l'autre aux pompes à chaleur et réfrigérateur.

11. Moteur utilisant des pseudo-sources.

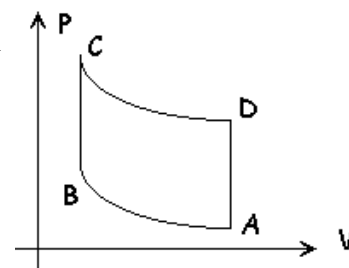
On considère deux corps solides que l'on assimile à des phases condensées idéales de même capacité thermique $c = 1,0 \cdot 10^3 \text{ J/K}$. Ces corps sont initialement à deux températures distinctes :

$T_{i1} = 300 \text{ K}$ et $T_{i2} = 400 \text{ K}$.

- Déterminer la température finale T_f de ces deux corps si on les laisse évoluer librement au contact l'un de l'autre. Déterminer la création d'entropie pour ces corps lors de cette évolution.
- On considère maintenant un moteur thermique qui utilise ces deux corps comme sources de chaleur pour produire du travail. Ce moteur thermique effectue des cycles réversibles infinitésimaux entre ces deux sources de chaleur. Déterminer la température finale T_f' et le travail W qui est récupéré par le milieu extérieur.

12. Variations d'énergie interne et d'entropie sur un cycle.

Le cycle $ABCD$ décrit par un gaz parfait de coefficient γ est constitué de deux isothermes et de deux isochores et est décrit dans sens horaire.

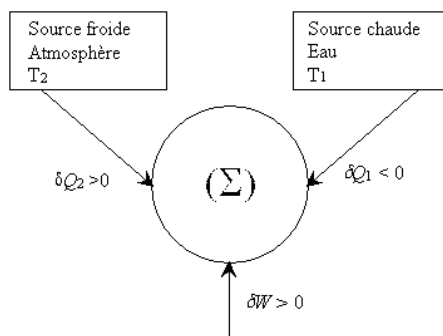


- Pour chacune des quatre transformations, déterminer les variations d'énergie interne et d'entropie ainsi que les travaux et transferts thermiques reçus par le gaz en fonction de P_A , V_A , T_A , V_B , T_C et γ .
- Comment pourrait-on définir le rendement d'un tel cycle ?

1. Pompe à chaleur.

1) Travail reçu.

Soit (Σ) la pompe à chaleur. Le schéma de principe des échanges énergétiques est :



Sur un cycle élémentaire réversible :

$$dU = 0 = \delta W + \delta Q_1 + \delta Q_2$$

$$dS = 0 = \frac{\delta Q_1}{T_1} + \frac{\delta Q_2}{T_2}$$

$$\text{Or : } \delta Q_1 = -mcdT_1 \rightarrow \delta Q_2 = -T_2 \frac{\delta Q_1}{T_1} = mcT_2 \frac{dT_1}{T_1}$$

On obtient alors pour l'expression du travail élémentaire :

$$\delta W = -\delta Q_1 - \delta Q_2 = mcdT_1 - mcT_2 \frac{dT_1}{T_1}$$

$$W = mc \left((T_{1f} - T_{1i}) - T_2 \ln \frac{T_{1f}}{T_{1i}} \right)$$

$$W = 1,1 \cdot 10^7 \text{ J}$$

2) Efficacité.

Par définition l'efficacité est :

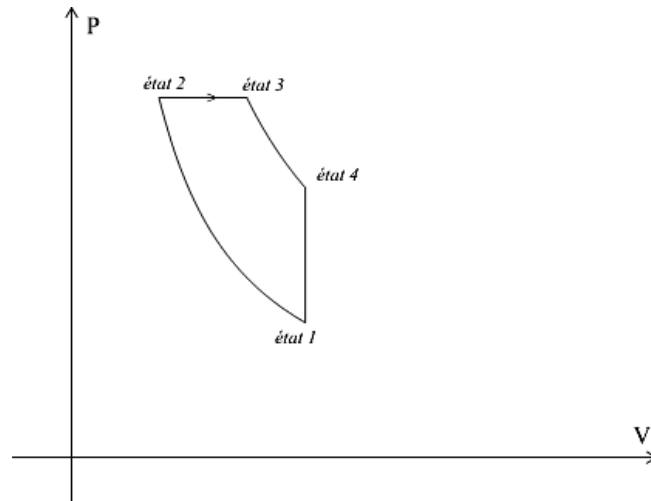
$$e = -\frac{Q_1}{W} = \frac{(T_{1f} - T_{1i})}{\left((T_{1f} - T_{1i}) - T_2 \ln \frac{T_{1f}}{T_{1i}} \right)}$$

$$e = 15,3$$

2. Cycle d'un moteur Diesel

1. Cycle et caractéristiques.

Le cycle est moteur, il est alors parcouru dans le sens horaire :



□ La transformation 1 → 2 est une adiabatique réversible d'un gaz parfait de coefficient γ constant. La loi de Laplace est applicable sur cette transformation :

$$P_1 V_1^\gamma = P_2 V_2^\gamma \text{ comme } V_2 = \frac{V_1}{a} \text{ on obtient :}$$

$$P_1 V_1^\gamma = P_2 \left(\frac{V_1}{a} \right)^\gamma$$

$$P_2 = a^\gamma P_1$$

L'équation d'état des gaz parfaits permet d'écrire que :

$$\frac{P_1 V_1}{T_1} = \frac{P_2 V_2}{T_2} = P_2 \frac{V_1}{a} \frac{1}{T_2} = a^\gamma P_1 \frac{V_1}{a} \frac{1}{T_2}$$

$$T_2 = a^{\gamma-1} T_1$$

□ La transformation 2 → 3 est une détente isobare :

$$P_3 = P_2 = a^\gamma P_1$$

D'autre part : $\frac{V_3}{V_1} = \frac{1}{b}$ car $\frac{V_4}{V_3} = \frac{V_1}{V_3}$

L'équation d'état des gaz parfaits permet d'écrire que :

$$\frac{P_3 V_3}{T_3} = \frac{P_2 V_2}{T_2} \text{ or } P_3 = P_2 \Rightarrow \frac{V_3}{T_3} = \frac{V_2}{T_2} = \frac{V_1}{a} \frac{1}{T_2} \Rightarrow \frac{V_3}{V_1} = \frac{T_3}{a} \frac{1}{T_2} = \frac{1}{b}$$

$$T_3 = \frac{a^\gamma}{b} T_1$$

□ La transformation 3 → 4 est une adiabatique réversible d'un gaz parfait de coefficient γ constant. La loi de Laplace est applicable sur cette transformation :

$$P_4 V_4^\gamma = P_3 V_3^\gamma \text{ comme } V_4 = V_1 \text{ on obtient :}$$

$$P_4 V_1^\gamma = P_3 V_3^\gamma = a^\gamma P_1 \left(\frac{V_1}{b} \right)^\gamma$$

$$P_4 = \left(\frac{a}{b} \right)^\gamma P_1$$

L'équation d'état des gaz parfaits permet d'écrire que :

$$\frac{P_3 V_3}{T_3} = \frac{P_4 V_1}{T_4} \Rightarrow T_4 = \frac{P_4 V_1}{P_3 V_3} T_3 = \left(\frac{a}{b}\right)^\gamma \frac{P_1}{a^\gamma P_1} b \frac{a^\gamma}{b} T_1$$

$$T_4 = \left(\frac{a}{b}\right)^\gamma T_1$$

2. Bilans énergétiques.

□ Pour la transformation 1 → 2 qui est une adiabatique :

$$Q_{12} = 0$$

$$W_{12} = \Delta U_{12} = \frac{nR}{\gamma-1} (T_2 - T_1) = \frac{nR}{\gamma-1} (a^{\gamma-1} - 1) T_1$$

Comme $a > 1$ et $\gamma > 1$ on a $a^{\gamma-1} > 1$ et donc $W_{12} > 0$

□ Pour la transformation 2 → 3 qui est une isobare à la pression P_2 :

$$Q_{23} = \Delta H_{23} = C_{p,m} \Delta T = \frac{n\gamma R}{\gamma-1} (T_3 - T_2) = \frac{n\gamma R}{\gamma-1} \left(\frac{a^\gamma}{b} - a^{\gamma-1}\right) T_1 = \frac{n\gamma R}{\gamma-1} a^{\gamma-1} \left(\frac{a}{b} - 1\right) T_1$$

Comme $\frac{a}{b} = \frac{V_3}{V_2} > 1$ on a $Q_{23} > 0$

$$W_{23} = -P_2 (V_3 - V_2) = -P_2 \left(\frac{V_1}{b} - \frac{V_1}{a}\right) = -a^\gamma P_1 V_1 \left(\frac{1}{b} - \frac{1}{a}\right) < 0$$

$$W_{23} = -a^\gamma nR \left(\frac{1}{b} - \frac{1}{a}\right) T_1 < 0$$

□ Pour la transformation 3 → 4 qui est une adiabatique :

$$Q_{34} = 0$$

$$W_{34} = \Delta U_{34} = \frac{nR}{\gamma-1} (T_4 - T_3) = \frac{nR}{\gamma-1} \left(\left(\frac{a}{b}\right)^\gamma - \frac{a^\gamma}{b}\right) T_1 = \frac{nR}{\gamma-1} \frac{a^\gamma}{b} (b^{1-\gamma} - 1) T_1$$

Comme $b > 1$ et $\gamma > 1$ on a $b^{1-\gamma} < 1$ et donc $W_{34} < 0$

□ Pour la transformation 4 → 1 qui est une isochore :

$$W_{41} = 0$$

$$Q_{41} = \Delta U_{41} = \frac{nR}{\gamma-1} (T_1 - T_4) = \frac{nR}{\gamma-1} \left(1 - \left(\frac{a}{b}\right)^\gamma\right) T_1$$

Comme $\frac{a}{b} = \frac{V_3}{V_2} > 1$ et $\gamma > 1$ on a $\left(\frac{a}{b}\right)^\gamma > 1$ et donc $Q_{41} < 0$

3. Rendement.

$$\text{Pour un moteur } \eta = \frac{\text{grandeur valorisable}}{\text{grandeur coûteuse}} = -\frac{W}{Q_{23}}$$

Sur un cycle $W + Q_{23} + Q_{41} = 0 \Rightarrow Q_{23} + Q_{41} = -W$ d'où :

$$\eta = 1 + \frac{Q_{41}}{Q_{23}} = 1 + \frac{\frac{nR}{\gamma-1} \left(1 - \left(\frac{a}{b}\right)^\gamma\right) T_1}{\frac{\gamma nR}{\gamma-1} a^{\gamma-1} \left(\frac{a}{b} - 1\right) T_1} = 1 + \frac{1}{\gamma} \frac{\left(1 - \left(\frac{a}{b}\right)^\gamma\right)}{a^{\gamma-1} \left(\frac{a}{b} - 1\right)}$$

On multiplie par b^γ les deux membres du rapport :

$$\eta = 1 - \frac{1}{\gamma} \frac{(a^\gamma - b^\gamma)}{a^{\gamma-1} \left(\frac{a}{b} - 1\right) b^\gamma}$$

$$\eta = 1 - \frac{1}{\gamma} \frac{(a^\gamma - b^\gamma)}{(ab)^{\gamma-1} (a-b)}$$

3. Rendement d'une machine thermique.

1) Pression, température et volume.

Tableau récapitulatif:

	P en bar	T en K	V en L
A	1	300	25
B	18,4	690	3,1
C	50,5	1900	3,1
D	2,75	824	25

En A :

$$V_A = \frac{nRT_A}{P_A}$$

On applique l'équation d'état du gaz parfait

En B :

AB est une transformation isentropique d'un gaz parfait de γ indépendant de la température : on applique les lois de Laplace.

$$P_B = P_A a^\gamma \text{ et } T_B = T_A a^{\gamma-1}$$

$$V_B = \frac{nRT_A}{aP_A}$$

En C :

BC est une transformation isochore:

$$V_C = V_B = \frac{nRT_A}{aP_A}$$

$$\Delta U = W + Q_0 = Q_0 \Rightarrow \frac{nR}{\gamma-1} (T_C - T_B) = Q_0 \text{ ce qui donne :}$$

$$T_C = \frac{\gamma-1}{nR} Q_0 + T_A a^{\gamma-1}$$

On applique l'équation d'état du gaz parfait :

$$P_C = P_A \left(\frac{(\gamma-1)Q_0 a}{nRT_A} + a^\gamma \right)$$

En D:

DA est une transformation isochore:

$$V_D = V_A$$

CD est une transformation isentropique, on utilise les relations de Laplace:

$$P_D = \frac{P_A}{a^r} \left(\frac{(\gamma-1)Q_0 a}{nRT_A} + a^r \right) \text{ et } T_D = \frac{(\gamma-1)Q_0 a}{nR a^{r-1}} + T_A$$

2) Travail reçu par le système.

Sur un cycle :

$$\Delta U = 0 = W + Q_0 + Q_{DA}$$

Or sur la transformation DA :

$$\Delta U = \frac{nR}{\gamma-1} (T_A - T_D) = Q_{DA}$$

$$W = -Q_0 \left(1 - \frac{1}{a^{r-1}} \right)$$

3) Rendement.

$$r = \frac{|W|}{|Q_0|} = 0,56$$

4. Cycle de Beau de Rochas.

Le rendement du moteur est défini par $r = -W/Q_c$ où W représente le travail échangé par la machine avec l'extérieur et Q_c le transfert thermique reçu de la source chaude fictive pendant l'évolution BC.

Le cycle du moteur à explosion est composé :

d'une compression isentropique AB, d'un chauffage isochore BC, d'une détente isentropique CD et d'un refroidissement isochore DA. Il y a aussi l'admission à pression atmosphérique PA de VB à VA.

L'application du premier principe au système fermé constitué du gaz décrivant l'évolution ABCDA permet d'exprimer le rendement sous la forme :

$$r = 1 + \frac{Q_f}{Q_c}$$

Il faut alors exprimer les transferts thermiques.

Sur les évolutions isochores BC et DA, le travail échangé est nul alors:

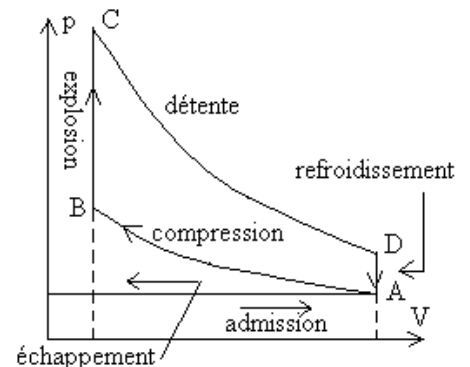
$$U_C - U_B = \frac{nR}{\gamma-1} (T_C - T_B) = Q_c$$

$$U_A - U_D = \frac{nR}{\gamma-1} (T_A - T_D) = Q_f$$

Le rendement r s'exprime en fonction des températures :

$$r = 1 - \frac{(T_D - T_A)}{(T_C - T_B)}$$

Comme les évolutions AB et CD sont isentropiques, on a:



$$T_A V_A^{\gamma-1} = T_B V_B^{\gamma-1}$$

$$T_C V_C^{\gamma-1} = T_D V_D^{\gamma-1}$$

En faisant apparaître le taux de compression α :

$$T_B = T_A \alpha^{\gamma-1}$$

$$T_C = T_D \alpha^{\gamma-1}$$

En remplaçant ces expressions dans celle de r , on obtient finalement:

$$r = 1 - \alpha^{(1-\gamma)}$$

5. Cycle de Stirling.

1. Nature des évolutions.

Les différentes évolutions envisagées sont quasi-statiques et on peut de plus poser que la pression du gaz est définie à chaque instant du cycle : ces deux hypothèses assurent la réversibilité mécanique.

Remarque : une transformation pendant laquelle un système passe par une succession d'états d'équilibre et que l'on qualifie souvent de quasi-statique n'est pas nécessairement mécaniquement réversible, on peut citer comme exemple la détente de Joule Gay-Lussac où la pression du gaz est définie à chaque instant mais qui n'est pas mécaniquement réversible car la pression extérieure est nulle et donc différente de celle du gaz.

La réversibilité thermique nécessite l'égalité des températures du gaz et de l'extérieur, cette condition est réalisée le long des isothermes AB et CD . Par contre, cette condition ne se trouve pas réalisée sur les isochores BC et DA .

Sur la transformation isochore BC , le gaz à la température T_f est mis au contact de la source à la température T_c pour lui faire acquérir cette température. Sur la transformation DA c'est le contraire qui est réalisé.

Sur ces transformations, il n'y a donc pas réversibilité thermique, elles sont donc quasi-statiques irréversibles.

2. Représentation du cycle.

Comme la pression du gaz est définie à chaque stade du cycle, la représentation du cycle dans un diagramme (p, V) est de la forme :

3. Chaleur échangée sur les différentes étapes du cycle.

- Sur les isothermes d'un gaz parfait il n'y a pas variation de son énergie interne, on a alors :

$$\Delta U = 0 = Q + W = Q - \int p_{ext} dV \underset{\substack{\text{mécaniquement} \\ \text{réversible}}}{=} Q - \int p dV$$

$$Q_{\text{gaz parfait}} = \int nRT \frac{dV}{V} \underset{\text{isotherme}}{=} nRT \int \frac{dV}{V} = nRT \ln \frac{V_{final}}{V_{initial}}$$

$$\text{Sur } AB : Q_{AB} = nRT_f \ln \frac{V_1}{V_2} = -nRT_f \ln \alpha < 0$$

$$\text{Sur } CD : Q_{CD} = nRT_c \ln \frac{V_1}{V_2} = nRT_c \ln \alpha > 0$$

- Sur les isochores le travail des forces de pression est nul et la chaleur échangée par le gaz s'identifie alors à sa variation d'énergie interne :

$$\Delta U = C_V \Delta T = Q$$

$$\text{Sur } BC : Q_{BC} = C_V (T_c - T_f) = \frac{nR}{\gamma - 1} (T_c - T_f) > 0$$

$$\text{Sur } DA : Q_{DA} = C_V (T_f - T_c) = \frac{nR}{\gamma - 1} (T_f - T_c) = -Q_{BC} < 0$$

4. Rendement du cycle.

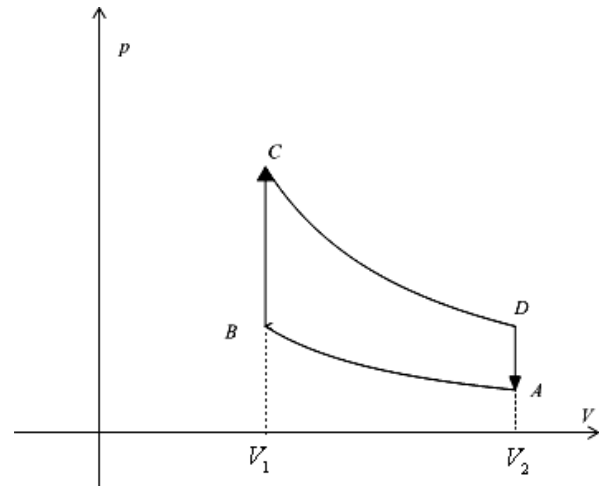
Le cycle de Stirling est parcouru dans le sens horaire et correspond alors à un moteur. Le rendement est alors égal au rapport du travail fourni sur un cycle par le dispositif sur la chaleur reçue de la part de la source chaude.

$$r = -\frac{W_{\text{cycle}}}{Q_{BC} + Q_{CD}} = \frac{Q_{\text{cycle}}}{Q_{BC} + Q_{CD}} = \frac{Q_{AB} + Q_{BC} + Q_{CD} + Q_{DA}}{Q_{BC} + Q_{CD}} = \frac{Q_{AB} + Q_{CD}}{Q_{BC} + Q_{CD}}$$

$$r = \frac{-nRT_f \ln \alpha + nRT_c \ln \alpha}{\frac{nR}{\gamma - 1} (T_c - T_f) + nRT_c \ln \alpha} = \frac{(\gamma - 1)(T_c - T_f) \ln \alpha}{(T_c - T_f) + (\gamma - 1)T_c \ln \alpha}$$

$$r = 0,22$$

5. Nouveau rendement.



La présence du régénérateur élimine les échanges d'énergie par chaleur avec l'extérieur lors des transformations BC et DA . Ces transformations deviennent pour un observateur extérieur des évolutions mécaniquement réversibles et adiabatiques. Dans ces conditions, le rendement s'écrit :

$$r' = \frac{Q_{AB} + Q_{CD}}{Q_{CD}} = 1 + \frac{Q_{AB}}{Q_{CD}}$$

$$r' = 1 - \frac{T_f}{T_C}$$

$$r' = 0,33$$

6. Commentaires.

Ce nouveau rendement est celui d'un moteur de Carnot qui est le rendement maximal possible pour un moteur. Cela est possible par l'utilisation du régénérateur qui permet d'éliminer du cycle les deux étapes irréversibles. En pratique, il n'est pas possible de réaliser un tel régénérateur, mais de nombreuses recherches sont actuellement en cours pour tenter de s'en approcher.

6. Cycle de Joule.

1. Températures.

Une transformation adiabatique, réversible d'un gaz parfait de coefficient γ constant vérifie la loi de Laplace :

$$p^{1-\gamma} T^\gamma = cte$$

On peut donc écrire pour les transformations AB et CD :

$$p_o^{1-\gamma} T_o^\gamma = p_1^{1-\gamma} T_1^\gamma \rightarrow T_1 = T_o \left(\frac{p_o}{p_1} \right)^{\frac{1-\gamma}{\gamma}} = T_o \left(\frac{1}{k} \right)^{\frac{1-\gamma}{\gamma}} = T_o k^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}$$

$$T_1 = 579 \text{ K}$$

De même :

$$p_1^{1-\gamma} T_2^\gamma = p_o^{1-\gamma} T_3^\gamma \rightarrow T_3 = T_2 \left(\frac{p_1}{p_o} \right)^{\frac{1-\gamma}{\gamma}} = T_2 k^{\frac{1-\gamma}{\gamma}}$$

$$T_3 = 518 \text{ K}$$

2. Bilan énergétique.

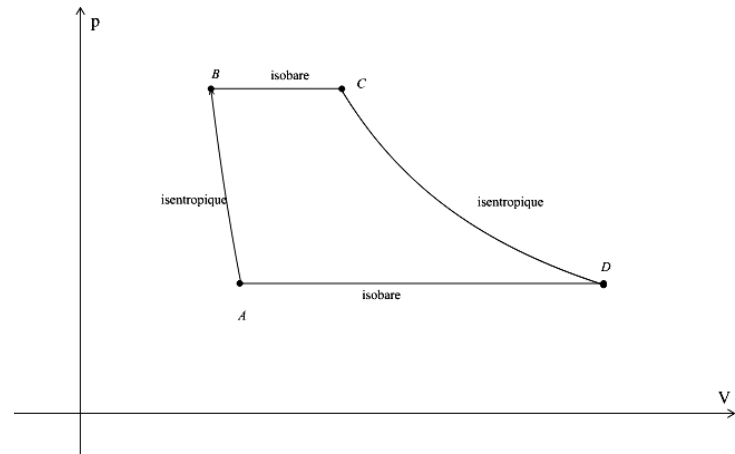
Pour les transformations adiabatiques AB et CD on a :

$$Q_{AB} = Q_{CD} = 0$$

Sur une transformation isobare on a $Q = \Delta H = C_p \Delta T$ d'où :

$$Q_{BC} = C_p (T_2 - T_1) = \frac{m}{M} \frac{R\gamma}{\gamma-1} \left(T_2 - T_o k^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} \right) \quad Q_{BC} > 0$$

$$Q_{DA} = C_p (T_o - T_3) = \frac{m}{M} \frac{R\gamma}{\gamma-1} \left(T_o - T_2 k^{\frac{1-\gamma}{\gamma}} \right) \quad Q_{DA} < 0$$



Le gaz décrivant un cycle, on a alors :

$$\Delta U = 0 = W + Q$$

$$W = -Q = -(Q_{BC} + Q_{DA}) = C_P (T_1 + T_3 - T_2 - T_o)$$

$$W = \frac{m}{M} \frac{R\gamma}{\gamma-1} \left(T_o \left(k^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} - 1 \right) - T_2 \left(k^{\frac{1-\gamma}{\gamma}} - 1 \right) \right) \quad W = -2,0 \cdot 10^5 \text{ J}$$

Le cycle est parcouru dans le sens horaire. L'aire de ce cycle est positive et correspond donc à $|W|$ car

$W = - \int_{\text{cycle}} p_{\text{ext}} dV$. Le travail total est donc négatif et fourni à l'extérieur. Le cycle étudié est moteur

dont le rendement est défini par :

$$\eta = \frac{\text{grandeur utile}}{\text{grandeur couteuse}} = - \frac{W}{Q_{BC}}$$

$$\eta = \frac{Q_{BC} + Q_{DA}}{Q_{BC}} = 1 + \frac{Q_{DA}}{Q_{BC}} = 1 - \frac{T_3 - T_o}{T_2 - T_1} = 1 - \frac{T_2 k^{\frac{1-\gamma}{\gamma}} - T_o}{T_2 - T_o k^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}} = 1 - \frac{k^{\frac{1-\gamma}{\gamma}} \left(T_2 - \frac{T_o}{k^{\frac{1-\gamma}{\gamma}}} \right)}{T_2 - T_o k^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}}$$

$$\eta = 1 - \frac{k^{\frac{1-\gamma}{\gamma}} \left(T_2 - T_o k^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} \right)}{T_2 - T_o k^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}}$$

$$\boxed{\eta = 1 - k^{\frac{1-\gamma}{\gamma}}} \quad \eta = 0,48$$

3. Cycle réversible ?

Le cycle étudié n'est pas réversible car les échanges d'énergie par chaleur lors du contact avec les sources ne se font pas en suivant une transformation isotherme $T_{\text{gaz}} \neq T_{\text{extérieur}}$ aux différents stades des évolutions BC et DA .

Pour montrer cela il faut opérer un bilan entropique et montrer que la création d'entropie sur le cycle est positive.

Le second principe postule que sur un cycle :

$$\Delta S = S_e + S_c = 0$$

$$S_c = -S_e = - \int \frac{\delta Q_{BC}}{T_2} - \int \frac{\delta Q_{DA}}{T_o} = - \frac{Q_{BC}}{T_2} - \frac{Q_{DA}}{T_o}$$

$$S_c = C_P \left(\frac{T_1}{T_2} + \frac{T_3}{T_o} - 2 \right) = \frac{mR\gamma}{M(\gamma-1)} \left(\frac{T_1}{T_2} + \frac{T_3}{T_o} - 2 \right)$$

$$S_c = 307 \text{ J.kg}^{-1}$$

4. Variations d'entropie de l'air sur les différentes transformations.

Sur les adiabatiques réversibles (isentropiques) la variation d'entropie est nulle.

Pour les transformations isobares, on utilise l'identité thermodynamique :

$$dS = \frac{dU}{T} + \frac{p}{T} dV$$

$$pV = nRT \rightarrow dV = \frac{nR}{p} dT \text{ pour une transformation isobare}$$

$$dS = C_V \frac{dT}{T} + nR \frac{dT}{T} = C_P \frac{dT}{T}$$

On obtient ainsi :

$$\Delta S_{BC} = C_P \ln \frac{T_2}{T_1}, \Delta S_{DA} = C_P \ln \frac{T_o}{T_3}$$

Sur le cycle on a :

$$\Delta S = C_P \ln \frac{T_2}{T_1} + C_P \ln \frac{T_o}{T_3} = C_P \ln \frac{T_2}{T_1} \frac{T_o}{T_3} = 0$$

$$\frac{T_2}{T_1} \frac{T_o}{T_3} = 1$$

5. Travail maximal.

D'après la question 2 :

$$W = C_P (T_1 + T_3 - T_2 - T_o)$$

$$W = C_P \left(T_o \left(k^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} - 1 \right) + T_2 \left(k^{\frac{1-\gamma}{\gamma}} - 1 \right) \right)$$

Le maximum sera obtenu pour $\frac{dW}{dk} = 0$.

$$\frac{dW}{dk} = C_P \left(T_o \frac{\gamma-1}{\gamma} k^{-\frac{1}{\gamma}} + T_2 \frac{1-\gamma}{\gamma} k^{\frac{1-2\gamma}{\gamma}} \right) = \frac{\gamma-1}{\gamma} \left(T_o k^{-\frac{1}{\gamma}} - T_2 k^{\frac{1-2\gamma}{\gamma}} \right) = 0$$

$$T_o k^{-\frac{1}{\gamma}} = T_2 k^{\frac{1-2\gamma}{\gamma}} \rightarrow T_o^\gamma k^{-1} = T_2^\gamma k^{1-2\gamma}$$

$$k = \left(\frac{T_2}{T_o} \right)^{\frac{\gamma}{2(\gamma-1)}}$$

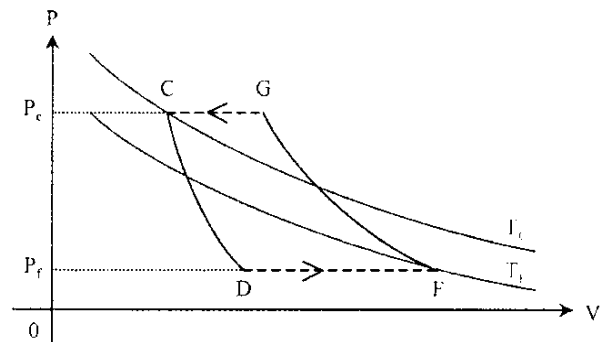
7. Etude d'une machine frigorifique.

1. Températures.

Dans un diagramme de Clapeyron, l'isotherme de plus basse température se situe en bas à gauche.

Le point *D* correspond au point le plus froid atteint lors du cycle décrit.

Ce point étant atteint après une détente isentropique d'un gaz parfait de coefficient *gamma* constant, on peut alors utiliser la loi de Laplace sur la transformation *CD* :



$$P_D^{1-\gamma} T_D^\gamma = P_C^{1-\gamma} T_C^\gamma \rightarrow T_D = \left(\frac{P_C}{P_D} \right)^{\frac{1-\gamma}{\gamma}} T_C$$

$$T_D = \tau^{\frac{1-\gamma}{\gamma}} T_C \quad T_D = 244 \text{ K}$$

Comme la transformation FG est aussi une isentropique, on utilise de nouveau la loi de Laplace :

$$P_G^{1-\gamma} T_G^\gamma = P_F^{1-\gamma} T_F^\gamma \rightarrow T_G = \left(\frac{P_F}{P_G} \right)^{\frac{1-\gamma}{\gamma}} T_F = \left(\frac{1}{\tau} \right)^{\frac{1-\gamma}{\gamma}} T_F$$

$$T_G = \tau^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} T_F \quad T_G = 321 \text{ K}$$

2. Expressions des différents transferts thermiques.

Les étapes CD et FG sont des transformations adiabatiques, les transferts thermiques sont alors nuls.

$$Q_{CD} = Q_{FG} = 0$$

Sur les isobares, l'énergie échangée par chaleur est égale à la variation d'enthalpie du gaz parfait :

$$Q_{DF} = \Delta H_{DF} = C_P (T_F - T_D) = \frac{nR\gamma}{\gamma-1} \left(T_F - \tau^{\frac{1-\gamma}{\gamma}} T_C \right) \quad Q_{DF} = 2,7 \text{ kJ}$$

$$Q_{GC} = \Delta H_{GC} = C_P (T_C - T_G) = \frac{nR\gamma}{\gamma-1} \left(T_C - \tau^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} T_F \right) \quad Q_{GC} = -3,3 \text{ kJ}$$

Au cours de l'étape DF , le gaz reçoit de l'énergie de la part de la source froide (enceinte) ce qui permet de maintenir constante la température de celle-ci. L'enceinte ne devant pas être parfaitement calorifugée en dehors de cet échange thermique avec le gaz de la machine frigorifique, sa température doit légèrement augmenter sur un cycle élémentaire. Le fait de céder de l'énergie au gaz a pour effet de refroidir l'enceinte et donc de maintenir ainsi sa température constante.

Pendant la transformation GC , le gaz évacue par transfert thermique avec la source chaude un excédent d'énergie. Cette source chaude peut être considérée comme un thermostat et ne voit pas ainsi sa température évoluée.

3. Travail reçu.

Sur le cycle :

$$\Delta U = Q_{DF} + Q_{GC} + W = 0$$

$$W = -(Q_{DF} + Q_{GC}) = -\frac{nR\gamma}{\gamma-1} \left(\left(T_F - \tau^{\frac{1-\gamma}{\gamma}} T_C \right) + \left(T_C - \tau^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} T_F \right) \right)$$

$$W = 5,9.10^2 \text{ J}$$

4. Efficacité.

Le transfert thermique utile correspond à la chaleur qui est prélevée à l'enceinte. Le transfert énergétique onéreux correspond au travail électrique fourni à la machine. L'efficacité e de cette machine s'écrit :

$$e = \frac{Q_{DF}}{W}$$

$$e = - \frac{\left(T_F - \tau^{\frac{1-\gamma}{\gamma}} T_C \right)}{\left(T_F - \tau^{\frac{1-\gamma}{\gamma}} T_C \right) + \left(T_C - \tau^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} T_F \right)} = - \frac{1}{1 + \frac{T_C - \tau^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} T_F}{T_F - \tau^{\frac{1-\gamma}{\gamma}} T_C}} = - \frac{1}{1 - \frac{\tau^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} T_F - T_C}{T_F - \tau^{\frac{1-\gamma}{\gamma}} T_C}} =$$

$$e = - \frac{1}{\frac{\gamma-1}{1 - \tau^{\frac{\gamma}{\gamma}}}}$$

$$e = \frac{1}{\tau^{\frac{\gamma}{\gamma}} - 1} \quad e = 4,56$$

5. Efficacité maximale.

L'efficacité maximale est obtenue pour un cycle réversible de Carnot qui ne dépend que de la température des sources.

$$e_{Carnot} = \frac{T_F}{T_C - T_F} \quad e_{Carnot} = 7,5$$

L'efficacité de la machine étudiée est inférieure à l'efficacité de Carnot car les deux étapes isobares quoique mécaniquement réversibles ne sont pas thermiquement réversibles. Seule l'isotherme est une transformation mécaniquement réversible et thermiquement réversible. La non réversibilité thermique réduit ainsi l'efficacité de cette machine frigorifique.

8. Climatiseur.

1. Principe de fonctionnement.

Le climatiseur va échanger de l'énergie par chaleur avec la pièce afin de la refroidir et avec l'air extérieur ce qui nécessite un apport d'énergie électrique. On a donc sur un cycle élémentaire :

la machine reçoit du travail $\delta W > 0$ de la part de l'extérieur, reçoit de l'énergie par chaleur de la pièce (source froide) $\delta Q_f > 0$, cède de l'énergie par chaleur à l'atmosphère (source chaude)

$$\delta Q_c < 0.$$

2. Travail dans le cas d'un fonctionnement réversible.

Sur un cycle, le premier principe s'écrit :

$$\delta W + \delta Q_c + \delta Q_f = 0 \quad (1)$$

Si l'on suppose que sur ce même cycle la température T de la pièce reste constante, le second principe s'écrit dans le cas d'une évolution réversible :

$$\frac{\delta Q_f}{T} + \frac{\delta Q_c}{T_{ext}} = 0 \quad (2)$$

Comme la pièce se refroidit ($dT < 0$) et que $\delta Q_f > 0$ on a :

$$\delta Q_f = -CdT > 0 \quad (3)$$

L'équation (3) permet d'écrire l'équation (2) sous une nouvelle forme :

$$\begin{aligned} -C \frac{dT}{T} + \frac{\delta Q_c}{T_{ext}} &= 0 \\ \delta Q_c &= CT_{ext} \frac{dT}{T} \quad (4) \end{aligned}$$

L'intégration des équations (1), (3) et (4) entre l'état initial $T = T_i = T_{ext}$ à $T = T_f$ conduit à :

$$\begin{aligned} W + Q_c + Q_f &= 0 \\ Q_f &= -C(T_f - T_{ext}) \\ Q_c &= CT_{ext} \ln \frac{T_f}{T_{ext}} = -CT_{ext} \ln \frac{T_{ext}}{T_f} \end{aligned}$$

Le travail électrique total à fournir à la machine lorsqu'elle fonctionne de manière réversible a pour expression :

$$\begin{aligned} W_r &= -Q_f - Q_c = C \left((T_f - T_{ext}) + T_{ext} \ln \frac{T_{ext}}{T_f} \right) \\ W_r &= CT_{ext} \left(\left(\frac{T_f}{T_{ext}} - 1 \right) + \ln \frac{T_{ext}}{T_f} \right) \\ W_r &= 212 \text{ kJ} \end{aligned}$$

La durée Δt nécessaire à la mise en température de la pièce est :

$$\Delta t = \frac{W_r}{P} \rightarrow \Delta t = 848 \text{ s} \approx 14 \text{ min}$$

3. Cas d'un fonctionnement non réversible.

Dans le cas où la machine fonctionne de manière irréversible, le second principe s'écrit sur un cycle élémentaire :

$$dS_{cycle} = 0 = \delta S_e + \delta S_c$$

En se servant de l'équation (3) on obtient :

$$0 = -C \frac{dT}{T} + \frac{\delta Q_c}{T_{ext}} + \delta S_c \rightarrow \delta Q_c = T_{ext} C \frac{dT}{T} - T_{ext} \delta S_c$$

$$Q_c = T_{ext} C \ln \frac{T_f}{T_{ext}} - T_{ext} S_c$$

D'autre part, d'après (3) :

$$Q_f = -C(T_f - T_{ext})$$

Le premier principe donne alors sur l'ensemble des cycles :

$$W_{irr} + Q_c + Q_f = 0$$

$$W_{irr} = -(Q_c + Q_f) = C(T_f - T_{ext}) + CT_{ext} \ln \frac{T_{ext}}{T_f} + T_{ext} S_c$$

$$W_{irr} = CT_{ext} \left(\left(\frac{T_f}{T_{ext}} - 1 \right) + \ln \frac{T_{ext}}{T_f} \right) + T_{ext} S_c$$

Comme $W_r = CT_{ext} \left(\left(\frac{T_F}{T_{ext}} - 1 \right) + \ln \frac{T_{ext}}{T_f} \right)$ on obtient :

$$W_{irr} - W_r = T_{ext} S_c$$

On a bien $W_{irr} - W_r > 0$ car $T_{ext} S_c > 0$ et il faudra donc plus de temps pour refroidir la pièce.

9. Moteur Diesel.

1. Tableau.

► Comme AB est une transformation adiabatique réversible d'un gaz parfait de coefficient γ constant, la loi de Laplace est utilisable :

$$T_A V_A^{\gamma-1} = T_B V_B^{\gamma-1} \rightarrow V_B = \left(\frac{T_A}{T_B} \right)^{\frac{1}{\gamma-1}} V_A \quad V_B = 0,16 \text{ L}$$

$$T_A P_A^{1-\gamma} = T_B P_B^{1-\gamma} \rightarrow P_B = \left(\frac{T_A}{T_B} \right)^{\frac{\gamma}{1-\gamma}} P_A \quad P_B = 44,3 \text{ bar}$$

► Comme BC est une transformation isobare on a :

$$P_C = P_B \quad P_C = 44,3 \text{ bar}$$

La loi des gaz parfaits permet d'écrire que sur cette transformation isobare :

$$\begin{cases} P_B V_B = nRT_B \\ P_C V_C = nRT_C \end{cases} \rightarrow T_C = T_B \frac{V_C}{V_B} = T_B \left(\frac{T_A}{T_B} \right)^{\frac{1}{\gamma-1}} \frac{V_C}{V_A} \quad T_C = 1,43 \cdot 10^3 \text{ K}$$

► Comme CD est une transformation adiabatique réversible d'un gaz parfait de coefficient γ constant, la loi de Laplace est utilisable :

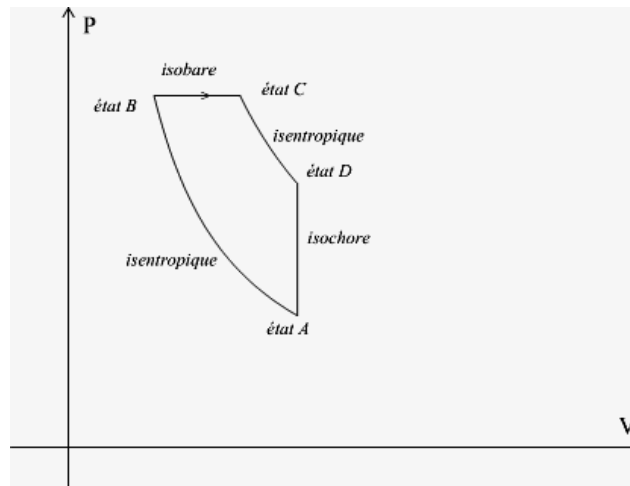
$$T_C V_C^{\gamma-1} = T_D V_D^{\gamma-1} \rightarrow T_D = \left(\frac{V_C}{V_D} \right)^{\gamma-1} T_C \quad T_D = 569 \text{ K}$$

$$P_C V_C^\gamma = P_D V_D^\gamma \rightarrow P_D = \left(\frac{V_C}{V_D} \right)^\gamma P_C \quad P_D = 17,6 \text{ bar}$$

	A	B	C	D
P (bar)	1,0	44,3	44,3	17,6
T (K)	323	954	$1,43 \cdot 10^3$	569
V (L)	2,40	0,16	0,24	2,40

2. Allure du cycle.

Le cycle est moteur, il est alors parcouru dans le sens horaire.



3. Quantité de matière.

On utilise la loi des gaz parfaits au point A :

$$n = \frac{P_A V_A}{RT_A} \quad n = 8,94 \cdot 10^{-2} \text{ mol}$$

4. Capacités thermiques.

$$\begin{cases} C_V = \frac{nR}{\gamma-1} = \frac{P_A V_A}{T_A} \frac{1}{\gamma-1} \\ C_P = \frac{\gamma nR}{\gamma-1} = \frac{P_A V_A}{T_A} \frac{\gamma}{\gamma-1} \end{cases} \quad \begin{cases} C_V = 1,86 \text{ J.K}^{-1} \cdot \text{mol}^{-1} \\ C_P = 2,60 \text{ J.K}^{-1} \cdot \text{mol}^{-1} \end{cases}$$

5. Transferts thermiques et travaux.

► Sur AB adiabatique :

$$Q_{AB} = 0$$

$$\Delta U_{AB} = W_{AB} = C_V (T_B - T_A) = \frac{P_A V_A}{T_A} \frac{1}{\gamma-1} (T_B - T_A) \quad W_{AB} = 1,17 \text{ kJ}$$

► Sur BC isobare :

$$\Delta H_{BC} = Q_{BC}^{réversible} = C_P (T_C - T_B) = \frac{P_A V_A}{T_A} \frac{\gamma}{\gamma - 1} \left(T_B \left(\frac{T_A}{T_B} \right)^{\frac{1}{\gamma - 1}} \frac{V_C}{V_A} - T_B \right)$$

$$Q_{BC}^{réversible} = \frac{P_A V_A T_B}{T_A} \frac{\gamma}{\gamma - 1} \left(\left(\frac{T_A}{T_B} \right)^{\frac{1}{\gamma - 1}} \frac{V_C}{V_A} - 1 \right) \quad Q_{BC} = 1,24 \text{ kJ}$$

D'autre part :

$$W_{BC} = -P_B (V_C - V_B) = -P_B \left(V_C - \left(\frac{T_A}{T_B} \right)^{\frac{1}{\gamma - 1}} V_A \right) \quad W_{BC} = -0,35 \text{ kJ}$$

► Sur CD adiabatique :

$$Q_{CD} = 0$$

$$\Delta U_{CD} = W_{AB} = C_V (T_D - T_C) = \frac{P_A V_A}{T_A} \frac{1}{\gamma - 1} \left(T_D - T_B \left(\frac{T_A}{T_B} \right)^{\frac{1}{\gamma - 1}} \frac{V_C}{V_A} \right) \quad W_{CD} = -1,60 \text{ kJ}$$

► Sur DA isochore :

$$W_{DA} = 0$$

$$Q_{DA} = \Delta U_{DA} = C_V (T_A - T_D) = \frac{P_A V_A}{T_A} \frac{1}{\gamma - 1} \left(T_A - \left(\frac{V_C}{V_D} \right)^{\gamma - 1} T_C \right) \quad Q_{DA} = -0,46 \text{ kJ}$$

6. Efficacité.

L'efficacité thermodynamique e d'un moteur cyclique ditherme est le rapport de la grandeur valorisable (ici $-W$) sur la grandeur coûteuse qui est l'énergie fournie par la source chaude au moteur.

Sur le cycle, le travail total échangé est W tel que :

$$W = W_{AB} + W_{BC} + W_{CD}$$

La chaleur fournie par la source est Q_{BC} .

Le rendement de ce moteur est :

$$e = - \frac{(W_{AB} + W_{BC} + W_{CD})}{Q_{BC}} \quad e = 0,63$$

Pour un moteur de Carnot, l'efficacité s'écrit :

$$e_C = 1 - \frac{T_{SF}}{T_{SC}} \text{ avec } T_{SF} = T_A \text{ et } T_{SC} = T_C \quad e_C = 0,77$$

Comme $e < e_C$, on peut conclure que le moteur Diesel fonctionne pas de manière thermiquement réversible : les transferts thermiques au cours des évolutions BC et DA ne sont pas réversibles (non isothermes) car au cours de ces évolutions $T_{\text{système}} \neq T_{\text{sources}}$.

10. Diagramme de Raveau.

Sur un cycle :

Premier principe :

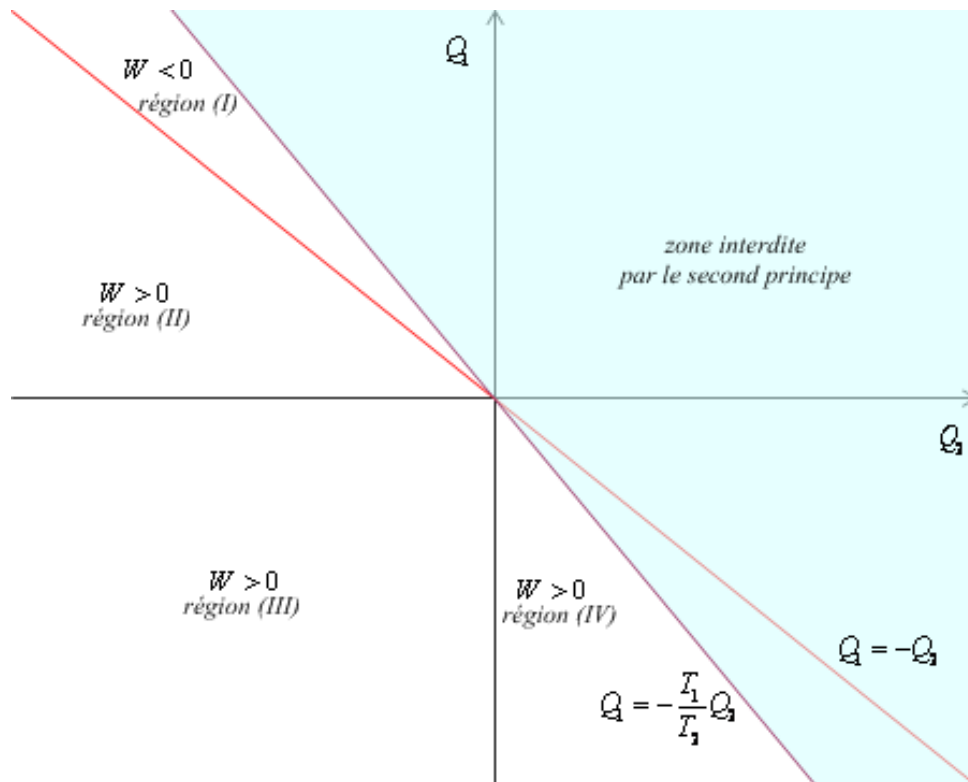
$$\boxed{\Delta U = W + Q_1 + Q_2 = 0} \quad (1)$$

Second principe

$$\Delta S = S_{\text{échange}} + S_{\text{création}} = \frac{Q_1}{T_1} + \frac{Q_2}{T_2} + S_{\text{création}} = 0$$

Comme $S_{\text{création}} \geq 0$ on a :

$$\boxed{\frac{Q_1}{T_1} + \frac{Q_2}{T_2} \leq 0} \quad (2)$$



1. Cycles possibles.

Les cycles possibles correspondent aux systèmes qui vérifient l'inégalité (2) :

$$\boxed{Q_1 \leq -\frac{T_1 Q_2}{T_2}} \quad \text{pente a une valeur inférieure à -1 car } \frac{T_1}{T_2} > 1$$

Les cycles possibles sont contenus dans la région du plan non bleutée.

2. Cycles réversibles.

Le lieu des points qui correspond à un cycle réversible est la droite « mauve » d'équation :

$$Q_1 = -\frac{T_1 Q_2}{T_2}.$$

3. Cycles avec un travail échangé nul.

Le lieu des points correspondant à un travail échangé nul est la droite « rouge » d'équation :

$$Q_1 = -Q_2$$

4. Différents domaines.

Domaine (II) :

$$Q_1 > 0 ; Q_2 < 0 ; W > 0$$

Ce domaine regroupe les machines qui consomment du travail pour déplacer par chaleur de l'énergie de la source chaude vers la source froide et cela dans le sens naturel des échanges thermiques. L'intérêt de ce type de dispositif est d'accélérer un processus naturel. Le ventilateur d'une automobile fait partie de ce type de machines.

Domaine (III) :

$$Q_1 < 0 ; Q_2 < 0 ; W > 0$$

Dans ce domaine figurent les machines qui consomment du travail pour réaliser le chauffage simultané de deux sources. Ces machines dithermes ne présentent pas d'intérêt car une machine monotherme peut réaliser cela avec une conversion intégrale du travail en chaleur.

Domaine (I) :

$$Q_1 > 0 ; Q_2 < 0 ; W < 0$$

Les machines de ce domaine fournissent du travail à partir du sens naturel des échanges thermiques de la source chaude vers la source froide. Ce domaine regroupe les *moteurs*.

Domaine (I) :

$$Q_1 < 0 ; Q_2 > 0 ; W > 0$$

Dans ce domaine, on trouve les machines à qui on fournit du travail et qui permettent d'inverser le sens naturel des échanges thermiques, de l'énergie est puisée dans la source froide et libérée dans la source chaude. Si l'on se place du point de vue de la source froide, la machine apparaît comme une machine frigorifique et si l'on se place du point de vue de la source chaude elle apparaît alors comme une pompe à chaleur.

11. Moteur utilisant des pseudo-sources.

1. Température finale.

On considère le système fermé constitué des deux corps contenus dans une enceinte **athermane indilatable**.

Le premier principe s'écrit alors :

$\Delta U = \Delta U_1 + \Delta U_2 = 0$ pas d'échanges d'énergie par chaleur et travail avec le milieu extérieur.

$$c(T_f - T_{i1}) + c(T_f - T_{i2}) = 0$$

$$\boxed{\begin{aligned} T_f &= \frac{T_{i1} + T_{i2}}{2} \\ T_f &= 350 \text{ K} \end{aligned}}$$

La variation d'entropie du système est égale à la création d'entropie car la transformation est adiabatique, l'entropie d'échange est nulle :

$$\Delta S = S_c$$

Pour calculer la variation d'entropie on utilise l'identité thermodynamique et le fait que l'entropie soit une fonction extensive :

$$dS = dS_1 + dS_2 = c \frac{dT_1}{T_1} + p \frac{dV_1}{T_1} + c \frac{dT_2}{T_2} + p \frac{dV_2}{T_2}$$

$$\text{Comme } dV_1 = dV_2 = 0 \text{ on a } dS = c \frac{dT_1}{T_1} + c \frac{dT_2}{T_2} \text{ d'où :}$$

$$\Delta S = c \left(\ln \frac{T_f}{T_{i1}} + \ln \frac{T_f}{T_{i2}} \right) = c \ln \frac{T_f^2}{T_{i1} T_{i2}}$$

$$\boxed{\begin{aligned} \Delta S &= c \ln \frac{(T_{i1} + T_{i2})^2}{4T_{i1} T_{i2}} = S_c \\ S_c &= 20,6 \text{ J/K} \end{aligned}}$$

La variation d'entropie du système isolé, égale à la création d'entropie, est positive car ce système évolue de manière irréversible : il n'existe pas de processus spontané qui le ramène à l'état initial en suivant exactement la même transformation en sens inverse. Pour obtenir de nouveau ce même état initial, le monde extérieur au système doit être notablement modifié, il faut alors utiliser au minimum un réfrigérateur et un système de chauffage.

2. Température finale dans le cas d'un moteur.

Sur un cycle élémentaire réversible :

$$\begin{cases} dU = \delta Q_1 + \delta Q_2 + \delta W = 0 \\ dS = \frac{\delta Q_1}{T_1} + \frac{\delta Q_2}{T_2} = 0 \end{cases}$$

Les échanges d'énergie par chaleur avec les pseudo-sources s'écrivent :

$$\begin{cases} \delta Q_1 = -cdT_1 \\ \delta Q_2 = -cdT_2 \end{cases}$$

Le signe négatif apparaît car la variation d'énergie interne de ces solides est égale à l'opposée de la chaleur qu'ils échangent avec la machine thermique.

On obtient ainsi :

$$\begin{cases} \delta W = c dT_1 + c dT_2 & (1) \\ \frac{c dT_1}{T_1} + \frac{c dT_2}{T_2} = 0 & (2) \end{cases}$$

L'évolution conduit les sources à acquérir simultanément la nouvelle température finale. A cette température, le moteur s'arrête de fonctionner car il n'existe pas de moteur cyclique monotherme (énoncé historique du second principe donné par Lord Kelvin). On obtient ainsi avec l'équation (2) :

$$\int_{T_{i1}}^{T_f'} c \frac{dT_1}{T_1} + \int_{T_{i2}}^{T_f'} c \frac{dT_2}{T_2} = 0 \Rightarrow \ln \left(\frac{T_f'^2}{T_{i1} T_{i2}} \right) = 0$$

$$\frac{T_f'^2}{T_{i1} T_{i2}} = 1$$

$$\boxed{T_f' = \sqrt{T_{i1} T_{i2}}}$$

$$\boxed{T_f' = 346 \text{ K}}$$

L'équation (1) permet de déterminer le travail fourni par le moteur sur la totalité des cycles élémentaires :

$$W = c(T_f' - T_{i1}) + c(T_f' - T_{i2}) = c(2T_f' - T_{i1} - T_{i2})$$

$$\boxed{W = c(2\sqrt{T_{i1} T_{i2}} - T_{i1} - T_{i2})}$$

$$\boxed{W = -7,2 \cdot 10^3 \text{ J}}$$

12. Variations d'énergie interne et d'entropie sur un cycle.

1. Variations :

Transformation	ΔU	W	Q	ΔS
AB	0	$-P_A V_A \ln \frac{V_B}{V_A}$	$P_A V_A \ln \frac{V_B}{V_A}$	$\frac{P_A V_A}{T_A} \ln \frac{V_B}{V_A}$
BC	$\frac{P_A V_A}{T_A} \frac{1}{\gamma-1} (T_C - T_A)$	0	$\frac{P_A V_A}{T_A} \frac{1}{\gamma-1} (T_C - T_A)$	$\frac{P_A V_A}{T_A} \frac{1}{\gamma-1} \ln \frac{T_C}{T_A}$
CD	0	$-\frac{P_A V_A T_C}{T_A} \ln \frac{V_A}{V_B}$	$\frac{P_A V_A T_C}{T_A} \ln \frac{V_A}{V_B}$	$\frac{P_A V_A}{T_A} \ln \frac{V_A}{V_B}$
DA	$\frac{P_A V_A}{T_A} \frac{1}{\gamma-1} (T_A - T_C)$	0	$\frac{P_A V_A}{T_A} \frac{1}{\gamma-1} (T_A - T_C)$	$\frac{P_A V_A}{T_A} \frac{1}{\gamma-1} \ln \frac{T_A}{T_C}$

2. Rendement.

Soit Q_1 la quantité de chaleur reçue par le gaz au cours d'un cycle moteur :

$$Q_1 = Q_{BC} + Q_{CD}$$

Soit Q_2 la quantité de chaleur cédée par le gaz au cours d'un cycle moteur :

$$Q_2 = Q_{AB} + Q_{DA}$$

Sur un cycle :

$$W + Q_1 + Q_2 = 0$$

D'où le rendement :

$$r = -\frac{W}{Q_1} = 1 + \frac{\ln \frac{V_B}{V_A} + \frac{1}{\gamma-1} \frac{1}{T_A} (T_A - T_C)}{\ln \frac{V_A}{V_B} + \frac{1}{\gamma-1} \frac{1}{T_A} (T_C - T_A)}$$