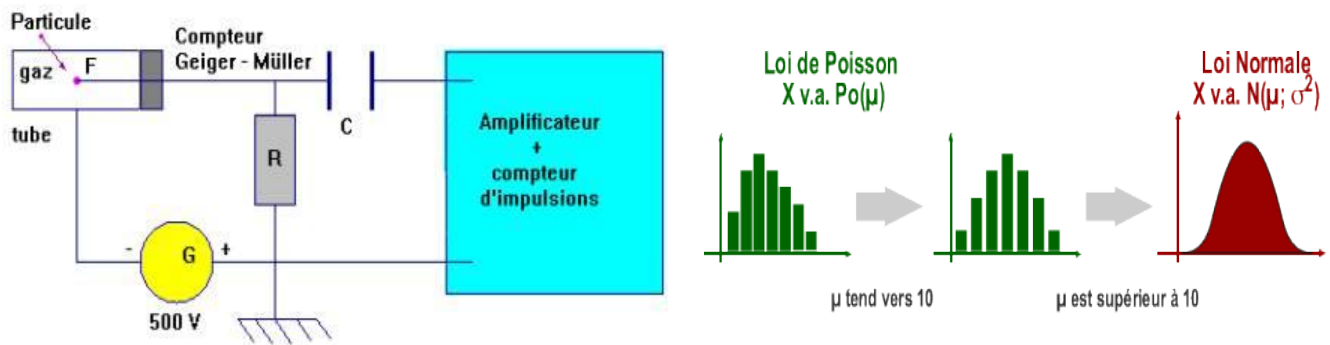


## Travaux Pratiques de Physique Nucléaire (SMP<sub>5</sub>, PF)

### Manipulation 1 :

### « Compteur Geiger Muller et Statistiques des Comptages »

(2014-2018)



Pr. M. Massaq et Pr. A. Elanique

## Manipulation n° 1 : COMPTEUR GEIGER-MÜLLER et STATISTIQUES de COMPTAGE

Dans cette manipulation, on étudiera les caractéristiques d'un compteur Geiger-Müller et on vérifiera la nature statistique de la radioactivité.

Il est conseillé aux étudiants de lire attentivement les *documents 1 et 2* qui se trouvent à la fin de ce fascicule.

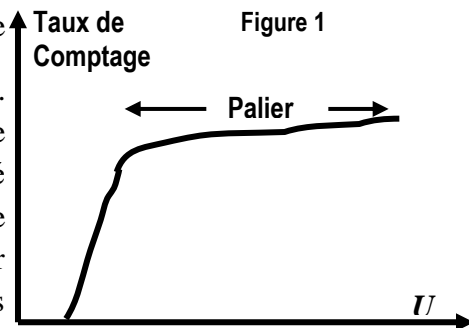
### I- Caractéristiques

Le compteur Geiger-Müller fonctionne dans une région où l'impulsion délivrée est indépendante de la nature et de l'énergie du rayonnement détecté. Ce type de compteur permet donc d'effectuer des comptages de particules qui l'atteignent sans fournir aucune autre information. C'est un détecteur très sensible, d'un emploi universel. Par ailleurs, si sa fenêtre est très mince, le compteur peut détecter des particules  $\beta$  de très faible énergie (30 keV). Cependant, par son mécanisme de décharge, il présente l'inconvénient d'avoir un temps mort important qui le rend inutilisable pour des taux de comptages élevés ( $> 10^3 \text{ s}^{-1}$ ).

Une impulsion correspond approximativement à  $10^{10}$  paires d'ions créées dans une décharge. Son amplitude atteint donc aisément plusieurs volts. Des électroniques de traitement très simples, notamment sans préamplificateur, sont suffisantes. C'est pourquoi on retrouve souvent ce type de détecteur dans les boîtiers de détection de poche ou les petits radiamètres.

#### Palier d'un G.M. :

Si on fait croître la tension de polarisation  $U$  du compteur, le comptage commence quand l'impulsion atteint un seuil  $V_s$ . Puis toutes les impulsions ont même amplitude, le taux de comptage des impulsions représente alors fidèlement l'activité de la source, quelle que soit désormais la tension de polarisation. On appelle cette région le palier du Geiger Müller (**figure 1**). Dans cette zone du palier, la hauteur des impulsions délivrées par le compteur est de l'ordre de quelques centaines de mV, leur temps de montée est de 10  $\mu\text{s}$ .



Le tracé du palier permet de déterminer la tension de fonctionnement du compteur qui se situe au milieu du palier, point où une variation de la tension autour de cette valeur entraîne une variation minimum du taux de comptage. On appelle "pente du palier" du compteur Geiger Müller, le rapport  $p = \frac{\Delta N}{N}$  où  $\Delta N$  est la variation, pris pour  $\Delta V = 100 \text{ volts}$  autour de  $U$ , du taux de comptage moyen  $N$ . La longueur et la pente du palier caractérise l'état de fonctionnement du détecteur. Pour un compteur en bon état,  $p$  est de l'ordre de quelques pourcentages. La longueur du palier diminue et sa pente augmente à mesure que le compteur s'use ; dans ces conditions, on ne peut détecter qu'un nombre limité d'impulsions.

## II- Statistiques du comptage

Un détecteur effectuant une série de mesures dans des mêmes conditions n'indiquera pas la même valeur. Les causes de ces variations proviennent des fluctuations du rayonnement ambiant (bruit de fond radioactif), des fluctuations propres à la source radioactive, ainsi que des fluctuations provenant du processus de détection (bruit du détecteur).

Ces trois sources de bruit constituent des processus aléatoires généralement bien décrits par la loi de probabilité de Poisson (voir le *document 2* pour plus de détail).

## III- Manipulation

### 1<sup>ère</sup> partie : Caractéristiques du Compteur Geiger-Muller

#### 1- Palier et tension de fonctionnement

Placer la source radioactive à une distance de 3 à 4 cm du compteur. Mettre sous tension et démarrez le comptage. Augmenter doucement la haute tension pour localiser la tension seuil. Repartir du seuil et faire des comptages de 20 secondes par pas de 25 V jusqu'à la limite supérieure du palier. Représenter graphiquement  $N$  en fonction de  $V$ , prendre l'erreur sur la valeur mesurée  $\Delta N = \sqrt{N}$ .

Déterminer graphiquement le point de fonctionnement du compteur et déterminez pour une variation de 100 Volts la pente du plateau en % au voisinage du milieu du palier. Effectuer trois déterminations et donner la valeur moyenne ainsi que son erreur.

Dans la suite de la manipulation, on choisira une tension  $U$  de fonctionnement du Geiger-Müller.

#### 2- Mesure du temps mort $\tau$

a) En l'absence de toute source radioactive, mesurer le nombre de coups enregistrés par le compteur. Faire une mesure de 5 minutes. En déduire le taux de comptage  $B$  du bruit de fond radioactif.

b) La mesure du temps mort sera réalisée en utilisant deux sources radioactives  $S_1$  et  $S_2$ .

\* Pour  $S_1$  seule : Soient  $N_1$  le nombre de particules traversant le compteur par unité de temps et  $n_1$  le nombre compté par ce dernier. La quantité  $n_1 \tau$  représente la fraction de seconde pendant laquelle le compteur est insensible.

\* Pour  $S_2$  seule : Soient  $N_2$ ,  $n_2$  et  $n_2 \tau$  les grandeurs correspondantes.

\* Pour  $S_1+S_2$  : Soient  $N_{12}$ ,  $n_{12}$  et  $n_{12} \tau$  les mêmes grandeurs.

On aura donc :  $N_1+B=n_1(I+n_1\tau)$  ;  $N_2+B=n_2(I+n_2\tau)$  ;  $N_{12}+B=n_{12}(I+n_{12}\tau)$

On doit avoir aussi :  $N_1+N_2=N_{12}$ , d'où :  $n_1(I+n_1\tau)+n_2(I+n_2\tau)-B=n_{12}(I+n_{12}\tau)$

$$\tau = \frac{n_1 + n_2 - n_{12} - B}{n_{12}^2 - n_1^2 - n_2^2}$$

Pour éviter les erreurs systématiques, il faut mesurer dans l'ordre  $n_1$ ,  $n_{12}$  et  $n_2$ .

**2<sup>ème</sup> partie : Distribution de Poisson**

Cette partie de la manipulation a pour but de mettre en évidence la nature statistique du phénomène d'émission et de détection du rayonnement nucléaire, de vérifier le modèle présenté dans le *document 2* concernant la nature poissonnienne du nombre de coups comptés dans un intervalle de temps fixe lorsque l'activité de la source radioactive est constante, et enfin de vérifier une des propriétés de la loi de Poisson, à savoir, que la valeur moyenne soit égale à la variance.

On dispose pour cela d'un détecteur GM et d'un compteur ; on enregistre plusieurs fois de suite dans les mêmes conditions le nombre d'événements détectés pendant une durée  $\Delta t = 10$  s. Il est recommandé de s'en tenir à la moyenne d'une **dizaine** d'événements pour éviter d'avoir un trop grand nombre de valeurs observées. On construit l'histogramme de cet ensemble de mesures. On effectue 200 mesures qui constituent notre échantillon.

1- Calculer la moyenne  $\bar{N}$  de l'échantillon :  $\bar{N} = \frac{\sum N_i}{200}$

2- Calculer les fréquences d'observation  $f(N)$  des diverses valeurs obtenues  $N_i$  ( $i=1, \dots, 200$ ) de la variable aléatoire  $N$ .

3- Calculer par récurrence les probabilités théoriques :  $p(N) = \frac{\bar{N}^N}{N!} e^{-\bar{N}}$

4- Reporter dans un tableau les fréquences mesurées  $f(N)$  et théoriques  $F(N) = 200 p(N)$ , dessiner l'histogramme représentant la fréquence  $f(N)$  en fonction de  $N$  et sur le même graphe, tracer la courbe théorique  $F(N)$  en fonction de  $N$ .

5- Calculer l'écart-type de la distribution mesurée (estimation de  $\sigma$ )

$$\sigma = \sqrt{\frac{1}{200} \sum_1^{200} (N_i - \bar{N})^2} = \sqrt{\frac{1}{200} \sum_{N=0}^{\infty} (N - \bar{N})^2 f(N)}$$

et comparer à l'écart-type d'une distribution de Poisson de moyenne  $\bar{N}$  :  $\sigma = \sqrt{\bar{N}}$

6- Calculer l'erreur relative qu'on aurait si l'on déterminait la moyenne  $\bar{N}$  par une seule épreuve donnant  $N_1 = \bar{N}$  :  $\sigma = \sqrt{N_1}$   $\epsilon_1 = \frac{\sigma}{\bar{N}}$ .

7- Calculer l'erreur relative en considérant les 200 épreuves comme une seule épreuve de durée 200 fois plus longue donnant directement  $\bar{N}$  :

$$\sigma = \frac{\sqrt{\sum N_o}}{200} \quad \bar{N} = \frac{\sum N_o}{200} \quad \text{et} \quad \epsilon_2 = \frac{\sigma}{\bar{N}}$$

Comparer les valeurs  $\epsilon_1$  et  $\epsilon_2$  obtenues et commenter.....\*\*\*\*\*.....

## Document 1 : LES DÉTECTEURS À GAZ

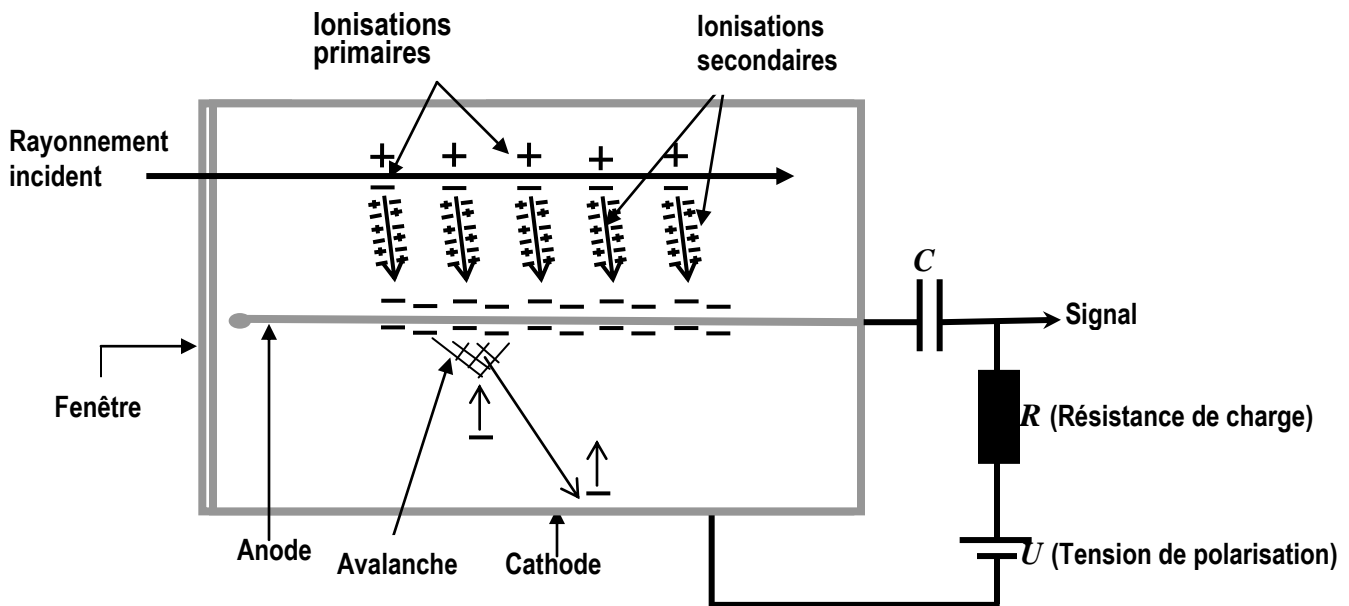
### 1- DESCRIPTION

Pour compter les particules émises par les sources radioactives on emploie couramment le compteur Geiger-Müller, apprécié pour sa simplicité de construction et d'emploi. Ce compteur est classé parmi les détecteurs à gaz dont le principe de détection est basé sur l'interaction d'un rayonnement ionisant dans un gaz. Il est constitué d'un tube métallique, de forme cylindrique, jouant le rôle de cathode et d'un fil de tungstène très mince tendu dans l'axe du tube, jouant le rôle d'anode. Le tube est rempli d'un gaz (argon, krypton ou hydrogène) sous une pression d'une fraction d'atmosphère. Ce gaz est choisi pour son caractère électronégatif qui permet aux électrons créés de rester libres. Des traces de vapeurs organiques facilitent l'utilisation du détecteur en régime Geiger-Müller.

La forme cylindrique du tube permet d'avoir un champ électrique très fort à proximité de l'anode. En effet, d'après le théorème de Gauss, le flux du champ électrique à travers une surface, de rayon  $r$ , choisie à l'intérieur du tube est :

$$\int \vec{E} \cdot d\vec{s} = E(r) 2\pi r l = \frac{q}{\epsilon_0}, \quad l \text{ est la longueur du tube.}$$

$U$  étant la différence de potentiel appliquée entre l'anode et la cathode, on en déduit le champ créé à une distance  $r$  de l'anode :  $E(r) = \frac{U}{r} \ln \frac{a}{b}$ ,  $a$  est le rayon de l'anode,  $b$  est le rayon intérieur du tube. La variable  $r$  représente la distance à l'anode du lieu où l'électron primaire est créé. Le champ radial est proportionnel à  $1/r$  et donc très intense au voisinage de l'anode.

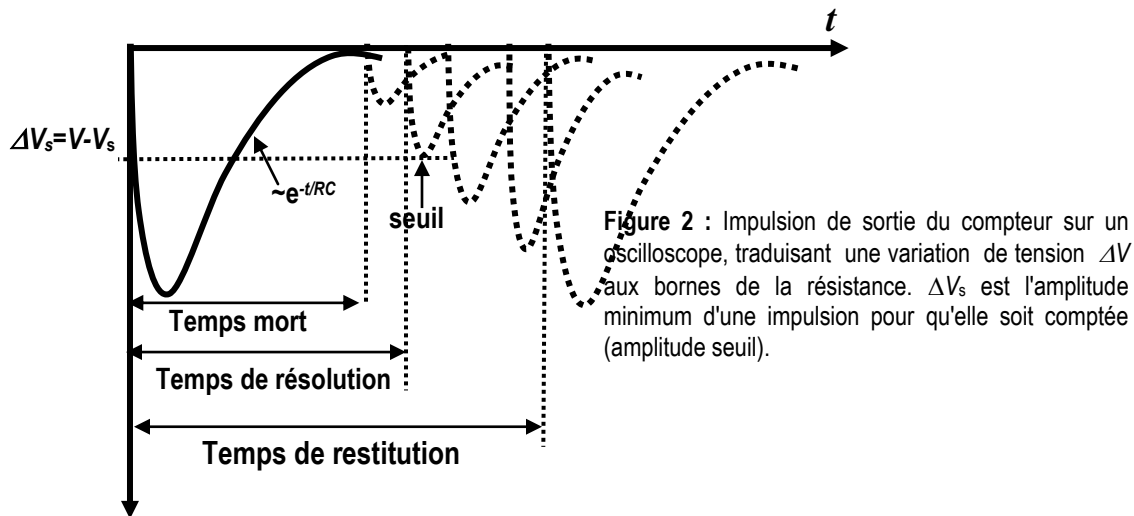


**Figure 1 :** Schéma de principe d'un détecteur à gaz. La résistance  $R$  permet de transformer l'impulsion de courant en impulsion de tension (chute ohmique dans  $R$ ).  $C$  étant la capacité inter-électrodes, la valeur de  $R$  est fixée de façon à ce que la constante  $RC$  soit de l'ordre du temps de transit des ions positifs.

Le montage de base est présenté sur la **figure 1**.

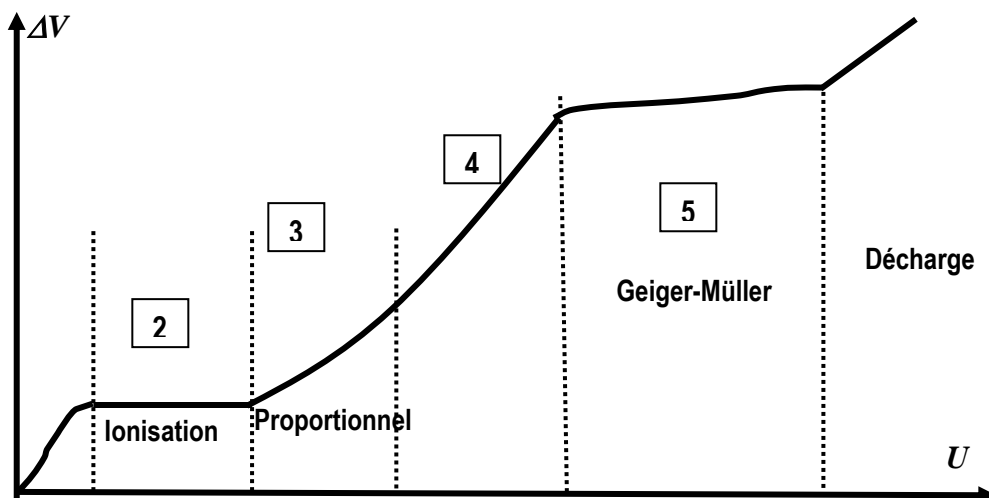
### 2- PRINCIPE DE FONCTIONNEMENT

Lorsqu'une particule pénètre dans le tube elle ionise un certain nombre de molécules du gaz (**ionisation primaire**). Les électrons libérés migrent lentement jusqu'à ce qu'ils atteignent les voisinages de l'anode, où ils sont accélérés et créent plusieurs **ionisations secondaires**. Pendant ce temps les ions positifs, beaucoup plus lourds et beaucoup moins mobiles, restent presque sur place et entourent le fil d'une gaine positive qui, en diminuant le champ, limite l'avalanche. Ils dérivent ensuite vers la paroi où ils sont neutralisés. La charge collectée en fonction du temps croît donc d'abord très rapidement (collection des électrons) puis beaucoup plus lentement (collection des ions). Si le détecteur avait une capacité  $C$  infinie, la charge collectée resterait constante.  $C$  étant finie, elle va se décharger avec la constante de temps  $t = RC$  dans la résistance  $R$ . Si  $t$  est grand devant le temps de collection des électrons et petit devant le temps de collection des ions, on ne décèle que le signal de courant électronique, qui se traduit par une impulsion de tension aux bornes de la résistance  $R$ . **La figure 2** schématise de telles impulsions.



### 3- MODES DE FONCTIONNEMENT

La hauteur de l'impulsion  $\Delta V$  dépend de la tension  $U$  appliquée aux électrodes ; la variation de  $\Delta V$  en fonction de  $U$  est représentée ci-dessous. On distingue plusieurs régions qui correspondent à différents régimes de fonctionnement.



**Figure 3 :** Différentes zones de fonctionnement des détecteurs à gaz

a) **Région 1** : Lorsque la tension inter-électrodes est petite, les ions et électrons sont peu accélérés et se recombinent sous l'effet de l'agitation thermique ; seule une partie des charges créées est collectée. Cette fraction augmente avec la tension. Aucun détecteur ne fonctionne dans ces conditions.

b) **Région 2** : Lorsque la valeur de la tension est suffisante pour que les recombinaisons n'aient plus lieu, tous les électrons libérés se dirigent vers l'anode où ils seront collectés. Si  $\varepsilon$  est l'énergie moyenne à la formation d'une paire électron-ion<sup>1</sup>, le nombre de paires formées correspondant à la perte d'énergie  $\Delta E$  de la particule est  $n = \frac{\Delta E}{\varepsilon}$  et la charge totale collectée est  $ne$ . Elle est indépendante de la tension appliquée et reste constamment proportionnelle à l'énergie cédée par le rayonnement dans le gaz. Cette zone de tension est appelée régime d'ionisation primaire sous lequel fonctionnent **les chambres d'ionisation**. Une augmentation de la tension de polarisation, dans cette région, n'aura pour effet qu'accélérer les charges donnant une impulsion avec un temps de montée plus court.

c) **Région 3** : Le champ électrique au voisinage de l'anode est assez fort ( $\approx 10^6 \text{ Vm}^{-1}$ ) pour communiquer aux électrons d'ionisation une énergie suffisante entre collisions pour qu'ils ionisent à leur tour d'autres atomes du gaz provoquant des ionisations secondaires (**figure 1**). Il y a multiplication des charges par un coefficient qui peut atteindre des valeurs de  $10^5$  à  $10^6$  (phénomène d'avalanche de Townsend). On est en **régime proportionnel** car la charge collectée est proportionnelle à la charge primaire. Les détecteurs qui fonctionnent dans cette région sont **les compteurs proportionnels**.

d) **Région 4** : Lorsque la tension inter-électrodes augmente encore, l'énergie communiquée aux électrons au voisinage de l'anode est suffisante pour que certains des ions produits se retrouvent dans un état excité. Ces ions excités retournent à leur état fondamental en émettant des photons ultraviolets qui peuvent arracher par effet photoélectrique des électrons sur la cathode. La quantité de charges collectée n'est plus rigoureusement proportionnelle à l'énergie primaire cédée dans le gaz. C'est le régime semi-proportionnel dans lequel aucun détecteur ne fonctionne.

e) **Région 5** : À partir d'une certaine valeur de tension, toute ionisation produite déclenche la même avalanche de charges. C'est une décharge quasi-totale du gaz qui se propage dans tout le volume du compteur et qui se traduit par une impulsion d'amplitude plus grande et presque constante quelle que soit l'énergie de la particule incidente. Le nombre d'ions formés n'est cependant pas infini, car la cathode et l'anode se trouvent séparées par une gaine d'ions positifs qui se déplace lentement vers la cathode (en  $10^{-4}$  s environ), cette gaine forme un écran électrostatique qui abaisse le potentiel inter-électrodes de sorte que de nouvelles avalanches ne puissent pas se produire, donc l'ionisation s'arrête. C'est le **régime de Geiger-Müller** dans lequel chaque impulsion est indépendante de l'ionisation primaire: On ne peut donc pas remonter à l'énergie cédée mais seulement à effectuer des comptages. Les détecteurs qui fonctionnent dans cette région sont les **compteurs Geiger-Müller**.

f) **Région 6** : À des valeurs de tension trop élevées, le détecteur devient instable du fait de décharges permanentes qui usent très rapidement le détecteur.

**Remarque : Rôle des traces de vapeurs organiques**

En l'absence de ces traces, les ions arriveraient sur la cathode où ils seraient neutralisés. L'atome du gaz une fois neutralisé aurait une énergie d'excitation qu'il libérerait en émettant un photon assez énergétique pour arracher un électron à la cathode, et provoquer une décharge retardée. Pour éviter ces décharges parasites, on ajoute au gaz des traces de vapeurs organiques (alcool, méthane..) qui ont un potentiel d'ionisation inférieur à celui du gaz, qui neutralisent les ions par formation d'ions polyatomiques . L'ionisation est donc transférée du gaz à la molécule polyatomique (avec émission d'un photon très peu énergétique) et seuls des ions polyatomiques arrivent à la cathode où ils se neutralisent, ils sont alors dans un état d'excitation qui provoque la dissociation de la molécule

<sup>1</sup> Elle est différente de l'énergie d'ionisation, pour l'argon  $\varepsilon = 26 \text{ eV}$ , Hydrogène  $37 \text{ eV}$ , krypton  $24 \text{ eV}$ .

en un temps très courts ( $10^{-13}$ s), sans émission de photon. On remarque que cette consommation de molécules organiques impose une durée de vie au détecteur.

**4- CARACTÉRISTIQUES D'UN DÉTECTEUR À GAZ**

En pratique, il n'existe pas de détecteur capable de fonctionner indifféremment dans les trois régimes (chambre d'ionisation, compteur proportionnel et compteur Geiger-Müller) en raison des spécificités technologiques nécessaire pour un fonctionnement performant dans chacun des régimes.

- **Efficacité de détection**

L'efficacité d'un détecteur définit sa capacité à délivrer un signal par rapport à la quantité de particules présentes dans le champ de radiations. L'**efficacité absolue**  $\epsilon_{abs}$  s'exprime par le rapport du nombre de particules enregistrées  $N_{enr}$  sur le nombre de particules émises par la source  $N_{emi}$  :

$$\epsilon_{abs} = \frac{N_{enr}}{N_{emi}}$$

Cette grandeur ne dépend pas uniquement des caractéristiques du détecteur, mais également de la géométrie de mesure (la distance source-détecteur par exemple). C'est la raison pour laquelle on définit le concept d'**efficacité intrinsèque**  $\epsilon_{int}$  qui ne dépend pas des caractéristiques géométriques :

$$\epsilon_{int} = \frac{N_{enr}}{N_{inc}}$$

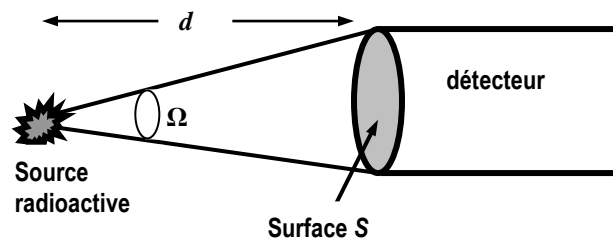
où  $N_{inc}$  est le nombre de particules incidentes sur le détecteur. Lorsque la source émet de manière isotrope, et que l'atténuation entre la source et le détecteur est négligeable, on a :

$$\epsilon_{int} = \frac{\Omega}{4\pi} \epsilon_{abs}$$

où  $\Omega$  est l'angle solide sous-tendu par le détecteur vu depuis la source (voir **figure 4**)

Pour le détecteur à gaz, l'efficacité de détection des particules  $\alpha$  et  $\beta$  est limitée par la transparence de la fenêtre d'entrée, mais comme ces particules ionisent directement le gaz, l'efficacité peut atteindre cent pour-cent dans le volume utile. Celle des photons, qui sont indirectement ionisant, est de l'ordre de  $10^{-2}$ .

**Figure 4** : Illustration d'un processus de détection dans lequel la source émet  $N_{emi}$  particules dont  $N_{inc}$  vont pénétrer dans le volume sensible et provoquer  $N_{enr}$  impulsions de détection. L'angle solide  $\Omega$  sous lequel un détecteur de surface  $S$  voit une source ponctuelle située à une distance  $d$ . Dans ce cas, on a  $\Omega = \frac{S}{d^2}$ .



- **Temps de résolution - temps mort**

Immédiatement après la décharge résultant du passage d'une particule, le compteur reste insensible à une autre particule tant que les ions positifs n'ont pas atteint la cathode. La durée de cette insensibilité est le temps mort ( $\tau_m = 100-500 \mu s$ ). Avant que les ions positifs n'atteignent la cathode, le champ électrique autour de l'anode s'est suffisamment rétabli pour qu'un autre événement ionisant provoque à nouveau une décharge d'importance réduite, créant une impulsion de plus faible amplitude (**figure 2**). Mais ce n'est qu'après un temps  $\tau_r$  que l'impulsion suivante atteinte l'amplitude seuil telle que l'impulsion soit comptée.  $\tau_r$  est le temps de résolution. En résumé, le temps mort est le temps minimum séparant deux impulsions. Il ne dépend que des caractéristiques du compteur. Le temps de résolution est le temps minimum séparant deux impulsions enregistrables. Il dépend des caractéristiques du compteur et de l'électronique associée.



Lorsque les ions sont collectés à la cathode, le champ électrique recouvre sa valeur initiale rendant possible une décharge qui engendre une impulsion d'amplitude normale. Cet intervalle de temps est appelé temps de restitution.

- **Mouvement propre**

C'est le taux de comptage enregistré par le détecteur en absence de toute source radioactive. Ce rayonnement ambiant, généralement appelé bruit de fond radioactif, provient des rayons cosmiques qui frappent la terre en permanence et de la radioactivité de certaines impuretés présentes dans le gaz et dans la paroi du détecteur.

**Remarque :** Un photon ne peut pas ioniser directement le gaz. Toutefois, s'il s'agit de le détecter, la particule ionisante sera un  $e^-$  issu de l'absorption du photon par un atome du gaz par effet Compton, photoélectrique ou par création de paire.

**Document 2 : STATISTIQUES D'UN COMPTAGE**

**1- Rappel de quelques définitions**

Soit  $m_i$  une mesure de fréquence  $f_i$  dans une série de  $N$  mesures.

**La moyenne :**  $\bar{m} = \frac{\sum_i^N f_i \cdot m_i}{\sum_i^N f_i}$  ; **La variance :**  $V = \frac{\sum_i f_i \cdot (m_i - \bar{m})^2}{\sum_i f_i}$  ; **L'écart type :**  $\sigma = \sqrt{V}$

**2- Loi binomiale**

Supposons une expérience dans laquelle un certain événement a la probabilité  $p$  de se produire. La probabilité pour que cet événement ne se produise pas est évidemment :  $q = 1-p$ .

Si cette même expérience est répétée  $z$  fois dans les mêmes conditions, la probabilité de voir l'événement se produire  $x$  fois est :  $P_z(x) = \frac{z!}{x!(z-x)!} p^x (1-p)^{z-x}$ , c'est ce qu'on appelle la loi binomiale.

Comparons  $P_z(x)$  et  $P_z(x+1)$  :  $\frac{P_z(x+1)}{P_z(x)} = \frac{p \cdot z-x}{q \cdot x+1} = \frac{pz-px}{qx+q}$ ,  $P_z$  croît donc avec  $x$  tant que  $\frac{pz-px}{qx+q} > 1$  ou  $x < pz-q$ .

Le nombre le plus probable d'événements est (à moins d'une unité près)  $m = pz$ . Il est évident que  $P_z(x)$  soit normée. La valeur moyenne de la distribution est :  $\sum_{x=0}^z x P_z(x)$

Pour la calculer, on écrit l'identité :  $(py+q)^z = \sum_{x=0}^z P_z(x) y^x$

Dérivons les deux membres par rapport à  $y$  :  $pz(py+q)^{z-1} = \sum_{x=0}^z x P_z(x) y^{x-1}$

Si  $y=1$ ,  $pz = \sum_{x=0}^z x P_z(x) = m$ . La valeur moyenne du nombre d'événements est donc aussi :  $m = pz$ .

**1- Distribution de Poisson**

Si  $x$  est petit devant  $z$ , la loi binomiale peut être transformée au prix de quelques approximations suivantes :

$\frac{z!}{(z-x)!} = z(z-1) \dots (z-x+1) \approx z^x$  et :  $(1-p)^{z-x} \approx (1-p)^z = \sum_{k=0}^z \frac{(-1)^k z!}{k!(z-k)!} p^k$

qu'on peut encore transformer à l'aide de la première approximation en :

$(1-p)^{z-x} \approx \sum_{k=0}^z \frac{(pz)^k}{k!} (-1)^k = e^{-pz}$  ;  $P_z(x) \rightarrow p(x) = \frac{m^x}{x!} e^{-m}$

C'est la distribution de Poisson dont l'allure est représentée sur la **figure 1**. Si une source a une activité  $A$ , le taux de comptage moyen pendant  $t$  est  $m = At$ . Si la source a une durée de vie longue devant le temps de comptage, la distribution des taux de comptage obtenus sur un grand nombre de mesures sera une distribution de Poisson.

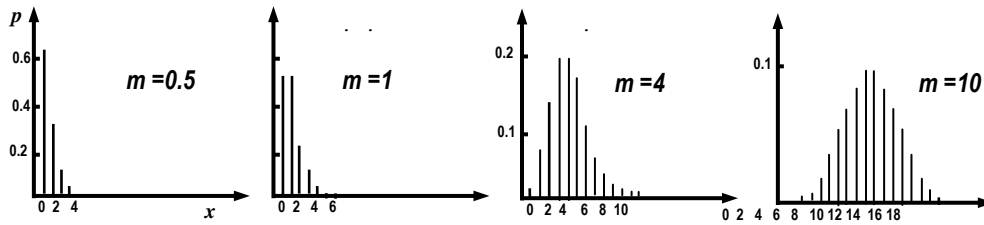


Figure 1 : Distributions de Poisson pour différentes valeurs de  $m$

• **Ecart type**

On appelle fluctuation de la distribution le moment d'ordre 2 de la distribution pris par rapport à leur valeur moyenne :  $\sigma^2 = \sum_{x=0}^{\infty} (x-m)^2 p(x)$  ;  $\sigma^2$  est la valeur moyenne de  $(x-m)^2$  ;  $\sigma$  est l'écart quadratique moyen ou écart type. C'est une caractéristique importante d'une distribution, puisque c'est une évaluation de la largeur de la distribution.

Dans le cas de la distribution de Poisson,  $\sigma^2$  se calcule facilement.

$$\sigma^2 = \sum_{x=0}^{\infty} (x-m)^2 \frac{m^x}{x!} e^{-m} = e^{-m} \left[ \sum_{x=0}^{\infty} \frac{x^2 m^x}{x!} - 2m \sum_{x=0}^{\infty} \frac{x m^x}{x!} + m^2 \sum_{x=0}^{\infty} \frac{m^x}{x!} \right]$$

Le 3ème terme est :  $m^2 \sum_{x=0}^{\infty} \frac{m^x}{x!} = m^2 e^m$

Le 2ème terme est, à un facteur près, le moment d'ordre 1 de la distribution, c'est-à-dire la valeur moyenne

$$2m \sum_{x=0}^{\infty} \left( \frac{x m^x}{x!} \right) = 2m^2 \sum_{x=0}^{\infty} \frac{m^{x-1}}{(x-1)!} = 2m^2 e^m$$

le premier terme est :

$$\sum_{x=0}^{\infty} x^2 \frac{m^x}{x!} = \sum_{x=0}^{\infty} \frac{x m^x}{(x-1)!} = \sum_{x=0}^{\infty} \frac{m^x}{(x-2)!} + \sum_{x=0}^{\infty} \frac{m^x}{(x-1)!} = m^2 \sum_{x=0}^{\infty} \frac{m^{x-2}}{(x-2)!} + m \sum_{x=0}^{\infty} \frac{m^{x-1}}{(x-1)!} = (m^2 + m) e^m$$

d'où :

$$\sigma^2 = m^2 + m - 2m^2 + m^2 = m$$

donc l'écart quadratique moyen est :

$$\sigma = \sqrt{m}$$

**2- Distribution de Gauss**

Si  $m$  est grand, la distribution est constituée surtout de grandes valeurs de  $x$ , pour lesquelles la distribution de Poisson va pouvoir être transformée, à l'aide de la formule de Stirling :

$$x! \approx \sqrt{2\pi x} x^x e^{-x}$$

en partant de l'équation (1) et après limitation des développements, les calculs donnent :

$$p(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi m}} e^{-\frac{(x-m)^2}{2m}}$$

On voit que cette distribution est symétrique par rapport à la valeur moyenne  $m$ , ce qui n'est pas le cas pour la distribution de Poisson.

On peut remarquer que l'écart type est encore :  $\sigma = \sqrt{m}$ .

Dès que la valeur moyenne obtenue à partir d'un grand nombre de comptages, la probabilité pour qu'un comptage particulier donne une valeur  $x$  comprise entre  $m-\Delta x$  et  $m+\Delta x$  (**figure 2**) est :

$$P_{\Delta x} = \frac{\int_{m-\Delta x}^{m+\Delta x} p dx}{\int_0^{\infty} p dx} = \int_{m-\Delta x}^{m+\Delta x} p dx$$

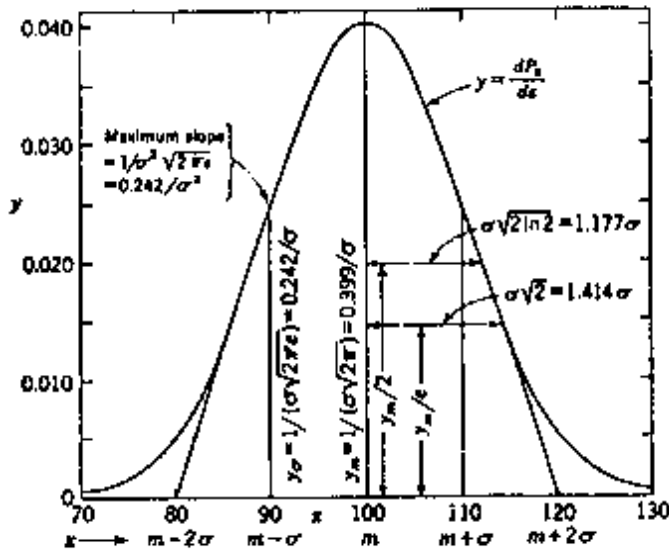
Cette intégrale se calcule numériquement. La fonction d'erreur :

$$\theta(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2} dt$$

est tabulée.  
Si :

$$\Delta x = \sqrt{m} \text{ alors } P_{\Delta x} \approx 0.68$$

$$\Delta x = 2\sqrt{m} \text{ alors } P_{\Delta x} \approx 0.95$$



Donc, si  $x$  est assez grande, on peut confondre  $\sqrt{x}$  et  $\sqrt{m}$ , et  $P_{\Delta x}$  représente alors la probabilité pour que la mesure soit comprise entre  $m-\Delta x$  et  $m+\Delta x$ .

Ce qui précède permet aussi de dire que, une mesure ayant donné la valeur  $x$ , la probabilité pour que  $m$  "valeur moyenne" soit comprise par exemple entre  $x-\sqrt{x}$  et  $x+\sqrt{x}$  est 68%.

C'est pourquoi à chaque valeur  $x$  obtenue dans un comptage, on associera une "barre d'erreur"  $\pm\sqrt{x}$ . On peut définir la précision statistique  $\frac{\sqrt{x}}{x} = \frac{1}{\sqrt{x}}$  qui montre que les mesures seront d'autant meilleures que les taux de comptage sont plus grands.

### 5- Propagation des erreurs

On peut montrer que l'écart-type,  $\sigma$ , d'une fonction  $f$  de plusieurs quantités  $x_1, x_2, \dots, x_n$  mesurées indépendamment les une des autres dont les écarts types sont :  $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n$ , est :

$$\sigma_f^2 = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\right)^2 \sigma_1^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial x_2}\right)^2 \sigma_2^2 + \dots + \left(\frac{\partial f}{\partial x_n}\right)^2 \sigma_n^2$$

Application aux problèmes posés par le bruit de fond :

Il arrive fréquemment qu'un bruit de fond doit être soustrait. Il faut alors faire deux comptages, l'un du bruit de fond, l'autre de la somme (bruit de fond + activité cherchée).

a) Bruit de fond : soit  $n_b$  le nombre de coups enregistrés pendant le temps  $t_b$ .

b) Bruit de fond + Activité cherchée : soit  $n_{bs} \dots t_{bs}$ . Les taux de comptages sont :

$$u_b = \frac{n_b}{t_b} \qquad u_{bs} = \frac{n_{bs}}{t_{bs}} \qquad u_s = u_{bs} - u_b$$

Dans ce cas là :  $\sigma_{u_s}^2 = \sigma_{u_b}^2 + \sigma_{u_{bs}}^2$  or :  $\sigma_{u_b} = \frac{\sqrt{n_b}}{t_b}$  et  $\sigma_{u_{bs}} = \frac{\sqrt{n_{bs}}}{t_{bs}}$

D'où :  $\sigma_{u_s}^2 = \frac{n_b}{t_b^2} + \frac{n_{bs}}{t_{bs}^2} = \frac{u_b}{t_b} + \frac{u_{bs}}{t_{bs}}$

Cette expression montre que si le bruit de fond est important, l'imprécision est grande sur  $u_s$ .

Supposons que  $t_b$  et  $t_{bs}$  soient égaux et valent 20 s, et que :  $u_b = 7$        $u_{bs} = 13$

Alors :  $u_s = 6$       et       $\sigma_{u_s}^2 = \frac{7}{20} + \frac{13}{20} = 1$

La barre d'erreur attachée au résultat sera  $\pm 1$ . La précision statistique est de 1/6 pour  $u_s$  alors qu'elle est de 1/13 pour  $u_{bs}$ .

Elle montre aussi que si on dispose d'un temps total  $T$  pour faire les deux comptages, c'est-à-dire  $t_b + t_{bs} = T$ , il existe une répartition du temps  $t_b$  et  $t_{bs}$  qui minimise l'erreur statistique.

$$\sigma_{u_s}^2 = \frac{u_b}{t_b^2} + \frac{u_{bs}}{T-t_b} \qquad \Rightarrow \qquad \frac{d(\sigma_{u_s}^2)}{dt_b} = -\frac{u_b}{t_b^2} + \frac{u_{bs}}{(T-t_b)^2}$$

$$\sigma_{u_s} \text{ passe par un minimum si : } t_b = \frac{T}{1 + \sqrt{\frac{u_{bs}}{u_b}}}$$

Si par exemple le bruit de fond est de l'ordre du 1/10<sup>ème</sup> du taux de comptage total, le maximum de précision est obtenu en consacrant  $T/4$  à la mesure du bruit de fond.