التـــــــوازي

أ- المستقيمـات المتـوازية

179 – تعريف : **يقـال عن مستقيمين إنهما متوازيان ، اذا كان يحويهما نفـس المستوي وليس بينهما نقطة مشتركة او اذا كانا منطبقين .**
يقـال عن مستقيمين متوازيين ومتمايزين أنهما (متوازيان) تماما » .

ملاحظتان :

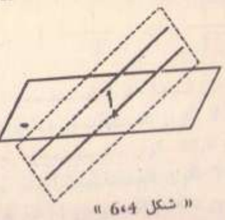
1) اذا اعتبرنا أي مستقيمين من الفضاء . فان المستوي الذي يحوي أحدهما ويشمل نقطة من الآخر ليس من الضروري في الحالة العامة أن يحوي الآخر كله ؛ ولا يكون اذن لهما نقطة مشتركة . ولكنهما غير متوازيين لأنهما لا يقعان في نفس المستوي (انظر شكل 4 ، 4) .

2) اذا كان الأمر يتعلق بمستقيمين واقعين في نفس المستوي فان القضية « مستقيمان متوازيان » هي نفي القضية «مستقيمان متقاطعان » أي أن لهما نقطة وحيدة مشتركة . واذا كان الأمر يتعلق بمستقيمين من الفضاء فان القضية الأولى ليست نفيا للأخرى .

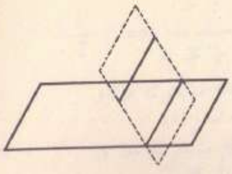
18 – **الشكل المؤلف من مستقيمين متوازيين ومن مستوٍ :**
الخواص التي سنذكرها فيما يلي بيناها في الرابعة ثانوي وتحقيقها مطروح في التمرينين (رقم 552 و 553) .

(أ) **اذا قطع مستو أحد مستقيمين متوازيين ، فانه يقطع الآخر** « شكل 4 ، 6 » .

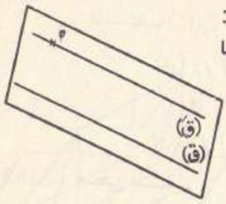
(ب) **اذا احتوى مستو أحد مستقيمين متوازيين ، فانه إما أن يحوي الآخر او لا يشمل اية نقطة منه** « شكل 4، 7 » .



« شكل 4، 6 »


« شكل 4، 7 »

181 – **المستقيم الذي يمر بنقطة ويوازي مستقيمًا آخر :**
يوجد مستقيم ومستقيم واحد (قَ) يوازي مستقيما مفروضا (ق) ويشمل نقطة مفروضة أ .
اذا كان (ق) يشمل أ فان (قَ) ينطبق على (ق).
اذا كان (ق) لا يشمل أ فان (قَ) هو الموازي للمستقيم (ق) والمرسوم من أ في المستوي الوحيد المعين بالمستقيم (ق) والنقطة أ .
« شكل 4 ، 8 » .



« شكل 4، 8 »

182 – **العلاقة « يوازي » :**
العلاقة « يوازي » المعرفة داخل مجموعة مستقيمات الفضاء : **هي علاقة تكافؤ** . وبالفعل :

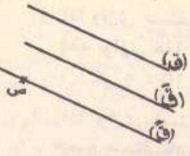
1) هذه العلاقة **انعكاسية** ، لأننا اتفقنا سابقا على القول بأنه :
$\forall$ (ق) ، (ق) // (ق) .

2) هذه العلاقة **تناظرية** ، لأن ترتيب مستقيمين مرتبطين بهذه العلاقة غير وارد في تعريف التوازي :
(ق) // (قَ) $\Longleftrightarrow$ (قَ) // (ق) .

3) هذه العلاقة **متعدية** ، وبالفعل **اذا** كان لدينا ثلاثة مستقيمات مختلفة (ق) ، (قَ) ، (قً) بحيث: (ق) // (قَ) **و** (قَ) // (قً) « شكل 4 ، 9 » .

أ) اذا كانت ص نقطة من (قً) ، فان (ق) والنقطة ص هذه يعينان مستويًا (ك) يشترك مع (قً) في ص ؛ فاذا كانت هذه النقطة **هي** الوحيدة المشتركة فان (ك) سيشترك مع (قَ) ، الذي يوازي (قً) ، بنقطة وحيدة . « بند 180، أ » وبالتالي سيكون (ك) مشتركا مع (ق) الذي يوازي (قَ) بنقطة وحيدة ، وهذا يتناقض مع ما اتفقنا عليه من كون (ك) يحتوي على (ق) ؛ اذن المستوى (ك) يحتوي حتما على (قً) :
(ق) و (قً) واقعان اذن في نفس المستوي

ب) **(ق) ، (قً) ليس لهما نقطة مشتركة ،**
لأنه اذا وجدت مثل هذه النقطة ، فيمر منها مستقيمان مختلفان يوازيان (قَ) ، هما : (ق) و (قً) ؛
وهذا مستحيل (بند 181) .



« شكل 4، 6 »

فالمستقيمان (ق) و (قً) يحققان تعريف التوازي ، وبالتالي :

$$\left(\begin{array}{c}(\text{ق}) \,//\, (\text{قَ}) \\ \text{و} \\ (\text{قَ}) \,//\, (\text{قً})\end{array}\right) \Longrightarrow (\text{ق}) \,//\, (\text{قً}) .$$

183 – **منحى مستقيم** : بما ان العلاقة « يوازي » التي تربط بين مستقيمين هي علاقة تكافؤ ، فانه من الممكن توزيع جميع مستقيمات الفضاء حسب **اصناف تكافؤ** :

أحدها يحتوي على جميع المستقيمات التي توازي مستقيما معينا ، وعليها فقط . وكل صنف منها يُعَيَّنُ بأي مستقيم ممثل لهذا الصنف .

ونقول عن مستقيمات من صنف واحد ، أي عن **مستقيمات متوازية** ، إنها ذات نفس المنحى . ويقال عن الصنف نفسه ، إنه : **منحى مستقيم** .

ب- المستقيمات والمستويات المتوازية

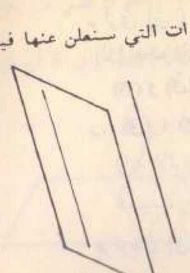
184 – **تعريف** : تعلم من بند (180 ب) انه يوجد ازواج مكونة من مستقيم ومستو لا يشتركان في اية نقطة .

يكون المستقيم موازيا مستوإذا لم يشترك معه في اية نقطة او كان المستوي محتويا على هذا المستقيم .

اذا لم يشترك مستقيم ومستو باية نقطة فيمكننا ان نقول عنهما انهما متوازيان تماما .

القضيه « مستقيم ومستو متوازيان » هي نفي للقضية « مستقيم ومستو متقاطعان » اي لهما نقطة مشتركة وحيدة .

185 – **خواص** : اعطينا في الرابع ثانوي تفسيرات للفقرات التي سنعلن عنها فيما يلي والتي هي مطلوبة في التمارين رقم : « 559 ، 560 ، 561 ، 562 » .



« شكل 4، 10 »

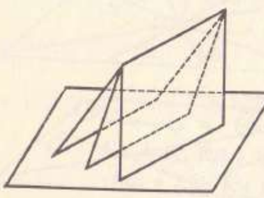
1) **اذا وازى مستقيم مستقيماً من مستو ، فانه يوازي هذا المستوي** (بند 180 ، ب) « شكل 4 ، 10 » .

2) **اذا وازى مستقيم مستويا فانه يوازي جميع مستقيمات تقاطع هذا المستوي مع المستويات التي تحوي هذا المستقيم .**

« شكل 4 ، 11 » .

من (1) و (2) ينتج :

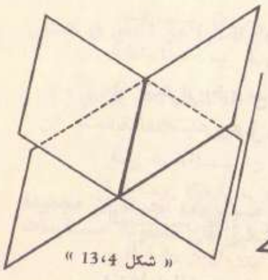
يتوازى مستقيم ومستو اذا كان ، وفقط اذا كان، هذا المستقيم يوازي مستقيماً من المستوي .



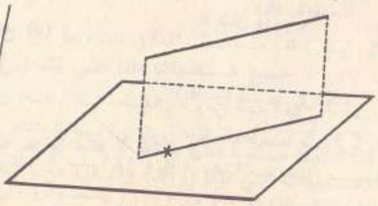
« شكل 4، 11 »

3) **اذا وازى مستقيم مستوياً ؛ فان المستوي يحتوي على كامل المستقيم الموازي للمستقيم الأول والمرسوم من احدى نقط المستوي** « شكل 4 ، 12 » .

4) **اذا وازى مستقيم مستويين متقاطعين فانه يوازي مستقيم تقاطعهما** « شكل 4 ، 13 »



« شكل 4، 13 »



« شكل 4، 12 »

186 – **المستويات المارة من نقطة والتي توازي مستقيماً :**

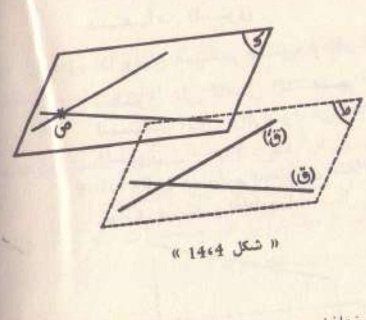
اذا كان لدينا مستقيم (ق) ونقطة ا فانه يوجد عدد **غير منته** من المستويات التي تمر من ا وتوازي (ق) : تلك المستويات هي كل المستويات التي تحتوي على المستقيم الذي يوازي (ق) ويمر من ا ، وهذه المستويات فقط . « بند 185 ، 1 و 3 » .

187 – **المستوى المار من نقطة ، والذي يوازي مستقيمين :**

اذا كان لدينا مستقيمان (ق) و (قَ) ونقطة ا فان مستويا يشمل ا يكون موازياً للمستقيمين (ق) و (قَ) اذا كان ، وفقط اذا كان ، يحتوى على المستقيمين (د) و (دَ) الموازيين للمستقيمين (ق) و (قَ) والمارين من ا . هذا المستوى يتعين اذن بصورة وحيدة بالمستقيمين (د) و (دَ) فيما اذا كانا متمايزين ، اى عندما يكون (ق) و (قَ) غير متوازيين .

تطبيق : المستوي الذي يوازي مستقيمين واقعين فى مستو :
ليكن (ق) و (قَ) مستقيمين غير متوازيين واقعين فى مستوٍ (ط) ، ولتكن ص نقطة مفروضة ، فالنتيجة السابقة تعلن :

يوجد مستو وحيد (ك) يشمل ص ويوازي المستقيمين (ق) و (قَ) بآن واحد « شكل 4 ، 14 » .

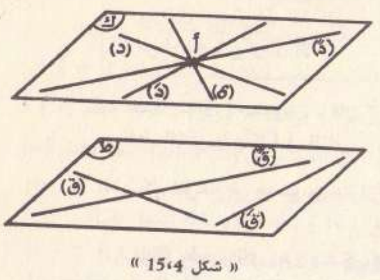


« شكل 14،4 »

خاصة.اذاوقعت ص فى (ط) انطبق (ك) على (ط) .
واذا كانت ص خارج (ط) **لا يشترك (ط) مع (ك) فى اية نقطة** . وبالفعل :
فمن جهة المستويان (ط) و (ك) مختلفان ، ومن جهة اخرى ، (ط) و (ك) غير متقاطعين لأنه لو تم ذلك اوجب ان يكون خط تقاطعهما موازياً للمستقيمين (ق) و (قَ) « بند 185 ، 4 » وهذا مستحيل بسبب كون (ق) و (قَ) غير متوازيين ، وباختصار :
عندما يوازي مستو مستقيمين غير متوازيين واقعين فى مستوٍ (ط) ، فانه اما ان ينطبق هذا المستوي على (ط) ، او لا يشترك معه فى اية نقطة ؛ وفى الحالتين يكون موازيا لجميع مستقيمات المستوي (ط) .

188 – **المستقيمات المارة من نقطة والموازية لمستوٍ :**
نفرض لدينا مستوياً (ط) ونقطة ا .
يوجد عدد غير منته من المستقيمات المارة من ا والتي توازي (ط) : فهي المستقيمات المارة من ا والموازية الى مختلف مستقيمات المستوي (ط) وهذه المستقيمات فقط (بند 185) .

خاصة مجموعة هذه المستقيمات :
ليكن (د) و (دَ) مستقيمين من هذه المجموعة يوازيان على الترتيب مستقيمين (ق) و (قَ) غير متوازيين واقعين فى (ط) ، فهما يعينان مستوياً (ك) ، وكل من المستويين (ط) و (ك) يوازي مستقيمين غير متوازيين من الآخر ؛ اذن كل منهما يوازي جميع مستقيمات الآخر (بند 187) « شكل 4، 15 »



« شكل 15،4 »

1) ليكن (دً) مستقيماً آخر يوازي (ط) ويمر من ا ، فهو يوازي مستقيماً (قً) واقعاً فى (ط) . والمستوي (ك) يوازي (قً) ، فالمستقيم (دً) يقع كله فى (ك) « بند 185 ، 3 » .

اذن : **جميع المستقيمات التي توازي (ط) والمارة من ا تقع فى نفس المستوى (ك) .**

2) ليكن (ϭ) مستقيماً واقعاً في (ك) ويمر من ا ، فالمستوي (ط) يوازي (ϭ).
اذن : **جميع مستقيمات (ك) التي تشمل ا هي مستقيمات تمر من ا وتوازي المستوي (ط) .**
واخيرا نستخلص ما يلي :
اذا اعطينا مستوياً (ط) ونقطة ا فانه يوجد مستو (ك) بحيث ان مجموعة المستقيمات التي توازي (ط) والمارة من ا تنطبق على مجموعة مستقيمات المستوي (ك) المارة من ا .
المستوي (ك) يتعين بمستقيمين مختلفين يوازيان (ط) ويشملان ا .

(ج) المستويات المتوازية

189 – **تعريف :** راينا فى البند 187 ان هنالك مستويات ليس لها نقط مشتركة.
نقول عن مستويين إنهما متوازيان إذا لم يكن لهما نقط مشتركة او كانا منطبقين .
يمكننا ان نقول عن مستويين غير مشتركين باية نقطة إنهما متوازيان **تماماً** . القضية «**المستويان متوازيان**» هي نفي القضية «المستويان متقاطعان» (اي لهما مستقيم مشترك) .

190 – **خواص :**
1) **اذا وازى مستو مستقيمين متقاطعين واقعين فى مستوٍ آخر فانه يوازي هذا المستوي** (بند 187) .
2) **عندما يتوازى مستويان ، فان كلاً منهما يوازي جميع مستقيمات الآخر** (بند 184 البرهان بالخلف) .
من (1) و (2) ينتج :

يتوازى مستويان اذا كان ، وفقط اذا كان،مستقيمان متقاطعان من أحدهما يوازيان الآخر .

3) **عندما يتوازى مستويان ، فان كل مستقيم يوازي احدهما ويمر من احدى نقط الثاني يقع كليًا فى الثاني .** (البند 190 ، 2 والبند 185 ، 3)

– الشكل المؤلف من مستويين متوازيين ومستقيم :

ليكن لدينا المستويان (ط) و (طَ) المتوازيان وليكن (ق) مستقيماً ما .

1) لنفرض (ق) يوازي (ط) « شكل 4،16 – أ » . فاذا كانت ص نقطة من (ط) فان المستقيم (د) الذي يوازي (ق) ويمر من ص يقع فى (ط) ، والمستقيم (دَ) الذي يوازي (د) ويمر من نقطة صَ الواقعة فى (طَ) يقع بالتالي فى (طَ) .

اذن : فالمستقيمان (دَ) و (ق) الذي كل منهما يوازي (د) هما متوازيان ، ونستنتج ان (ق) يوازي (طَ) .

اذا وازي مستقيم احد مستويين متوازيين فانه يوازي الآخر .

2) لنفرض (ق) يقطع (ط)«شكل 4،16 – ب » . القضيتان المعاكستان للقضيتين : « (ق) // (ط) » و « (ق) // (طَ)» هما : «(ق) يقطع (ط)» و « (ق) يقطع (طَ) » لكننا نعلم من (بند 13) انه اذا كانت س ، ع قضيتين فان :

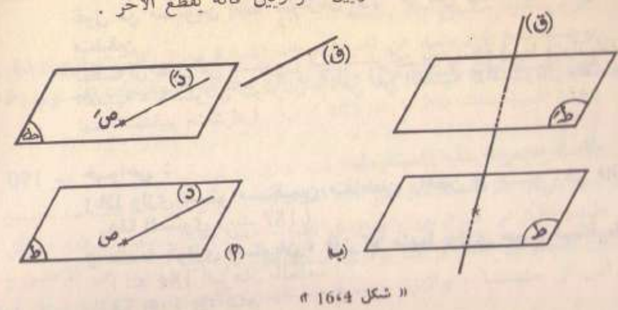
الاستلزام : س ⟸ ع

له نتيجة : نفي ع ⟸ نفي س .

فنستنتج من 1 :

انه اذا قطع (ق) احد المستويين فانه يقطع الآخر .

اذا قطع مستقيم احد مستويين متوازيين فانه يقطع الآخر .



« شكل 4،16 »

192 – **الشكل المؤلف من مستويين متوازيين ومستو :**

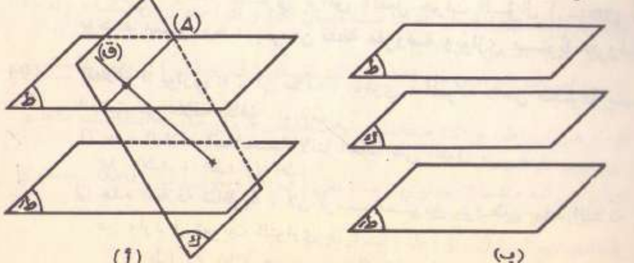
ليكن لدينا (ط) و (طَ) مستويان متوازيان وليكن (ك) مستوياً آخر.

1) لنفرض أن (ك) يقطع (ط) وفق مستقيم (△) « شكل 4،17 – أ » . فاذا كان (ق) مستقيماً يقع في (ك) ويقطع (△) ، فانه يقطع (ط) ، وبالتالي يقطع (طَ) ، ويكون اذن للمستويين (ك) و (طَ) نقطة مشتركة : ولكنهما مختلفان لأن (طَ) لا يحتوي على (ق) .

اذن : (طَ) و (ك) متقاطعان .

اذا قطع مستو احد مستويين متوازيين فانه يقطع الآخر .

خاصة : اذا قطع مستو مستويين متوازيين فان خطي تقاطعهما متوازيان .



« شكل 4،17 »

وبالفعل، فهما من جهة واقعان فى مستو واحد ومن جهة أخرى موجودان فى مستويين متوازيين فليس بينهما اذن أية نقطة مشتركة .

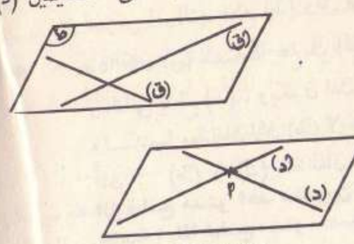
2) لنفرض أن (ك) يوازي (ط) «شكل 4،17 – ب» فللسبب المشابه للسبب الذي استنتجناه فى (2) ابتداءً من (1) فى الفقرة السابقة يؤدي الى النتيجة الآتية :

اذا وازى مستو احد مستويين متوازيين فانه يوازي الآخر .

193 – **المستوي المار من نقطة والموازي لمستوٍ آخر :**

اذا كان لدينا **مستو** (ط) ونقطة أ ، فهل يوجد مستو يوازي (ط) ويشمل أ ؟

اذا وجد مثل هذا المستوي ، وكان (ق) و (قَ) مستقيمين متقاطعين ومختارين من المستوي (ط) ، فانه يحتوي بالضرورة على المستقيمين (د) و (دَ) المرسومين من أ والموازيين الى (ق) و (قَ) « شكل 4 ، 18 » (بند 190 ، 3) .



« شكل 4،18 »

والمستوى المعين بالمستقيمين (د) و (دَ) يستطيع وحده أن يجيب عن هذا السؤال المطروح . وهذا المستوي يوافق بالفعل جواب السؤال (بند 190 ، 1)
يوجد مستو وحيد يمر من نقطة مفروضة ويوازي مستويا مفروضاً .

19 – **العلاقة « يوازي »** : ان علاقة « يوازي » المعرفة داخل مجموعة مستويات الفضاء هي **علاقة تكافؤ** ، وبالفعل :

1) هذه العلاقة **انعكاسية** لأننا اتفقنا على القول :
∀ (ط) ، (ط) // (ط)

2) هذه العلاقة **تناظرية** ، لأن ترتيب مستويين مرتبطين بهذه العلاقة غير وارد فى تعريف التوازي :
(ط) // (طَ) ⟺ (طَ) // (ط) .

3) هذه العلاقة **متعدية**، لأن الخاصة «عندما يتوازى مستويان ، فان كل مستو يوازي احدهما يوازي الآخر » تؤكد ما يلي :
$\left\{\begin{array}{l}(ط) // (طَ) \\ و \\ (طَ) // (طً)\end{array}\right. \Longrightarrow$ (ط) // (طً) .

– **منحى مستو** : بما ان العلاقة « يوازي » التي تربط بين مستويين هي علاقة تكافؤ ، فمن الممكن توزيع جميع مستويات الفضاء حسب **اصناف تكافؤ** احدها يحتوي على جميع المستويات التي توازي مستويا معينا ، وعليها فقط ، وكل صنف منها يعين بأي مستو ممثل لهذا الصنف .
ونقول عن مستويات من صنف واحد ، اي عن مستويات متوازية ، إنها ذات نفس المنحى ، ويقال عن الصنف نفسه ، إنه : **منحى مستو** .
ملاحظة : ان منحيي مستقيمين يعينان منحى مستو .

تمـــارين

552 – دراسة البند 180 (أ) :
لدينا مستقيمان (ق) و (قَ) متوازيان تماما ولدينا مستو (ط) يقطع (ق) فى س :
1) استناداً الى تعريف التوازي ، قل لماذا يقع المستقيمان (ق) و(قَ) فى نفس المستوي (ك).
2) برهن ان المستويين (ط) و (ك) متقاطعان ويرمز بالرمز (△) لمستقيم تقاطعهما .
3) برهن ان المستقيمين (△) و (قَ) متقاطعان .
4) استنتج أن (قَ) و (ط) متقاطعان .

553 – **دراسة البند 180 (ب)** : لدينا مستقيمان (ق) و (قَ) متوازيان تماما ، ولدينا مستو (ط) يحتوي على (ق) :
1) من تعريف التوازي قل لماذا يقع المستقيمان (ق)و (قَ) فى نفس المستوي (ك) .
2) برهن ان (ط) و (ك) متقاطعان او متطابقان ، وفى حالة التقاطع ماهو مستقيم تقاطعهما . ؟
3) برهن انه عندما لا يحتوي (ط) على (قَ) ، ويكون (قَ) قاطعا للمستوي (ط) فان (قَ) يقطع الآخر .
4) استنتج أن (قَ) و (ط) متوازيان .

554 – استنتج الخاصة (ب)فى البند 180 من الخاصة (أ) فى نفس البند .

555 – 1) نُعطى مستقيما (ق) ، هل يمكن القول « **مستوي** المستقيم (ق) » ؟
2) نُعطى مستقيماً ثانياً (قَ) ، بدون معلومات اضافية ، هل يمكن القول « مستوي المستقيمين (ق) و (قَ) » ؟
اذا علم ان (ق) و (قَ) متوازيان فهل يمكن قول « مستوي المستقيمين (ق) و (قَ) »؟
3) نُعطى مستقيمات (ق) ، (قَ) ، (قً) متوازية مثنى مثنى ، هل يمكن القول « مستوي هذه المستقيمات الثلاثة »؟وضح جوابك بالرسم .

556 – لدينا مستقيمان (ق) و (قَ) : يفرض انه يوجد مستقيمان متوازيان (ل) و (لَ) كل منهما يقطع (ق) و (قَ) .
ماذا يمكن ان نقول عن المستقيمين (ق) و (قَ) ؟ نعطى رباعي وجوه أ ب جـ د هل يمكن ان يتوازى حرفان متقابلان منه ؟

551 - On donne un triangle ABC dans un plan (P), un point O hors de ce plan et on marque sur OA, OB et OC respectivement les points A', B', C' tels que :

$$\frac{\overline{OA'}}{\overline{OA}} = \frac{1}{3}, \quad \frac{\overline{OB'}}{\overline{OB}} = \frac{\overline{OC'}}{\overline{OC}} = \frac{1}{2}.$$

1° Dire pourquoi les droites AB et A'B' ont un point commun B'' et pourquoi les droites BC et A'B' n'en ont pas. Même question pour les droites AC et A'C' qui se coupent en C'', et pour les droites AB et A'C' qui ne se coupent pas. Déterminer l'intersection des plans (ABC et A'B'C').

2° Montrer que B est le milieu de AB'' : on étudiera la figure contenue dans le plan OAB, et on pourra utiliser la parallèle à A'B' menée par B. I étant le point d'intersection de cette parallèle avec AO, évaluer les rapports $\frac{\overline{A'B'}}{\overline{IB}}$, $\frac{\overline{IB}}{\overline{A'B''}}$, $\frac{\overline{A'B'}}{\overline{A'B''}}$. En déduire que B'C' et B''C'' sont parallèles.

3° Montrer que les milieux K de BC, K' de B'C', K'' de B''C'' sont coplanaires avec les points O et A.

4° On désigne par G le centre de gravité du triangle ABC, la droite OG perce en G' le plan (A'B'C'). Calculer le rapport $\frac{\overline{OG'}}{\overline{OG}}$.

PARALLÉLISME

A. — DROITES PARALLÈLES

179 ***Définition*** **Deux droites sont dites parallèles, soit lorsqu'elles sont contenues dans un même plan et qu'elles n'ont pas de point commun, soit lorsqu'elles sont confondues.**

Deux droites parallèles et distinctes pourront être appelées « parallèles au sens strict ».

Remarques.

1° Deux droites de l'espace étant choisies au hasard, le plan contenant l'une et un point de l'autre ne contient généralement pas cette autre droite en entier ; les droites n'ont alors aucun point commun, mais elles ne sont pas parallèles car elles ne sont pas dans un même plan (voir figure 4,4).

2° Lorsqu'elle concerne deux droites d'un même plan, la proposition « deux droites sont parallèles » est la négation de la proposition « deux droites sont sécantes », c'est-à-dire, ont un seul point commun.

Lorsqu'elle concerne deux droites de l'espace, la première proposition n'est pas la négation de l'autre.

180 ***Figure formée par deux droites parallèles et un plan*** Les propriétés rappelées ci-dessous ont été démontrées en Troisième, leur justification est proposée en exercice (n^os^ 552 et 553).

a) **Lorsque deux droites sont parallèles, si un plan coupe l'une, il coupe l'autre** (Fig. 4,6).

b) **Lorsque deux droites sont parallèles, si un plan contient l'une, ou bien ce plan n'a aucun point commun avec l'autre, ou bien il la contient** (Fig. 4,7).

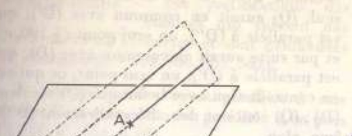


Fig. 4,6.

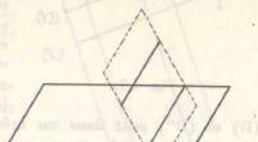


Fig. 4,7.

181 *Droite passant par un point et parallèle à une droite*

Il existe une droite (D') et une seule parallèle à une droite donnée (D) et contenant un point donné A.

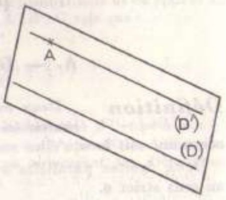


Fig. 4,8.

Si (D) contient A, (D') est confondue avec (D).

Si (D) ne contient pas A, (D') est la parallèle à (D) menée par A dans le plan unique déterminé par (D) et A (Fig. 4,8).

182 *La relation « est parallèle à »*

La relation « est parallèle à », définie à l'intérieur de l'ensemble des droites de l'espace, est une **relation d'équivalence.**

En effet :

1° La relation est **réflexive**, puisqu'il a été convenu de dire :

$$\forall\,(D),\quad (D)\;//\;(D).$$

2° La relation est **symétrique**, car, d'après la définition, l'ordre des droites liées par la relation n'intervient pas :

$$(D)\;//\;(D') \iff (D')\;//\;(D).$$

3° La relation est **transitive** ; soient en effet trois droites distinctes (D), (D'), (D'') telles que (D) // (D') et (D') // (D'') (Fig. 4,9).

Fig. 4,9.

a) I étant un point de (D''), (D) et ce point I déterminent un plan (Q) qui a le point I en commun avec (D'') ; si ce point était le seul, (Q) aurait en commun avec (D'), qui est parallèle à (D''), un seul point (§ 180, *a*), et par suite aurait en commun avec (D), qui est parallèle à (D'), un seul point, ce qui est en contradiction avec le fait que (Q) contient (D) ; (Q) contient donc nécessairement (D'') : **(D) et (D'') sont dans un même plan.**

b) **(D) et (D'') n'ont pas de point commun**, car par un tel point, s'il existait, il passerait deux parallèles distinctes à (D') : les droites (D) et (D'') ; ceci est impossible (§ 181).

(D) et (D'') satisfont donc à la définition des parallèles, et par suite :

$$\left.\begin{array}{l}(D)\;//\;(D')\\(D')\;//\;(D'')\end{array}\right\}\Longrightarrow (D)\;//\;(D'').$$

183 *Direction de droite*

Puisque la relation « est parallèle à » liant deux droites est une relation d'équivalence, il est possible de répartir toutes les droites de l'espace en **classes d'équivalence** ; une classe contient toutes les droites parallèles à une droite déterminée et elles seulement ; chaque classe est déterminée par l'un quelconque de ses représentants.

On dit des droites d'une même classe, c'est-à-dire de droites parallèles qu'elles ont la même direction ; on dit de la classe elle-même qu'elle est **une direction de droite.**

B. — *DROITES ET PLANS PARALLÈLES*

184 *Définition*

Nous savons (§ 180, *b*) qu'il existe des couples droite et plan qui n'ont aucun point commun.

Une droite et un plan sont dits parallèles soit lorsqu'ils n'ont aucun point commun, soit lorsque la droite est incluse dans le plan.

Une droite et un plan qui n'ont pas de point commun pourront être appelés parallèles « au sens strict ».

La proposition « une droite et un plan sont parallèles » est la négation de la proposition « une droite et un plan sont sécants », c'est-à-dire ont un seul point commun.

185 *Propriétés*

Les justifications des énoncés qui suivent ont été données en Troisième et sont demandées en exercices (nos 559, 560, 561, 562).

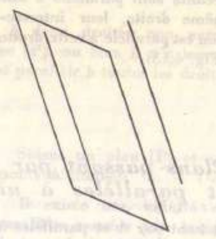


Fig. 4,10.

1° Lorsqu'une droite est parallèle à une droite d'un plan, elle est parallèle à ce plan (§ 180, *b*) (Fig. 4,10).

2° Lorsqu'une droite est parallèle à un plan, elle est parallèle aux intersections de ce plan avec ceux qui la contiennent (Fig. 4,11).

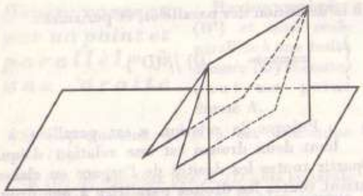


Fig. 4,11.

De (1) et (2) il résulte que :

Un plan et une droite sont parallèles si, et seulement si la droite est parallèle à une droite du plan.

3° Lorsqu'une droite et un plan sont parallèles, le plan contient en entier toute parallèle à la droite menée par l'un de ses points (Fig. 4,12).

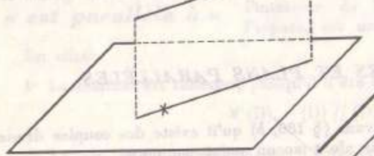


Fig. 4,12.

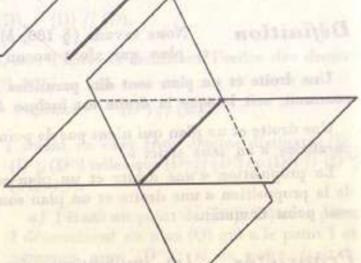


Fig. 4,13.

4° Lorsque deux plans sécants sont parallèles à une même droite, leur intersection est parallèle à cette droite (Fig. 4,13).

186 *Plans passant par un point et parallèles à une droite*

Soient une droite (D) et un point A donnés.

Il existe **une infinité** de plans passant par A et parallèles à (D) : ce sont tous les plans qui contiennent la parallèle à (D) passant par A, et ceux-là seulement (§ 185, 1 et 3).

187 *Plan passant par un point et parallèle à deux droites*

Soient deux droites (D) et (D′) et un point A donnés.

Un plan contenant A est parallèle à (D) et à (D′) si, et seulement s'il contient la parallèle (*d*) à (D) et la parallèle (*d*′) à (D′) menées par A ; il est donc défini de façon unique par les deux droites (*d*) et (*d*′) si elles sont distinctes, c'est-à-dire si (D) et (D′) ne sont pas parallèles.

— Application : Plan parallèle à deux droites d'un plan

Soient (D) et (D′) deux droites **non parallèles** d'un plan (P), et I un point donné. Le résultat précédent s'énonce :

Il existe un plan unique (Q) contenant I et parallèle à la fois à (D) et à (D′) (Fig. 4,14).

Propriété. Si I est dans (P), (Q) est identique à (P).

Si I est extérieur à (P), **(Q) n'a aucun point commun avec (P).** En effet : d'une part (P) et (Q) sont distincts ; d'autre part, (P) et (Q) ne sont pas sécants, puisque l'intersection de (P) et (Q) devrait être parallèle à la fois aux deux droites (D) et (D′) (§ 185, 4), ce qui est impossible puisque (D) et (D′) ne sont pas parallèles.

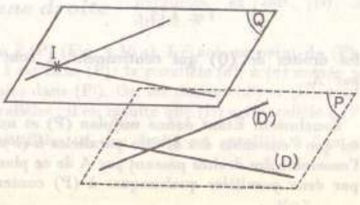


Fig. 4,14.

En résumé : lorsqu'un plan est parallèle à deux droites non parallèles d'un plan (P), ou bien il est confondu avec (P), ou bien il n'a aucun point commun avec (P) ; dans les deux cas, il est parallèle à toutes les droites de ce plan (P).

188 *Droites passant par un point et parallèles à un plan*

Soient un plan (P) et un point A donnés.

Il existe une infinité de droites passant par A et parallèles à (P) : les parallèles menées par A aux diverses droites de (P) et elles seulement (§ 185, énoncé encadré).

Propriété de l'ensemble de ces droites. Soient (d) et (d') deux d'entre elles respectivement parallèles aux droites (D) et (D′) non parallèles de (P) ; elles déterminent un plan (Q) ; chacun des plans (P) et (Q) est parallèle à deux droites non parallèles de l'autre, donc parallèle à toutes les droites de l'autre (§ 187) (Fig. 4,15).

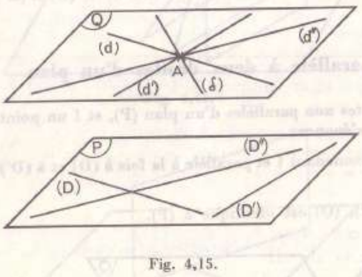


Fig. 4,15.

a) Soit (d'') une autre droite parallèle à (P) et passant par A ; elle est parallèle à une droite (D″) de (P) ; (Q) est parallèle à (D″) ; (d'') est par suite entièrement dans (Q) (§ 185, 3) d'où : **toutes les parallèles à (P) menées par A sont dans le même plan (Q).**

b) Soit (δ) une droite de (Q) passant par A ; (P) est parallèle à (δ) ; d'où : **toutes les droites de (Q) qui contiennent A sont des parallèles à (P) menées par A.**

Conclusion. Étant donné un plan (P) et un point A, il existe un plan (Q) tel que l'ensemble des droites parallèles à (P) et passant par A coïncide avec l'ensemble des droites passant par A de ce plan (Q) ; le plan (Q) est déterminé par deux parallèles quelconques à (P) contenant A.

C. — *PLANS PARALLÈLES*

189 *Définition*

Nous avons vu (§ 187) qu'il existe des plans n'ayant pas de points communs.

Deux plans sont dits parallèles soit lorsqu'ils n'ont pas de points communs, soit lorsqu'ils sont confondus.

Deux plans n'ayant pas de point commun pourront être appelés parallèles « au sens strict ».

La proposition « deux plans sont parallèles » est la négation de la proposition « deux plans sont sécants », c'est-à-dire, ont une seule droite en commun.

190 *Propriétés*

1° **Lorsqu'un plan est parallèle à deux droites sécantes d'un plan, il est parallèle à ce plan** (§ 187).

2° **Lorsque deux plans sont parallèles, chacun d'eux est parallèle à toutes les droites de l'autre** (§ 184, démonstration « par l'absurde »).

De (1) et de (2) il résulte que :

Deux plans sont parallèles si, et seulement si deux droites sécantes de l'un sont parallèles à l'autre.

3° **Lorsque deux plans sont parallèles, chacun contient en entier toute droite parallèle à l'autre menée par l'un de ses points** (§§ 190, 2 et 185, 3).

191 *Figure formée par deux plans parallèles et une droite*

Soient (P) et (P′) deux plans parallèles, et soit (D) une droite.

a) Supposons (D) parallèle à (P) (Fig. 4,16 *a*). I étant un point de (P) la parallèle (d) à (D) menée par I est dans (P) ; la parallèle (d') à (d) menée par un point I′ de (P′) est par suite dans (P′). Or, les droites (d') et (D), toutes deux parallèles à (d), sont parallèles ; il en résulte que (D) est parallèle à (P′).

Lorsque deux plans sont parallèles, si une droite est parallèle à l'un elle est parallèle à l'autre.

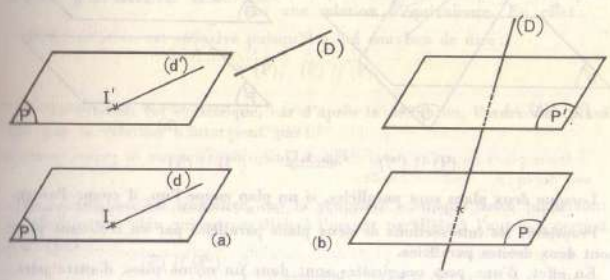


Fig. 4,16.

b) Supposons que (D) coupe (P) (Fig. 4,16 *b*). Les propositions contraires de (D) // (P) et (D) // (P′) sont : (D) coupe (P) et (D) coupe (P′) ; or, nous savons (§ 13) que, A et B étant deux propositions,

l'implication $\quad A \Longrightarrow B$

a pour conséquence $\quad \text{non } B \Longrightarrow \text{non } A.$

Il résulte donc de *a)* que si (D) coupe l'un des plans, elle coupe aussi l'autre.

Lorsque deux plans sont parallèles, si une droite coupe l'un, elle coupe l'autre.

192 ***Figure formée par deux plans parallèles et un plan***

Soient (P) et (P′) deux plans parallèles, et soit (Q) un autre plan.

a) Supposons que (Q) coupe (P) suivant la droite (△) (Fig. 4,17 *a*). Soit (L) une droite de (Q) coupant (△) ; cette droite coupe (P), par suite elle coupe (P′) ; (Q) et (P′) ne sont donc pas sans points communs : or ils sont distincts puisque (L) n'est pas contenue dans (P′). (P′) et (Q) sont donc sécants.

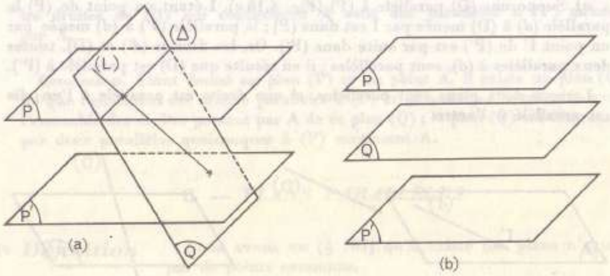


Fig. 4,17.

Lorsque deux plans sont parallèles, si un plan coupe l'un, il coupe l'autre.

Propriété : les intersections de deux plans parallèles par un troisième plan sont deux droites parallèles.

En effet, d'une part ces droites sont dans un même plan, d'autre part, étant dans des plans parallèles, elles sont sans point commun.

b) Supposons (Q) parallèle à (P) (Fig. 4,17 *b*). Un raisonnement analogue à celui qui établit (*b*) à partir de (*a*) dans le § précédent conduit à la conclusion : **Lorsque deux plans sont parallèles, si un plan est parallèle à l'un il est parallèle à l'autre.**

193 ***Plan passant par un point et parallèle à un plan***

Soient (P) un plan et A un point donnés. Existe-t-il un plan parallèle à (P) et contenant A?

S'il existe un tel plan, (D) et (D′) étant deux droites sécantes choisies dans (P), il contient nécessairement les parallèles (*d*) et (*d′*) à (D) et (D′) menées par A (Fig. 4,18) (§ 190, 3).

Seul le plan déterminé par (*d*) et (*d′*) peut donc répondre à la question.

Ce plan convient effectivement (§ 190, 1).

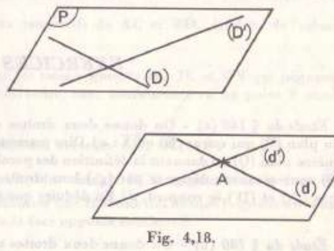


Fig. 4,18.

Il existe un plan et un seul parallèle à un plan donné et passant par un point donné.

194 ***La relation « est parallèle à »***

La relation « est parallèle à » définie à l'intérieur de l'ensemble des plans de l'espace est une **relation d'équivalence.** En effet :

1° La relation est **réflexive** puisqu'il a été convenu de dire :

$$\forall (P), \quad (P) \,//\, (P).$$

2° La relation est **symétrique,** car d'après la définition, l'ordre des plans liés par la relation n'intervient pas :

$$(P) \,//\, (P') \iff (P') \,//\, (P).$$

3° La relation est **transitive,** car la propriété « lorsque deux plans sont parallèles, tout plan qui est parallèle à l'un est parallèle à l'autre » permet d'affirmer :

$$\left.\begin{array}{l}(P) \,//\, (P') \\ (P') \,//\, (P'')\end{array}\right\} \Longrightarrow (P) \,//\, (P'').$$

195 *Direction de plan* Puisque la relation « est parallèle à » liant deux plans est une relation d'équivalence, il est possible de répartir tous les plans de l'espace en **classes d'équivalence** ; une classe contient tous les plans parallèles à un plan déterminé et eux seulement ; une classe est déterminée par l'un quelconque de ses représentants.

On dit des plans d'une même classe, c'est-à-dire de plans parallèles, qu'ils ont la **même direction** ; la classe elle-même s'appelle **« direction de plan »**.

Remarque. Deux directions de droite déterminent une direction de plan.

EXERCICES

552 *Étude du § 180* (a) - On donne deux droites strictement parallèles (D) et (D′) et un plan (P) qui coupe (D) en A : *a)* Dire pourquoi les droites (D) et (D′) sont dans un même plan (Q) en donnant la définition des parallèles. *b)* Montrer que les plans (P) et (Q) sont sécants ; désigner par (△) leur droite d'intersection. *c)* Montrer que les droites (△) et (D′) se coupent. *d)* En déduire que (D′) et (P) se coupent.

553 *Étude du § 180* (b) - On donne deux droites strictement parallèles (D) et (D′) et un plan (P) contenant (D): *a)* Dire pourquoi les droites (D) et (D′) sont dans un même plan (Q) en donnant la définition des parallèles. *b)* Montrer que (P) et (Q) sont sécants ou confondus ; lorsqu'ils sont sécants, nommer leur droite d'intersection. *c)* Montrer que lorsque (D′) n'est pas incluse dans (P), si elle coupait (P) elle couperait (D). *d)* En déduire que (D′) et (P) sont parallèles.

554 - Déduire la propriété *(b)* du § 180 de la propriété *(a)* du même paragraphe.

555 - 1° On donne une droite (D) ; peut-on parler « du plan de la droite (D) » ?

2° On donne une seconde droite (D′) ; sans renseignement supplémentaire, peut-on parler du « plan des deux droites (D) et (D′) » ? peut-on le faire si on sait que (D) et (D′) sont parallèles ?

3° On donne trois droites (D), (D′), (D″) deux à deux parallèles ; peut-on parler « du plan de ces trois droites » ? Faire une figure mettant la réponse en évidence.

556 - Soient deux droites (D) et (D′) : on suppose qu'il existe deux droites parallèles (L) et (L′) s'appuyant chacune sur (D) et sur (D′) ; que peut-on dire des droites (D) et (D′) ?

On donne un tétraèdre ABCD. Se peut-il que deux arêtes opposées soient parallèles ?

557 - On donne deux droites parallèles (A) et (B) et deux droites (C) et (D) non parallèles aux deux premières. Déterminer l'ensemble des droites rencontrant les quatre droites précédentes. Discuter, c'est-à-dire indiquer comment le résultat dépend de la disposition des données.

558 - On considère le tétraèdre ABCD ; soient I, J, K, L, les milieux de AB, BC, CD et DA.

1° Montrer que IJ et KL sont parallèles. Quelle est la nature du quadrilatère IJKL ?

2° M et N désignant les milieux respectifs de AC et BD, étudier de même le quadrilatère NJML.

3° Déduire de ce qui précède que les trois segments IK, JL et MN qui joignent les milieux des arêtes opposées d'un tétraèdre, sont concourants en un point S situé au milieu de chacun.

4° Exprimer le vecteur $\overrightarrow{AS}$ à l'aide des vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AD}$.

5° G désignant le centre de gravité du triangle BCD, exprimer le vecteur $\overrightarrow{AG}$ à l'aide des vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AD}$. Montrer que chacune des droites joignant un sommet du tétraèdre au centre de gravité de la face opposée contient S.

559 *Étude du § 185, 1°* - Une droite (D) est parallèle à une droite (△) d'un plan (P). Montrer que, ou bien (D) est incluse dans (P), ou bien (D) n'a pas de point commun avec (P) ; pour cela, on prouvera que l'affirmation « (D) coupe (P) » est fausse, soit en utilisant l'énoncé *(a)* du paragraphe 180, soit en utilisant le fait que (D) et (△) appartiennent à un même plan (Q).

560 *Étude du § 185, 2°* - Une droite (D) est strictement parallèle à un plan (P). Un plan (Q) contient (D) et un point A de (P): *a)* Dire pourquoi (P) et (Q) sont sécants. *b)* Dire pourquoi (D) ne coupe pas leur intersection (△). *c)* En déduire que (D) et (△) sont parallèles.

561 *Étude du § 185, 3°* - Une droite (D) est strictement parallèle à un plan (P). A étant un point de (P), on désigne par (△) la droite d'intersection de (P) et du plan déterminé par A et (D) ; on justifiera d'abord l'existence de ce plan, puis l'existence de sa droite d'intersection avec (P). On désigne par (△′) la parallèle à (D) passant par (A). Dire pourquoi (△) et (△′) sont confondues, en énonçant les théorèmes utilisés.

562 *Étude du § 185, 4°* - *a)* Deux plans sécants (P) et (P′) sont parallèles à une droite (D). Soit A un point de leur intersection (△) ; soit (△′) la parallèle à (D) contenant A. Utiliser la propriété (3) du paragraphe 185 pour montrer que (△) et (△′) sont confondues.

أ) (ق) و (ق') مستقيمان مختلفان ومتوازيان .
(Δ) و (Δ') مستقيمان مختلفان بحيث يكون :
(Δ) $\perp$ (ق) و (Δ') $\perp$ (ق') .
أثبت أن (Δ) // (Δ') .
هل تحصل على نفس النتيجة إذا كان (Δ) $\neq$ (ق) و (Δ') $\neq$ (ق') ؟

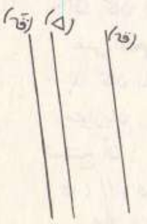
ب) [م س ، م ع] قطاع زاوٍ غير معدوم وليس نصف مستوي .
(ق) و (ق') مستقيمان مختلفان .
أثبت أنه :
– إذا كان (ق) عموديا على حامل [م س وكان (ق') عموديا على حامل [م ع ، فان (ق) و (ق') متقاطعان .
– إذا كان (ق) موازيا حامل [م س وكان (ق') موازيا حامل [م ع ، فان (ق) و (ق') متقاطعان .

2 ـ خـــواص

1.2. خواص العلاقة « ... يوازي ... » :

لتكن ق مجموعة مستقيمات المستوي .
سنرمز للعلاقة « ... يوازي ... » في المجموعة ق بالرمز « ... // ... » .
• من أجل كل مستقيم (ق) ، لديك : (ق) // (ق) .
كل مستقيم (ق) موازي نفسه .
تستنتج أن :
العلاقة « ... // ... » انعكاسية .
• إن تعريف المستقيمات المتوازية تخول لك أن تقول :

إذا وازى مستقيم (ق) مستقيما (ق') ، فان المستقيم (ق') يوازي المستقيم (ق) .
وتستنتج أن :
العلاقة « ... // ... » تناظرية .
• (ق) ، (ق') ، (Δ) مستقيمات مختلفة بحيث يكون :
(ق) // (ق') و (Δ) // (ق) . شكل 6 .
هل (Δ) يوازي (ق') ؟
لو قطع المستقيم (ق) المستقيم (ق') في نقطة أ ،
لكان لديك مستقيمان مختلفان (Δ) و (ق')
يشملان النقطة أ ويوازيان (ق) .
وفي هذه الحالة لا تتحقق بديهية إقليدس .
تستنتج من هذا أن (Δ) لا يقطع (ق') .
وإذن يكون المستقيم (Δ) موازيا (ق') .
وبذا تكون قد برهنت على النظرية التالية :



« شكل 6 »

نظـريـة :

إذا توازى مستقيمان ، فان كل مستقيم يوازي أحدهما يكون موازيا للآخر .

وتستنتج أن :
العلاقة « ... // ... » **متعدية** .

2.2. منحى مستقيم :

في مجموعة مستقيمات المستوي ، العلاقة « ... // ... » انعكاسية وتناظرية ومتعدية . فهي علاقة تكافؤ .
إنها تعين في المجموعة ق أصناف تكافؤ .
كل صنف تكافؤ هو منحى مستقيمات .

تعريف :

مجموعة مستقيمات المستوي الموازية لمستقيم (ق) هي **منحى** (ق) .

إذا كان (ق) مستقيما ، فان **منحى** (ق) يرمز له بالرمز δ (ق) وتقرأ « منحى (ق) » .

لاحظ أنه :

- إذا كان المستقيمان (ق) و (ق′) متوازيين ، فانهما ينتميان إلى نفس **المنحى** .
- إذا كان المستقيمان (ق) و (ق′) ينتميان إلى نفس المنحى ، فانهما متوازيان .

تستنتج أن :

(ق) // (ق′) إذا كان فقط δ (ق) = δ (ق′) .

أ) ارسم مستقيما (ق) . هل يمكنك رسم مستقيمين مختلفين يوازيان (ق) ؟

هل يمكنك رسم ثلاث مستقيمات مختلفة توازي (ق) ؟

هل يمكنك رسم أربع مستقيمات ؟ هل يمكنك رسم مستقيمات أخرى ؟

هل تستطيع رسم جميع المستقيمات التي توازي (ق) ؟

ب) إذا قطع مستقيم (Δ) مستقيما (ق′) ، هل يقطع كل مستقيم آخر من δ (ق) ؟ لماذا ؟ .

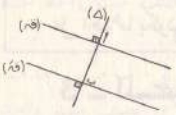
جـ) إذا كان مستقيم (Δ) عموديا على مستقيم (ق) ، هل يكون عموديا على كل مستقيم من δ (ق) ؟

د) أثبت أن مجموعة مناحي مستقيمات هي تجزئة من مجموعة مستقيمات المستوى ؟

2.3. نتائج :

- (ق) و (ق′) مستقيمان متوازيان ومختلفان .

ارسم مستقيما (Δ) عموديا على (ق) . شكل 7 .



« شكل 7 »

هل (Δ) عمودي على (ق′) ؟

إذا لم يكن (Δ) عموديا على (ق′) ، فانه يكون :

- إما موازيا (ق′)
- وإما يقطع (ق′) من غير أن يكون عموديا عليه .

لنفحص هاتين الحالتين .

الحالة الأولى : (Δ) // (ق′) .

لديك : (ق) // (ق′) و (ق′) // (Δ) .

تستنتج أن : (ق) | (Δ) .

وهذا خطأ لأن (ق) عمودي على (Δ) (فرضا) .

الحالة الثانية : (Δ) يقطع (ق′) من غير أن يكون عموديا عليه .

لتكن ب نقطة تقاطع (Δ) مع (ق′) .

تعلم أنه يوجد مستقيم واحد فقط (م) يشمل النقطة ب ويكون عموديا على (Δ) .

لديك : (Δ) ⊥ (ق) و (Δ) ⊥ (م) .

تستنتج أن : (ق) // (م) .

فالمستقيم (ق′) يشمل النقطة ب ويوازي (ق) .

والمستقيم (Δ) يشمل ب ويوازي (ق) .

وهذا لا يحقق بديهية اقليدس .

تستنتج أن المستقيم (Δ) لا يمكن أن يقطع (ق′) دون أن يكون عموديا عليه .

وتستنتج أن : (Δ) ⊥ (ق′) .

ويمكنك أن تنص على النظرية التالية :