

Je note P le demi-plan de $\mathbb{C}$ strictement supérieur (complexes de partie imaginaire >0)
appelé d'après mes souvenirs demi-plan de Poincaré sauf erreur ?

Les **classes d'équivalence** pour la relation d'équivalence R donnée sont les **cercles (notés C_u) de diamètres $[u i , i/u]$ avec $u > 0$.**

La preuve se déroule en deux temps :

1/ si $z R u i$ alors z appartient à C_u (la classe de $u i$ est donc incluse dans C_u).

2/ si z est dans P , il existe au moins un réel θ tel que $(z \cos \theta + \sin \theta) / (-z \sin \theta + \cos \theta)$ soit de partie réelle nulle et de partie imaginaire >0 .

1/Posant $z = (u i \cos \theta + \sin \theta) / (-u i \sin \theta + \cos \theta)$, il suffit de voir que $(z - u i) / (z - i/u)$ est d'argument $\pm \pi/2$. En effet un calcul rapide donne $(z - u i) / (z - i/u) = i u \tan(\theta)$ (on regarde à part les cas particuliers $\theta = \pm \pi/2$, qui ne changent rien à l'affaire).

Donc z appartient au cercle de diamètre $[u i , i/u]$

Remarque : le calcul est nettement plus lourd en faisant intervenir le centre du cercle et le module.

2/ Soit z dans P .

On calcule (avec la somme du conjugué) la partie réelle de $(z \cos \theta + \sin \theta) / (-z \sin \theta + \cos \theta)$ que l'on voudrait nulle pour un θ adéquat.

On trouve après ce petit calcul que :

- si $| z | = 1$, on peut prendre $\theta = \pi/4$ (demi-cercle $\setminus \{-1, 1\}$ en rouge du schéma).
- Sinon on prend θ tel que $\tan(2\theta) = 2\operatorname{Re}(z) / (|z|^2 - 1)$.

Ainsi il existe toujours un complexe $u i$ dans P de la même classe que z dans P .

Sur le schéma, l'image du demi-cercle **rouge** ouvert, par $\theta = \pi/4$, est le segment **vert** semi-ouvert sur l'axe imaginaire.

On se rend compte que θ n'est pas du tout l'angle entre z et $u i$.

Les cercles C_u ($u > 0$) forment l'ensemble-quotient de la relation R .

Ces cercles « démarrent » de $C_1 = \{1\}$ en s'emboîtant pour atteindre tous les points de P (assez intuitif au final).