Les nombres complexes

Baccalauréat ++

Une introduction à la magie d'un monde imaginaire extraordinaire

Mohamed ATOUANI

Professeur de Mathématiques
Clandestines

Table des matières

1 Une genèse algébrique

1.1 Les équations du second degré

La découverte des nombres complexes est probablement l'unique découverte de l'histoire des mathématiques combinant à la fois simplicité et fécondité. Notre histoire commence au 16ème siècle, quand deux mathématiciens italiens, Jérome Cardan et Niccolo Tartaglia se sont intéressés à la résolution des équations cubiques.

Cardan
(1501-1576)

Tartaglia
(1499 - 1557)

Avant de nous lancer dedans, tâchons de faire une digression sur les équations quadratiques afin de mieux apprécier nos nouveaux nombres. Une équation du second degré est une équation de la forme

$$ax^2 + bx + c = 0,$$

où a, b et c désignent trois nombres réels tels que $a \neq 0$ et x désigne un nombre inconnu vérifiant l'égalité ci-dessus. Puisque a est non nul, en divisant de part et d'autre par a, cette équation prend la forme

$$x^2 + px + q = 0.$$

Afin de résoudre celle-ci, il suffit de compléter le carré en y rajoutant le terme $(p/2)^2$ pour obtenir

$$\underbrace{x^2 + px}_{(x+\cdots)^2} + \left(\frac{p}{2}\right)^2 + q = \left(\frac{p}{2}\right)^2.$$

Ainsi, en utilisant l'identité remarquable $a^2 + 2ab + b^2 = (a+b)^2$, cette transformation algébrique permet d'avoir l'égalité

$$\left(x + \frac{p}{2}\right)^2 = \left(\frac{p}{2}\right)^2 - q.$$

On en déduit que si $(p/2)^2 - q \geq 0$ alors cette équation devient

$$\left(x+\frac{p}{2}\right)^2 - \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}^{\,2} = 0.$$

En utilisant maintenant l'identité remarquable $a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$ et en posant [1]

$$x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$$

on obtient $(x-x_1)(x-x_2) = 0$, ce qui implique enfin que $x = x_1$ ou $x = x_2$. Notez alors qu'on a montré au passage que $x^2 + px + q = (x-x_1)(x-x_2)$. En développant l'expression de droite il vient que

$$x^2 + px + q = x^2 - (x_1 + x_2)x + x_1 x_2.$$

Par identification des coefficients on obtient $x_1 + x_2 = -p$ et $x_1 x_2 = q$. Prenons un exemple concret afin de nous fixer les idées.

Exemple 1 : On souhaite résoudre l'équation $x^2 - 5x + 6 = 0$. On a

$$\begin{aligned}
x^2 - 5x + 6 = 0 &\iff x^2 - 5x + \left(\frac{5}{2}\right)^2 = \left(\frac{5}{2}\right)^2 - 6\\
&\iff \left(x - \frac{5}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}\\
&\iff \left(x - \frac{5}{2}\right)^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 = 0\\
&\iff \left(x - \frac{5}{2} - \frac{1}{2}\right)\left(x - \frac{5}{2} + \frac{1}{2}\right) = 0\\
&\iff (x-3)(x-2) = 0\\
&\iff x = 3 \quad \text{ou} \quad x = 2.
\end{aligned}$$

Ainsi les solutions de l'équation $x^2 - 5x + 6 = 0$ sont $x = 3$ et $x = 2$. De surcroît, on a bien

$$(x-3)(x-2) = x^2 - 5x + 6.$$

Exemple 2 : Nos ancêtres se sont intéressés au problème géométrique consistant à trouver la longueur et la largeur d'un rectangle sachant son demi-périmètre p et son aire q. Si x_1 désigne sa longueur et x_2 désigne sa largeur alors ce problème consiste à résoudre le système

$$\begin{cases} x_1 + x_2 &= p \\ x_1 x_2 &= q \end{cases}$$

Si de plus ce système est résoluble alors les nombres x_1 et x_2 sont solutions de l'équations $(x-x_1)(x-x_2) = 0$. Or d'après ce qui précède, $(x-x_1)(x-x_2) = x^2 - (x_1+x_2)x + x_1x_2 =$

1. En remplaçant p par b/a et q par c/a on obtient les fameuses formules

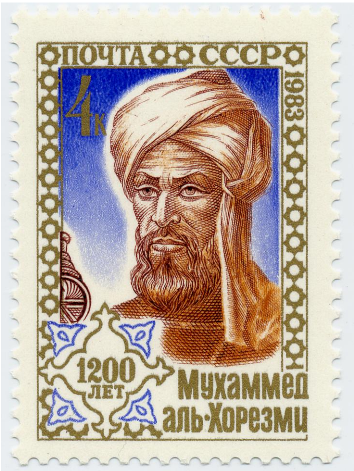
$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

$x^2 - px + q$. Ainsi x_1 et x_2 sont solutions de l'équation $x^2 - px + q = 0$. Soit R un rectangle dont le demi-périmètre vaut 11 et d'aire égale à 28. Sa longueur x_1 et sa largeur x_2 sont alors solutions de l'équation $x^2 - 11x + 28 = 0$. Or

$$\begin{aligned}
x^2 - 11x + 28 = 0 &\iff x^2 - 11x + \left(\frac{11}{2}\right)^2 = \left(\frac{11}{2}\right)^2 - 28 \\
&\iff \left(x - \frac{11}{2}\right)^2 = \frac{9}{4} \\
&\iff \left(x - \frac{11}{2}\right)^2 - \left(\frac{3}{2}\right)^2 = 0 \\
&\iff \left(x - \frac{11}{2} - \frac{3}{2}\right)\left(x - \frac{11}{2} + \frac{3}{2}\right) = 0 \\
&\iff (x-7)(x-4) = 0 \\
&\iff x = 7 \quad \text{ou} \quad x = 4.
\end{aligned}$$

Ainsi, la longueur de notre rectangle vaut $x_1 = 7$ et sa largeur vaut $x_2 = 4$.

Exemple 3 (Al-Khawarizmi) : Nous inspectons dans cet exemple la méthode géométrique utilisée par Al-Khawarizmi afin de résoudre les équations quadratiques. Tout d'abord, un petit mot s'impose sur notre éminent ancêtre. Muhammed Ibn Musa Al-Khawarizmi était un savant persan, membre de la prestigieuse *Maison de la Sagesse de Bagdad* et connu surtout pour son livre d'algèbre intitulé *Kitabu al-mukhtasar fī hisabi al-jabr wal-muqabalah* signifiant *Abrégé du calcul par restauration et comparaison*. Le mot algorithme est dérivé du nom de notre mathématicien.

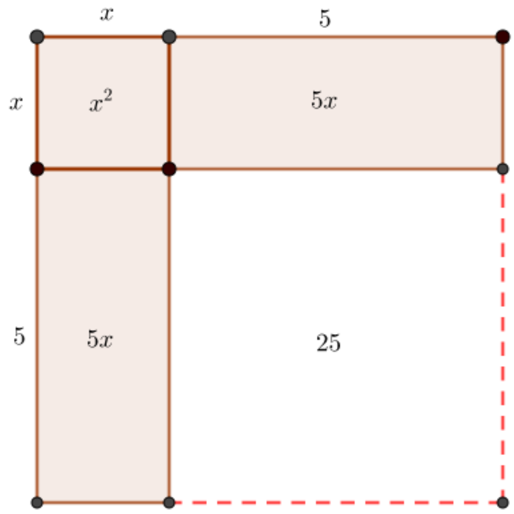


Al-Khawarizmi (780-850)

Al-Khawarizmi dérive la transformation algébrique permettant de résoudre les équations du second degré à partir d'une manipulation géométrique. Ainsi pour résoudre l'équation

$$x^2 + 10x = 39,$$

il commence par remarquer que le terme x^2 correspond géométriquement à l'aire d'un carré de côté x. Il borde par la suite ce carré par deux rectangles identiques de largeur égale à x et de longueur égale à 5 en gardant en tête que le terme $10x = 2 \times 5x$ est l'aire de nos deux rectangles. Pour obtenir l'identité voulue, il termine ce procédé par la complétion de la figure afin d'obtenir un carré comme le montre la figure ci-dessous.



Ainsi, en calculant l'aire de ce carré de deux manières différentes on obtient l'égalité $x^2 + 10x = (x+5)^2 - 25$. L'équation $x^2 + 10x = 39$ devient donc équivalente à

$$(x+5)^2 - 25 = 39,$$

ou encore à $(x+5)^2 = 64$. Ainsi $x+5$ est le nombre ayant un carré égal à 64. Al-Khawarizmi en déduit que $x+5=8$ et donc que $x=3$ est la solution de notre équation. Remarquez alors qu'il ne prend pas la solution négative car elle n'a aucune signification géométrique (une longueur étant toujours positive). Pourquoi notre savant procède-t-il de la sorte me diriez-vous ? N'était-il pas plus simple pour lui d'utiliser directement l'identité

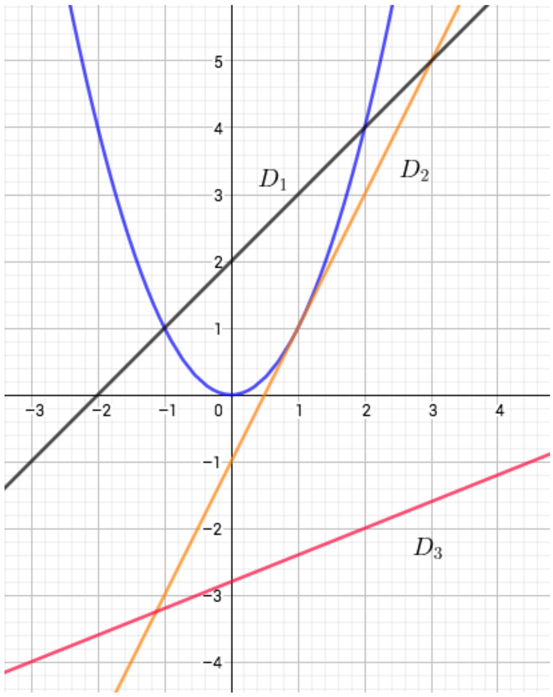
$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2?$$

À son époque, la géométrie d'Euclide était la base des mathématiques et tout devait se justifier à partir de celle-ci. L'algèbre en était donc dérivée. Toutefois, les travaux algébriques d'Al-Khawarizmi sont plus simples que ceux d'Euclide et ont ouvert la voie à son indépendance.

Exemple 4 : Une équation quadratique peut s'écrire sous la forme $x^2 = px + q$. Les solutions de celle-ci sont les abscisses des points d'intersection de la parabole d'équation $y = x^2$ et de la droite d'équation $y = px + q$. Nous avons vu qu'en cas d'une possible résolution, les solutions de cette équation peuvent s'écrire sous la forme

$$x_{1,2} = \frac{1}{2}\left(p \pm \sqrt{p^2 + 4q}\right).$$

Géométriquement on distingue 3 cas, à savoir deux intersections quand la quantité $p^2 + 4q > 0$, une seule intersection correspondant à $p^2 + 4q = 0$ ou aucune intersection quand $p^2 + 4q < 0$. Nous verrons que ce dernier cas est particulièrement intéressant. Notez d'abord que l'intersection est impossible quand $p^2 + 4q < 0$ car on ne sait pas donner pour l'instant une signification à la racine carré d'un nombre négatif, car le carré d'un nombre réel quelconque est toujours positif. Avant Cardan et Tartaglia, nos ancêtres n'avaient donc aucune motivation d'inspecter la possible signification de la racine d'un nombre négatif, parce que de façon évidente, le problème géométrique correspondant n'admettait pas de solution.



Exemple 5 (Lagrange) : Nous terminons cette première section avec la méthode de Joseph-Louis Lagrange permettant la résolution d'une équation quadratique de la forme $x^2 + px + q = 0$. En notant x_1 et x_2 ses deux solutions, Lagrange introduit une nouvelle variable $y = x_1 - x_2$. Cette variable n'est pas symétrique en x_1 et x_2 car échanger leurs positions change le signe de y. Lagrange symétrise alors cette expression en prenant son carré $y^2 = (x_1 - x_2)^2$. Il remarque par la suite que

$$y^2 = (x_1 - x_2)^2 = (x_1 + x_2)^2 - 4x_1x_2 = p^2 - 4q.$$

Il arrive ainsi à exprimer la quantité y^2 en fonction des coefficients de l'équation. Si de plus $p^2 - 4p \geq 0$ alors $y = \pm\sqrt{p^2 - 4q}$. Or on sait que x_1 et x_2 vérifient le système

$$\begin{cases} y = x_1 - x_2 \\ -p = x_1 + x_2 \end{cases}$$

La résolution de ce dernier donne bien

$$x_{1,2} = \frac{1}{2}\left(-p \pm \sqrt{p^2 - 4q}\right)$$

Par quel coup de génie a-t-il pu imaginer un tel procédé ? La théorie des équations permettant de mettre la lumière sur cette méthode dépasse le cadre de ce cours.

1.2 Les équations cubiques

Les équations cubiques sont celles de la forme $a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0 = 0$, où a_3, a_2, a_1 et a_0 désignent des nombres réels tels que $a_3 \neq 0$. En divisant de part et d'autre par a_3, toute cubique peut être écrite sous la forme

$$x^3 + ax^2 + bx + c = 0.$$

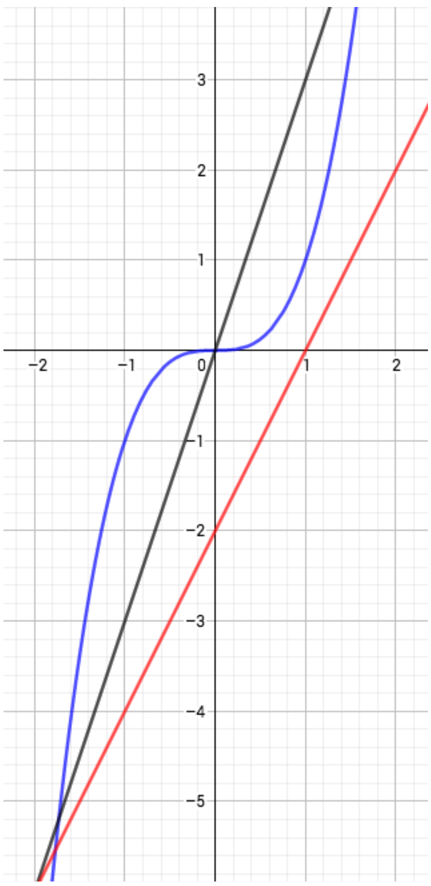
En réalité, on peut faire encore mieux parce qu'il existe une astuce permettant de se débarasser du terme en x^2 pour ramener toute équation de degré 3 à la forme générale

$$x^3 + px + q = 0.$$

Pour se faire, il suffit de poser le changement de variable $y = x + a/3$, ce qui donnera en utilisant l'identité remarquable $(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$

$$\begin{aligned} x^3 + ax^2 + bx + c &= (y - a/3)^3 + a(y-a/3)^2 + b(y-a/3) + c \\ &= y^3 - 3\cdot y^2 a/3 + 3y(a/3)^2 - (a/3)^3 + ay^2 - 2a^2y/3 + a(a/3)^2 + by - ba/3 + c \\ &= y^3 + py + q, \end{aligned}$$

où $p = b - a^2/3$ et $q = 2(a/3)^3 - b(a/3) + c$. Ainsi, les solutions de toute équation de degré 3 peuvent être vues comme les abscisses des points d'intersection de la courbe $y = x^3$ et d'une droite d'équation $y = px + q$. Le constat est sans appel, la courbe $y = x^3$ traverse tout le plan et intersecte donc toute droite $y = px + q$ au moins une fois. Une cubique admettra donc toujours une solution.



Trouver un nombre qui ajouté à son cube donne 6.

Ce problème fait son apparition au cours d'une compétition opposant Tartaglia et Fior, ce dernier a posé 30 problèmes de la sorte à son rival. La mise en équation de cette question donne

$$x^3 + x = 6$$

et plus généralement, les autres questions posées par Fior se ramènent à résoudre une équation de la forme $x^3+px=q$. Sachant qu'au 16ème siècle peu de progrès se sont fait depuis les traités algébriques d'Al-Khawarizmi autour de la résolution d'équations, le premier à avoir réussi un tel exploit pour les cubiques fut Scipione del Ferro (1465-1526). Ce dernier a occupé le poste de Professeur à l'université de Bologne et a résolu les cubiques de la forme $x^3+px=q$. Cette méthode n'était alors connue que de son étudiant Fior. De son côté, Tartaglia a su résoudre les équations cubiques de la forme $x^3+px^2=q$ et a posé 30 problèmes atypiques à son adversaire dont certains se ramenant à des équations de la dernière forme. Aucun n'a alors avancé d'un iota dans cette quête jusqu'au moment où Tartaglia trouve haut la main une méthode générale permettant de résoudre notre fameux casse-tête et a par conséquent infligé une lourde défaite à Antonio de Fior.

En 1545, Cardan a publié dans son Ars Magna la formule de Tartaglia accompagnée d'une démonstration. Celle-ci repose sur l'identité suivante

$$(u+v)^3 = 3uv(u+v) + \left(u^3+v^3\right).$$

Afin de résoudre l'équation $x^3+px+q=0$ on pose $x=u+v$ et on remarque qu'il suffit que les conditions

$$\begin{aligned} 3uv &= -p \\ u^3+v^3 &= -q \end{aligned}$$

soient remplies. Notre équation tombera donc comme une pomme mûre si on arrive à trouver deux quantités convenables u et v. Cette tâche est relativement simple car on connaît la valeur de la somme et du produit de u^3 et de v^3. Autrement dit on a

$$\begin{aligned} u^3v^3 &= (-p/3)^3 \\ u^3+v^3 &= -q. \end{aligned}$$

Or d'après notre paragraphe sur la résolution des équations quadratiques, u^3 et v^3 sont solutions de l'équation

$$t^2+qt-(p/3)^3=0.$$

Ceci implique que

$$u^3, v^3 = -\frac{q}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2+\left(\frac{p}{3}\right)^3}.$$

On en déduit que u et v sont donnés par

$$u, v = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2+\left(\frac{p}{3}\right)^3}}$$

Ainsi la solution x de notre équation initiale $x^3+px+q=0$ est donnée par

$$x = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2+\left(\frac{p}{3}\right)^3}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2+\left(\frac{p}{3}\right)^3}}.$$

Revenons maintenant à notre problème initial, dans lequel l'inconnue x vérifie l'équation $x^3+x-6=0$. Dans ce cas $p=1$, $q=-6$ et la solution x est donc donnée par

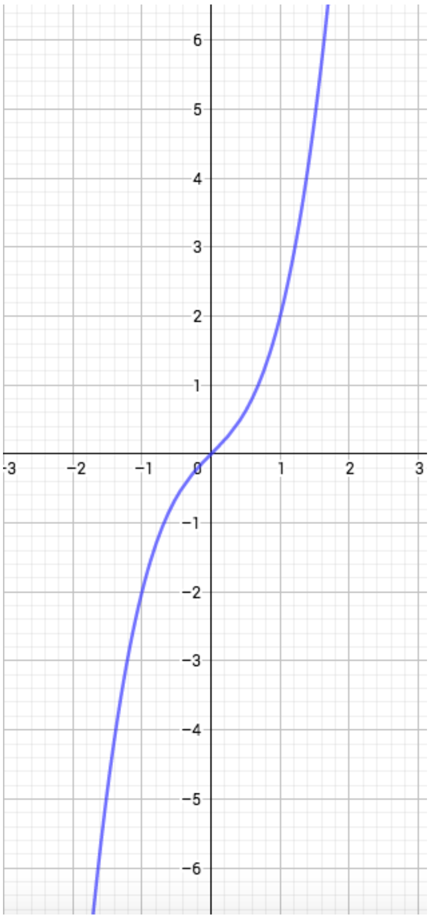
$$x=\sqrt[3]{3+\frac{2}{3}\sqrt{\frac{61}{3}}}+\sqrt[3]{3-\frac{2}{3}\sqrt{\frac{61}{3}}}.$$

Certes cette solution a une tête bien méchante, toutefois elle a la vertu d'être une solution exacte de notre équation. Prenons un deuxième exemple.

Exemple 1 : La formule de Cardan soulève plusieurs questions et plusieurs observations intéressantes. Dans cet exemple, le nombre 2 est une solution évidente de l'équation $x^3+x=10$, la formule proposée par notre ancêtre italien donne le nombre x

$$x=\sqrt[3]{5+\frac{26}{3}\sqrt{\frac{1}{3}}}+\sqrt[3]{5-\frac{26}{3}\sqrt{\frac{1}{3}}}.$$

Le graphe ci-dessous est celui de la courbe définie par $y=x^3+x$. Elle est clairement strictement croissante, étant somme de deux fonctions qui le sont.



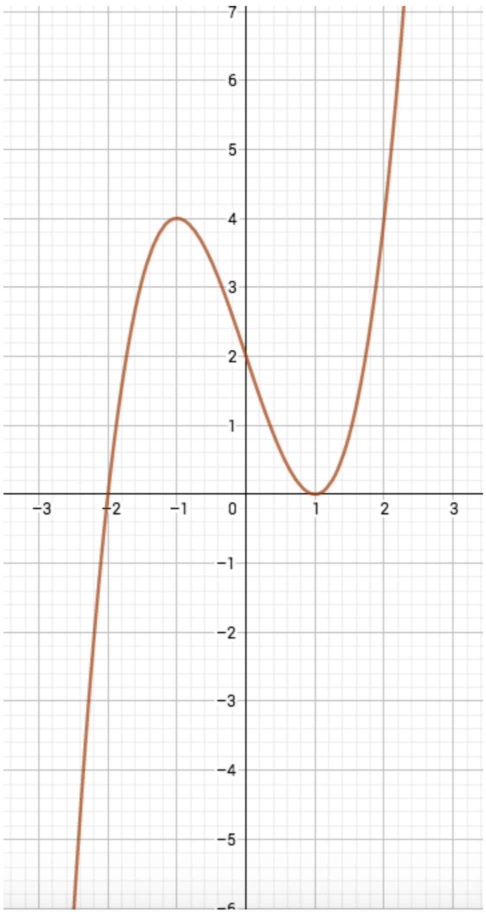
Ainsi, elle ne touche 10 qu'une seule fois. L'équation $x^3+x=10$ n'admet donc qu'une solution réelle, puisque 2 en est une, l'incroyable égalité suivante en découle

$$2=\sqrt[3]{5+\frac{26}{3}\sqrt{\frac{1}{3}}}+\sqrt[3]{5-\frac{26}{3}\sqrt{\frac{1}{3}}}.$$

Exemple 2 : Nous souhaitons résoudre l'équation $x^3 - 3x + 2 = 0$. Avec $p = -3$ et $q = 2$, notre super formule donne

$$\begin{aligned} x &= \sqrt[3]{-1 + \sqrt{1^2 + (-1)^3}} + \sqrt[3]{-1 - \sqrt{1^2 + (-1)^3}} \\ &= \sqrt[3]{-1} + \sqrt[3]{-1} \\ &= -1 - 1 \\ &= -2. \end{aligned}$$

Je vous laisse vérifier seul que $x = -2$ est bien solution de notre équation. Toutefois, $x = 1$ est aussi une solution évidente comme le montre le graphe de la courbe $y = x^3 - 3x + 2$ ci-dessous (à vous de faire le calcul).

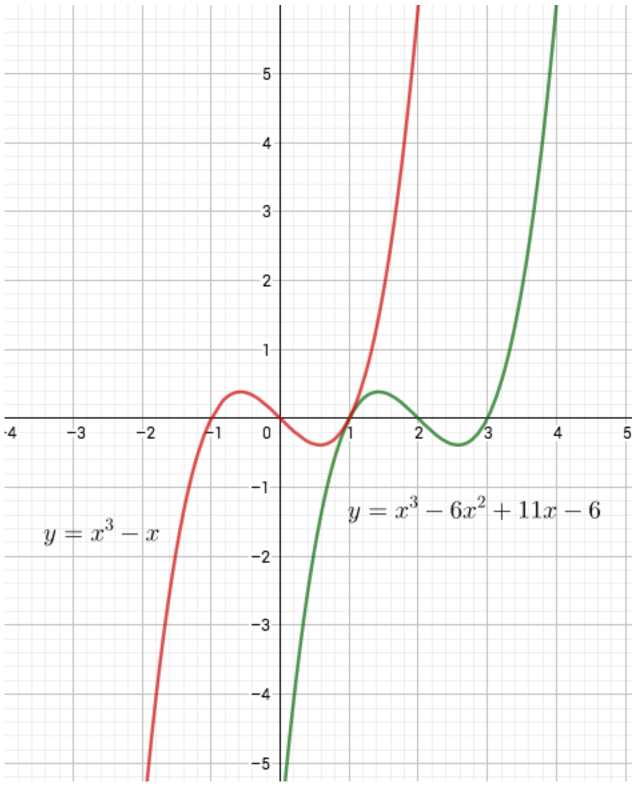


À ce stade, Cardan s'est rendu compte que sa formule ne donnait pas toutes les solutions d'une cubique et il a commencé à soupçonner qu'une telle équation admettrait 3 solutions.

Exemple 3 : Nous souhaitons résoudre dans cet exemple l'équation $x^3 - 6x^2 + 11x - 6 = 0$. D'abord nous devons transformer cette expression sous la forme $z^3 + pz + q = 0$. Pour se faire, le changement de variable $z = x - 2$ nous permet de nous débarasser du terme en x^2 et donne la nouvelle équation

$$z^3 - z = 0.$$

Notez alors que la courbe de $y = x^3 - x$ s'obtient en translatant la courbe de $y = x^3 - 6x^2 + 11x - 6$ horizontalement de 2 unités à gauche.



La nouvelle équation $z^3 - z = 0$ a une bonne tête et se résout assez trivialement en remarquant la factorisation
$$z^3 - z = z(z-1)(z+1).$$
Les solutions de celle-ci sont donc $z = -1$, $z = 0$ et $z = 1$. Puisque $z = x - 2$, les solutions de notre équation initiale sont $x = 1$, $x = 2$ et $x = 3$. En appliquant la formule de Cardan à l'équation $z^3 - z = 0$, il se passe un phénomène bien étonnant. En effet,

$$z = \sqrt[3]{\sqrt{-\frac{1}{27}}} + \sqrt[3]{-\sqrt{-\frac{1}{27}}}.$$

On obtient un nombre négatif à l'intérieur de la racine carrée, ce qui est fort problématique. Toutefois, si on en fait abstraction et on continue à conduire les calculs de façon formelle il vient

$$\begin{aligned} z &= \sqrt[3]{\sqrt{-\frac{1}{27}}} - \sqrt[3]{\sqrt{-\frac{1}{27}}} \\ &= 0. \end{aligned}$$

Oh ! ! ! Cela donne bien la solution $z = 0$. Aussi bizarre que cela puisse paraître, l'acceptation des racines carrées des nombres négatifs a permis d'avoir une bonne solution de notre équation. C'est incroyable ! Quel peut-être le secret derrière une telle simplification ?

Exemple 4 : Le cas d'une racine carrée négative arrive plus généralement quand

$$\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3 < 0.$$

Il s'agit de la faille la plus remarquable de la formule de Cardan. Ce cas s'appelle **casus irreducibilis**, marquant ainsi la naissance des nombres complexes. La racine carrée d'un nombre négatif n'a apriori aucun sens mathématique, toutefois calculer formellement avec celle-ci permet d'obtenir une solution de notre cubique. Dans une tentative de comprendre la signification des racines carrées de nombres négatifs, Cardan a cherché à trouver deux nombres dont la somme vaut 10 et le produit vaut 40. Ce problème revient à résoudre l'équation quadratique

$$x^2 - 10x + 40 = 0.$$

Si on accepte formellement les racines carrées des nombres négatifs, les solutions de cette équation sont

$$x_{1,2} = 5 \pm \sqrt{-15}.$$

Notre ancêtre savant ose alors calculer formellement ces deux nombres et obtient bien

$$\begin{aligned}
x_1 + x_2 &= (5 - \sqrt{-15}) + (5 + \sqrt{-15}) \\
&= 10 \\
x_1 x_2 &= (5 - \sqrt{-15})(5 + \sqrt{-15}) \\
&= 5^2 - \sqrt{-15}^2 \\
&= 25 - (-15) \\
&= 40.
\end{aligned}$$

Il s'agit ici des premiers calculs utilisant les nombres complexes sans réellement comprendre leur signification. Cardan a ainsi ouvert la porte à un monde imaginaire extrêmement fécond. C'est avec Raphaël Bombelli (1526-1572) qu'on a commencé à apprécier l'utilisation de nos racines bizarres. Dans son livre *L'algèbre*, Bombelli tente de résoudre l'équation $x^3 - 15x - 4 = 0$. Le nombre $x = 4$ est une solution évidente de celle-ci mais notre formule donne

$$x = \sqrt[3]{2 + \sqrt{-121}} + \sqrt[3]{2 - \sqrt{-121}}.$$

Ce n'est apriori pas la même chose. Toutefois, notre ancêtre savant va simplifier cette expression en notant d'abord que

$$\sqrt[3]{2 - \sqrt{-121}} = \sqrt[3]{2 - 11\sqrt{-1}}.$$

Par ailleurs, en gardant en tête la solution $x = 4$, il est convaincu qu'on peut écrire $\sqrt[3]{2 - 11\sqrt{-1}}$ sous la forme $a + b\sqrt{-1}$ où a et b désignent deux nombres entiers. Fort de cette intuition géniale, Bombelli passe aux choses sérieuses pour obtenir

$$\begin{aligned}
2 - 11\sqrt{-1} &= (a + b\sqrt{-1})^3 \\
&= a^3 + 3a^2 b\sqrt{-1} - 3ab^2 - b^3\sqrt{-1} \\
&= (a^3 - 3ab^2) + (3a^2 b - b^3)\sqrt{-1}.
\end{aligned}$$

Par identification, il affirme que $a^3 - 3ab^2 = 2$ et que $3a^2 b - b^3 = -11$. La première relation implique que a divise 2 et la deuxième que b est un diviseur de 11. On peut alors vérifier que $a = 2$ et $b = -1$ conviennent. Ce coup de maître a des conséquences miraculeuses sur notre problème. On a en effet

$$\begin{cases} \sqrt[3]{2 - \sqrt{-121}} & = 2 - \sqrt{-1} \\ \sqrt[3]{2 + \sqrt{-121}} & = 2 + \sqrt{-1}. \end{cases}$$

On en déduit que la solution donnée par la formule de Cardan vaut

$$\begin{aligned} x &= \sqrt[3]{2+\sqrt{-121}}+\sqrt[3]{2-\sqrt{-121}} \\ &= (2+\sqrt{-1})+(2-\sqrt{-1}) \\ &= 4. \end{aligned}$$

Oh ! ! ! Quelle surprise ! Le constat est là encore sans appel : à partir de racines carrées sans une réelle signification nous avons réussi à obtenir la bonne solution de notre cubique. Il y a certainement un coup à jouer avec cette histoire...

Un nombre complexe z est donc un nombre de la forme $z = a + bi$, où a et b désignent deux nombres réels et i une quantité imaginaire vérifiant

$$\boxed{i^2 = -1}$$

On dit que a est **sa partie réelle** et que b est **sa partie imaginaire**. Ce nouvel objet a le statut d'un nombre car d'après les calculs de Bombelli, on peut lui appliquer les opérations de l'algèbre. En effet, pour pouvoir additionner $2+\sqrt{-1}$ et $2-\sqrt{-1}$, il fallait accepter la règle plausible d'addition des nombres complexes,

$$(a+bi)+(c+di) = (a+c)+(b+d)i.$$

De même, afin de mettre l'expression $a+b\sqrt{-1}$ au cube permettant de trouver le nombre qui au cube donne $2-11\sqrt{-1}$, la multiplication des nombres complexes doit respecter les règles usuelles de l'algèbre, notamment la double distributivité. Elle serait donc sujette à la règle

$$(a+bi)(c+di) = ac+i(ad+bc)+i^2bd.$$

En considérant l'identité fondamentale $i^2 = -1$ on obtient

$$(a+bi)(c+di) = (ac-bd)+(ad+bc)i.$$

2 La trisection de l'angle et la formule de Viète

Nous allons inspecter dans ce paragraphe une méthode de résolution d'équations cubiques due au mathématicien français François Viète.

François Viète (1540 - 1603)

Mais avant cela, tâchons de faire un rappel sur la constructibilité à la règle non graduée et au compas.

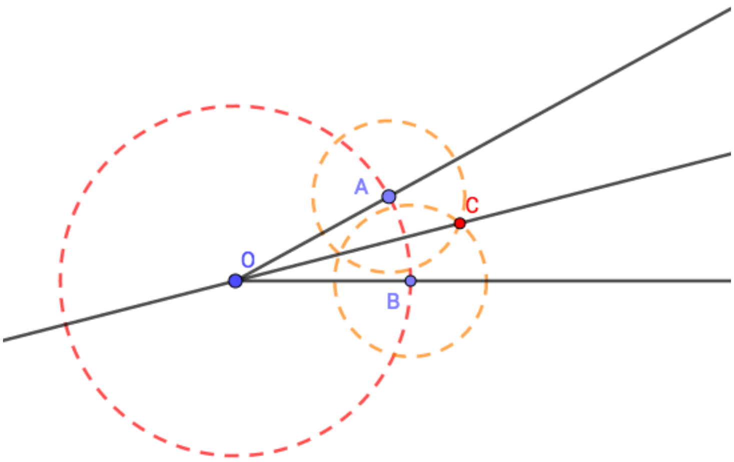
2.1 Constructibilité à la règle non graduée et au compas

J'espère que vous n'êtes pas sans savoir que la quintessence de la géométrie d'Euclide est la constructibilité à la règle non graduée et au compas. Nous nous n'attarderons pas sur ce sujet fort intéressant, toutefois il nous permettra de plonger la méthode de Viète dans son contexte. En effet, les mathématiciens grecs ont cherché à savoir ce qu'on peut construire géométriquement en utilisant seulement une règle non graduée et un compas. A priori, pas grand-chose ! Détrompez-vous, ce problème a fait couler beaucoup d'encres et est une source d'énormément de mathématiques aussi belles qu'étonnantes. L'une des constructions possibles avec la règle non graudée et le compas est le partage d'un angle en deux angles de même mesure. Nous avons tous appris au collège la procédure suivante permettant de dessiner la bissectrice d'un angle :

1. Mettre la pointe du compas sur le sommet O de l'angle et construire un cercle de rayon $r > 0$. Ce cercle intersecte notre angle en deux points A et B.

2. Construire deux cercles de centres respectivement A et B et de même rayon, choisi de manière adéquate. Leur point d'intersection C (en réalité ils ont en général deux points d'intersection) est alors situé sur la bissectrice de notre angle.

3. Pour tracer une droite, il suffit d'avoir deux points habitant dessus, d'où la construction de la bissectrice obtenue en reliant le point C et le point O.

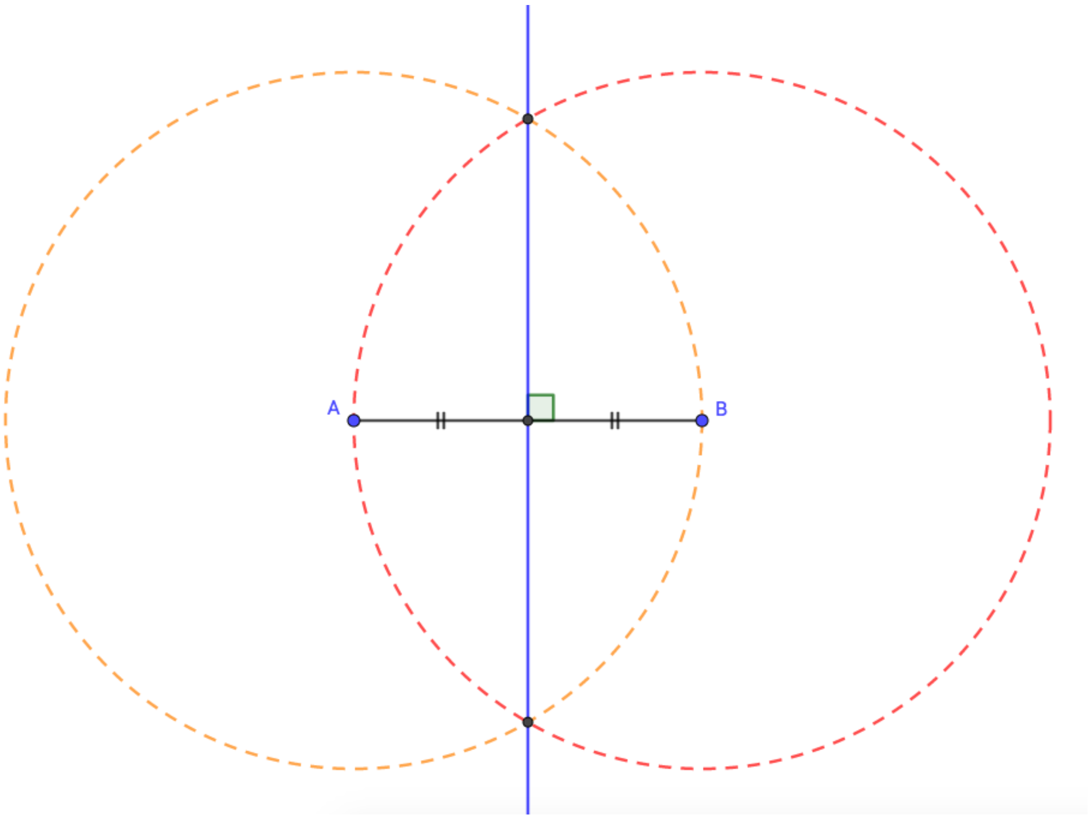


Remarquez alors qu'ici, on n'a utilisé que la règle non graduée pour relier nos points et le compas pour construire nos cercles. Une autre construction triviale (mais fondamentale) dans l'oeuvre d'Euclide est celle de la médiatrice d'un segment $[AB]$. Pour se faire

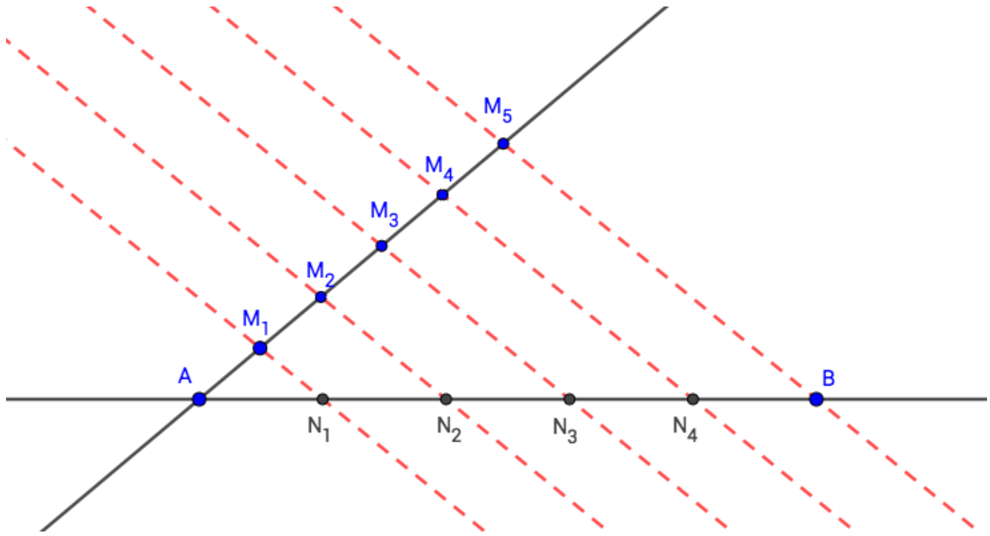
1. On construit le cercle de centre A passant par B.

2. Ensuite on construit le cercle de centre B passant par A.

3. Nos deux cercles s'intersectent en deux points habitant sur la médiatrice du segment $[AB]$(pourquoi ?). Ainsi, en reliant ces deux points, on obtient notre droite recherchée.



Il existe même un procédé permettant de partager un segment en n parties égales, où $n \geq 2$ désigne un entier naturel. Pour cela, nous aurons besoin du fameux théorème de Thalès. Car aussi incroyable que cela puisse paraître, le théorème de Thalès est un résultat majeur pour la constructibilité et donc son utlilité dépasse de bien loin le cadre du simple calcul de longueurs.



Par exemple, pour partager le segment $[AB]$ en cinq parties égales,

1. On prend un point M_1 quelconque hors de la droite (AB). On trace la demi-droite $[AM_1)$. On construit ensuite sur cette demi-droite des points successifs distincts M_2, M_3, M_4 et M_5 tels que $M_5M_4 = M_4M_3 = M_3M_2 = M_2M_1 = M_1A$.

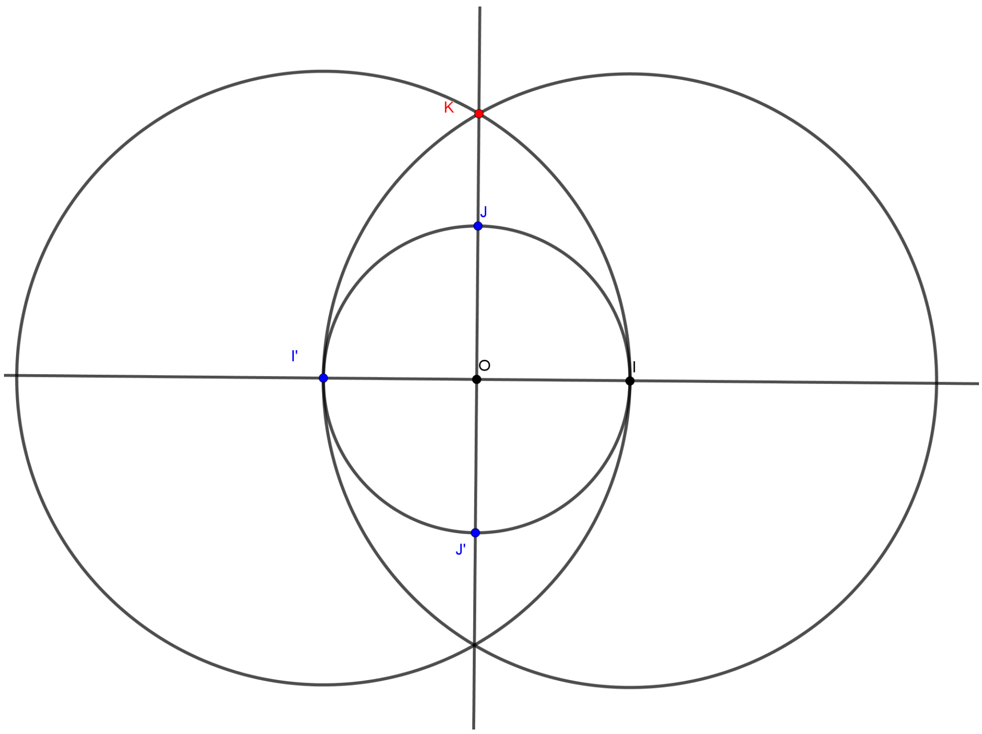
2. On trace ensuite la droite (M_5B) et puis les parallèles à cette droite passant par les points M_4, M_3, M_2 et M_1, parallèles constructibles à la règle non graduée et au compas.

3. Ces parallèles intersectent $[AB]$ respectivement en des points N_4, N_3, N_2 et N_1, dont nous affirmons qu'ils divisent le segment $[AB]$ en cinq parties égales. On dit que les points $N_1, \ldots N_4$ sont obtenus par projection parallèle de direction (M_5B) des points $M_1, \ldots, M_4$. Or, ce que dit le théorème de Thalès, c'est que toute projection parallèle conserve les rapports de longueurs.

Nous pouvons donc diviser tout segment en n parties égales, peut-on alors faire la même chose pour un angle ? On peut en effet le bissecter, toutefois peut-on par exemple le **trisecter** ? Ce problème a résisté plus de 2000 ans aux mathématiciens de premier plan. L'introduction des coordonnées par Descartes et Fermat a permis d'établir un pont algébrico-géométrique permettant de traduire les problèmes de géométrie en problèmes d'algèbre et vice-versa, constituant un permier pas décisif vers leur compréhension. Ainsi comme nous le verrons plus loin, le problème de la trisection de l'angle est équivalent à la résolution d'une équation de degré 3. Tâchons tout d'abord de comprendre le lien entre géométrie et algèbre.

Pour bien comprendre ce qu'on peut construire avec nos outils mécaniques, l'idée est de partir d'un ensemble $\mathscr{E}$ constitué de deux points donnés du plan (ou plus), que l'on nomme ici O et I et de prendre la longueur OI comme mesure unité *i.e* $OI = 1$. Remarquons que nous ne pouvons pas partir d'un seul point d'après les axiomes d'Euclide [2] (on ne peut tracer aucun cercle et aucune droite). Rappelons alors ce que l'on peut faire comme type de construction :

- Tracer une droite passant par deux points de $\mathscr{E}$. Pour l'instant, on ne peut tracer que la droite (OI).
- Tracer un cercle ayant pour centre un point de $\mathscr{E}$ et pour rayon la distance séparant deux points de $\mathscr{E}$.



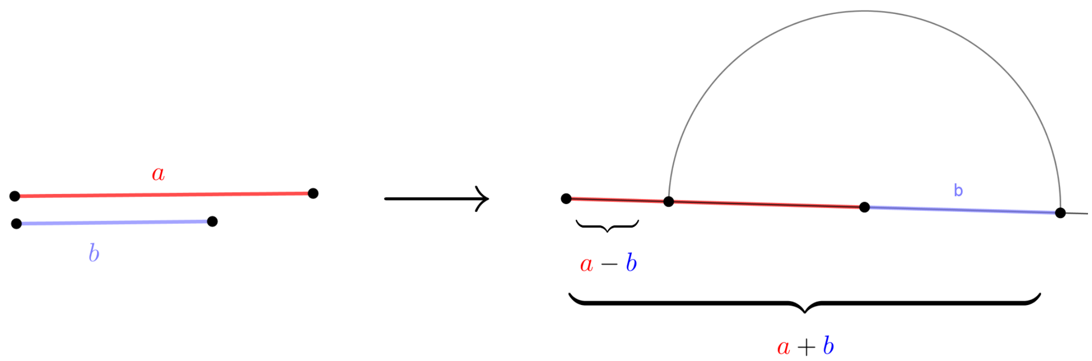
2. J'espère que vous connaissez les axiomes d'Euclide.

Que peut-on faire à partir de là ? On peut en effet tracer le cercle $\mathscr{C}$ de centre O et de rayon OI. Il coupe la droite (OI) en un deuxième point qu'on appelle I'. On construit alors le triangle équilatéral de base [II'], obtenant ainsi un troisième point K. La droite (OK), perpendiculaire à la droite (OI), coupe le cercle $\mathscr{C}$ en J et J'. Les points d'intersection des droites et des cercles ainsi tracés fournissent de nouveaux points, qui pourront à leur tour être utilisés comme les points de l'ensemble du départ $\mathscr{E}$ pour construire de nouvelles droites et de nouveaux cercles.
Notons qu'on a construit au passage un repère orthonormé que l'on notera (O,I,J). On retrouve ici l'idée centrale de Descartes et de Fermat qui a permis de transformer les problèmes géométriques en problèmes algébriques, et qui nous sera indispensable pour la suite. Notons aussi que les points ainsi obtenus sont constructibles à la règle non graduée et au compas. Afin de faire le lien avec l'algèbre, nous posons la définition suivante :

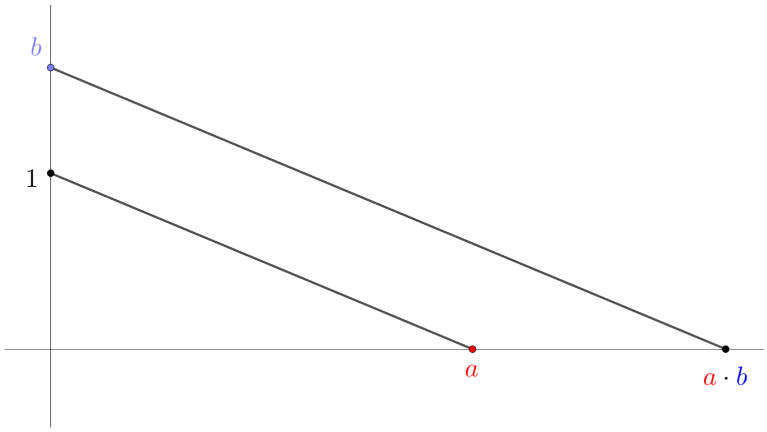
Définition : Un nombre x est dit constructible s'il est l'une des coordonnées dans le repère (O,I,J) d'un point constructible.

Remarquons alors qu'un nombre x est constructible si et seulement si le point de l'axe (OI) d'abscisse x est constructible. Ceci découle du fait que le projecté orthogonal est un point constructible, nous nous n'attarderons pas sur ce point (il y a une légère subtilité dans le sens inverse) . On peut alors construire les cinq opérations suivantes : Si a et b sont deux réels construits alors

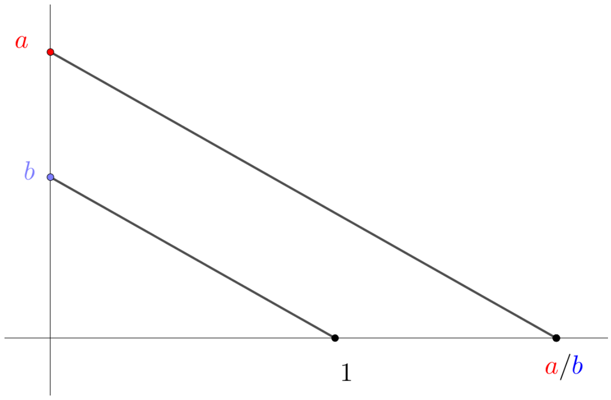
- *Les réels $a+b$ et $a-b$ sont constructibles* : Sans perte de généralité, on peut supposer que $a \geq b$, il suffit alors de reporter la longueur b à l'extremité du segment de longueur a comme le montre la figure ci-dessous. On obtient alors à la fois $a+b$ et $a-b$.



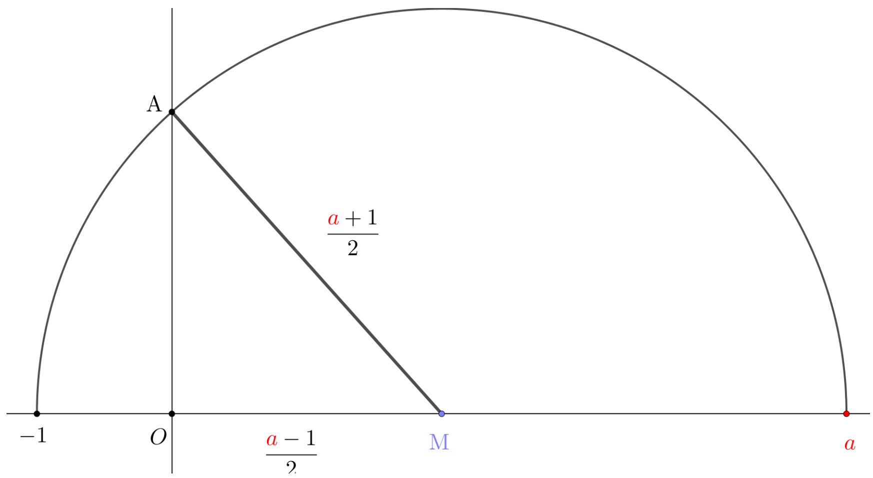
- *Le réel ab est constructible* : Là encore on peut supposer sans perte de généralité que $b \geq 1$.On commence alors par construire un repère orthonormé et placer le nombre a sur l'axe des abscisses et les nombres 1 et b sur l'axe des ordonnées. On trace ensuite le segment reliant 1 et a. La parallèle à ce segment passant par b coupe l'axe des abscisses au point d'abscisse ab. Cette dernière affirmation est une conséquence directe du théorème de Thalès. Je vous conseille d'écrire la relation de Thalès dans cette configuration pour vous en convaincre.



- *Le réel $\frac{a}{b}$ est constructible* : Le procédé pour construire la fraction $\frac{a}{b}$ est quasiment le même. Là encore le théorème de Thalès permet de conclure.



- *Le réel $\sqrt{a}$ est constructible* : Dans un repère orthonormé, on commence par placer les nombres a et -1. On trace ensuite le demi-cercle de diamètre $a+1$ (ceci est possible car on sait construire le milieu M du segment). L'intersection de ce dernier avec l'axe des ordonnées donne un point A tel que $\mathrm{OA} = \sqrt{a}$.



En effet, le triangle OAM étant rectangle en O, une application du théorème de Pythagore donne :

$$\begin{aligned} OA^2 + OM^2 &= AM^2 \\ OA^2 &= AM^2 - OM^2 \\ OA^2 &= \left(\frac{a+1}{2}\right)^2 - \left(\frac{a-1}{2}\right)^2 = a \end{aligned}$$

Cette dernière égalité entraine que $OA = \sqrt{a}$, d'où le résultat.

On voit d'emblée que $\mathbb{Z}$ est constructible en reportant la mesure unité tout au long de l'axe des abscisses. Puisque les divisions sont des opérations constructibles, il en est de même de l'ensemble $\mathbb{Q}$ des rationnels.

Cependant, il est naturel de se demander s'il y a d'autres opérations que nos outils permettent d'effectuer. C'est là que l'idée de l'introduction d'un repère orthonormé va grandement nous aider, c'est là que le génie cartésien intervient. En effet, on peut démontrer que réciproquement, ce sont les seules opérations constructibles à la règle non graduée et au compas. Pour jouer avec les droites et les cercles dans un repère orthonormé, il est nécessaire de se servir de leurs équations. Ainsi aurons nous besoin du lemme suivant,

Lemme :

1. Si $\mathscr{D}$ est une droite du plan passant par les points distincts $A(a_1, b_1)$ et $B(a_2, b_2)$ alors son équation s'écrit

$$(b_1 - b_2)x + (a_2 - a_1)y = a_2 b_1 - b_2 a_1$$

2. Soient $A(a_1, b_1), B(a_2, b_2)$ et $C(a_3, b_3)$ trois points du plan. Le cercle de centre A et de rayon BC a pour équation

$$(x - a_1)^2 + (y - b_1)^2 = (b_3 - b_2)^2 + (a_3 - a_2)^2.$$

Remarquons alors que si $\mathscr{M}(x, y)$ est un point constructible alors nous sommes dans l'un des cas suivants :

1. $\mathscr{M}$ est le point d'intersection de deux droites constructibles. Dans ce cas, x et y sont solutions d'un système d'équations de la forme :

$$\begin{cases} \alpha_1 x + \beta_1 y = \gamma_1 \\ \alpha_2 x + \beta_2 y = \gamma_2 \end{cases}$$

où $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2, \gamma_1$ et γ_2 sont des nombres constructibles (d'après le lemme précédent). La résolution de ce système donne

$$\begin{cases} x = \dfrac{\gamma_1 \beta_2 - \beta_1 \gamma_2}{\alpha_1 \beta_2 - \beta_1 \alpha_2} \\ y = \dfrac{\alpha_1 \gamma_2 - \gamma_1 \alpha_2}{\alpha_1 \beta_2 - \beta_1 \alpha_2} \end{cases}$$

Remarquons au passage que le nombre $\alpha_1 \beta_2 - \beta_1 \alpha_2$ est non nul car les deux droites n'ont pas la même pente *i.e* ne sont pas parallèles. D'où la validité des formules. On voit alors que x et y sont deux nombres constructibles car obtenus en utilisant les quatre premières opérations constructibles.

2. $\mathscr{M}$ est le point d'intersection d'une droite et d'un cercle constructibles. Dans ce cas, x et y sont solutions d'un système d'équations de la forme :

$$\begin{cases} \alpha_1 x + \beta_1 y = \gamma_1 \\ (x-\alpha_2)^2 + (y-\beta_2)^2 = \gamma_2 \end{cases}$$

   où $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2, \gamma_1$ et $\gamma_2 > 0$ sont des nombres constructibles. Comme vous pouvez vous en doutez, la résolution de ce système se fait avec les nombres précédents en utilisant les cinq opérations. On obtient en effet après substitution une équation quadratique. Le nombre de points d'intersection du cercle et de la droite dépend alors de son discriminant Δ. Je laisse le lecteur s'en convaincre.

3. Le dernier cas de figure est l'intersection de deux cercles constructibles. Cette fois, les coordonnées x et y des points d'intersections (s'ils existent) vérifient :

$$\begin{cases} (x-\alpha_1)^2 + (y-\beta_1)^2 = \gamma_1 \\ (x-\alpha_2)^2 + (y-\beta_2)^2 = \gamma_2 \end{cases}$$

   où $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2, \gamma_1 > 0$ et $\gamma_2 > 0$ sont des nombres constructibles. En soustrayant les deux équations, on obtient :

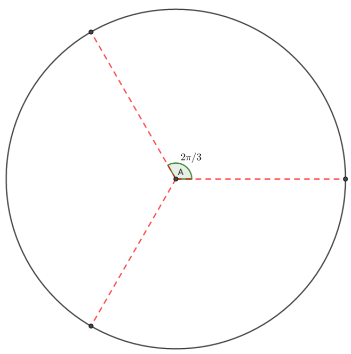
$$\begin{cases} 2(\alpha_2-\alpha_1)x + 2(\beta_2-\beta_1)y + (\alpha_1^2+\beta_1^2) - (\alpha_2^2+\beta_2^2) = \gamma_1 - \gamma_2 \\ (x-\alpha_2)^2 + (y-\beta_2)^2 = \gamma_2 \end{cases}$$

La première équation est une équation de droite. Nous sommes ainsi réduits au cas précédent, qui n'utilise comme nous avons pu le voir que les opérations allouées. Nous avons alors le théorème suivant :

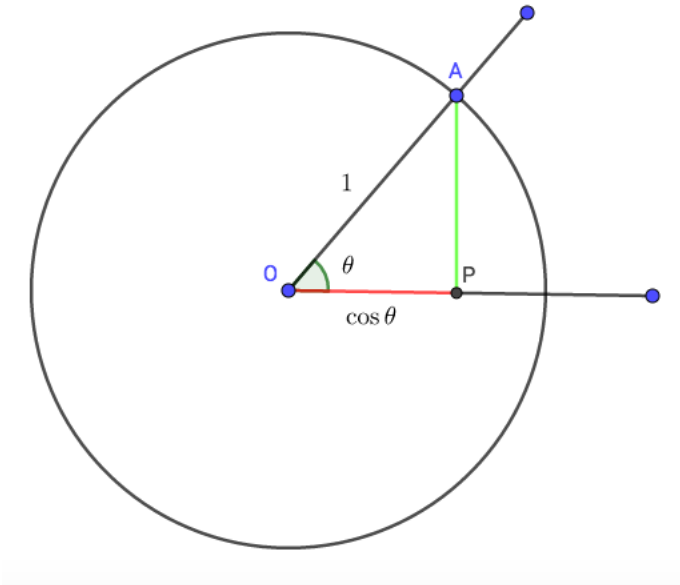
Théorème : Étant donné deux points O et I, tels que l'on fixe la longueur OI comme unité (OI $=1$), un point P de coordonnées (α, β) est constructible à la règle non graduée et au compas si et seulement si ses coordonnées sont des nombres rationnels ou peuvent être obtenus des nombres rationnels par une succession finie d'opérations $+$, $-$, $\cdot$, $\div$ et $a > 0 \mapsto \sqrt{a}$.

Nous disposons maintenant d'une petite théorie permettant de décider algébriquement la possibilité d'une construction géométrique. Regardons ce que cela donne sur quelques exemples concrets.

Exemple 1 : Est-il possible de partager un cercle donné en 3 arcs égaux ? La figure ci-dessous montre qu'il suffit de construire l'angle $2\pi/3$ ou encore de diviser l'angle 2π en 3 angles de même mesure.



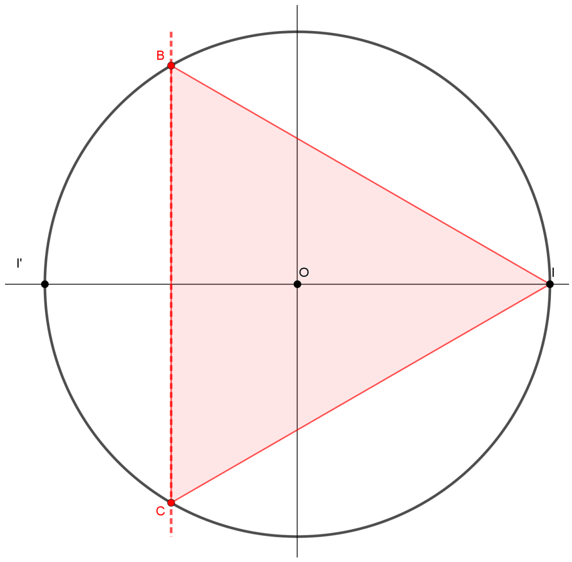
Or la construction d'un angle θ est équivalente à la construction du nombre $\cos\theta$. En effet, comme le montre bien la figure ci-dessous, si l'angle θ est constructible alors le point A l'est aussi. Ainsi par projection orthogonale, P est lui aussi constructible. On en déduit alors que le nombre $\cos\theta$ est constructible. Réciproquement, si le nombre $\cos\theta$ est constructible, alors la perpendiculaire à (OP) passant par P coupe le cercle unité au point A. L'angle ainsi obtenu vaut θ.



Ainsi pour construire $2\pi/3$, il suffit de construire $\cos(2\pi/3)$. Or coup de chance

$$\cos(2\pi/3) = -\frac{1}{2}.$$

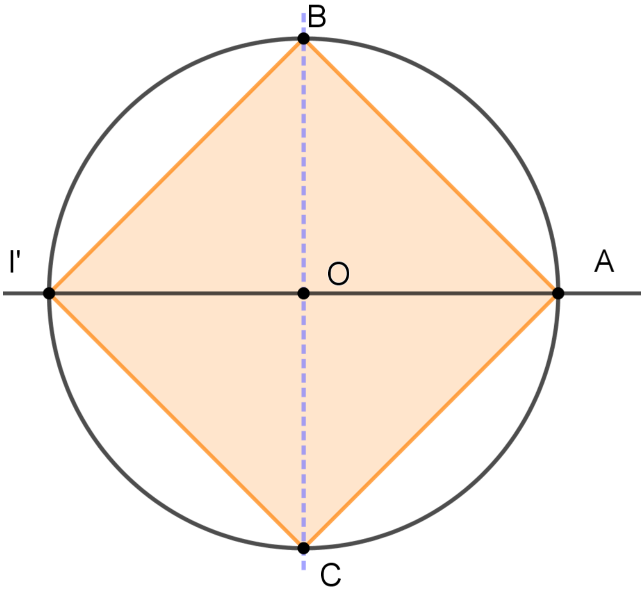
Il suffit alors de tracer la médiatrice de [OI'] comme le montre la figure ci-dessous.



Exemple 2 : Essayons de faire la même chose avec un carré, autrement dit de partager le cercle en 4 arcs égaux. Cette construction revient donc à calculer $\cos(2\pi/4)$. Or

$$\cos(2\pi/4) = \cos(\pi/2) = 0.$$

La construction est alors toute évidente. Il suffit de tracer la perpendiculaire à l'axe des abscisses passant par l'origine du repère.



Exemple 3 : Dans cet exemple, on s'intéresse tout naturellement à partager le cercle en 5 arcs égaux. La tâche est moins triviale qu'auparavant. Toutefois, on montrera plus loin en s'aidant des nombres complexes que

$$\cos(2\pi/5) = \frac{\sqrt{5}-1}{4}.$$

Le nombre $\cos(2\pi/5)$ est donc constructible à la règle non graduée et au compas. Son expression algébrique va nous permettre de trouver une construction effective de ce nombre. On peut appliquer directement les méthodes de construction vues précédemment en construisant d'abord $\sqrt{5}-1$ et en divisant cette longueur par 4. Il existe toutefois une autre méthode : Il s'agit de commencer par la construction du nombre $\sqrt{5}/4$. En effet, le théorème de Pythagore permet de construire le nombre $\sqrt{5}$ assez facilement en prenant un triangle rectangle de côtés 1 et 2 ! Ainsi pour obtenir $\sqrt{5}/4$, on divise l'équation de Pythagore par 16 (car $4^2 = 16$), ce qui nous suggère de prendre le triangle de côtés $1/4$ et $2/4 = 1/2$. La soustraction de $-1/4$ par la suite donne alors la construction suivante :

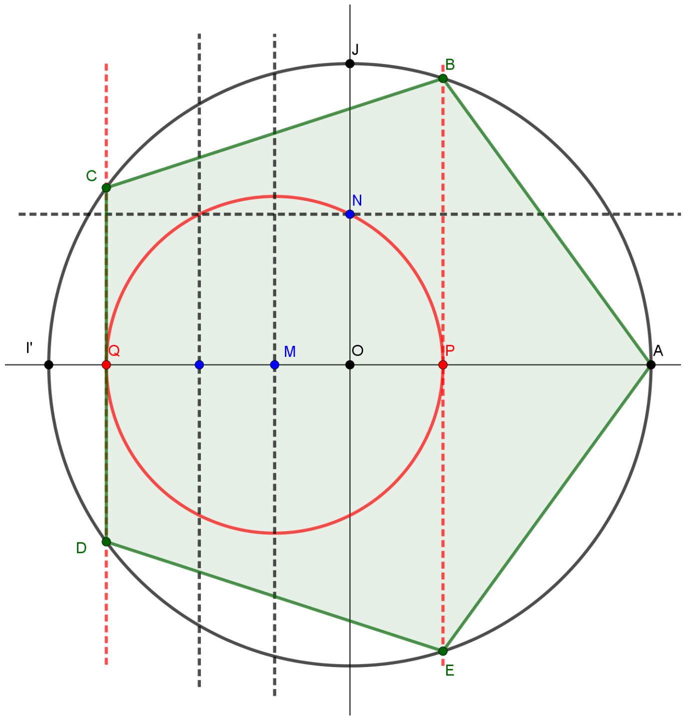
1. Construire le point $\mathscr{M}$ de coordonnées $(-1/4, 0)$ (en construisant deux fois la médiatrice).

2. Construire le point $\mathscr{N}$ de coordonnées $(0, 1/2)$ (en construisant la médiatrice sur l'axe des ordonnées)

3. Construire le cercle de centre $\mathscr{M}$ et de rayon $\mathscr{M}\mathscr{N}$. Ce cercle intersecte l'axe des abscisses aux points P et Q d'abscisses respectives $\cos\frac{2\pi}{5}$ et $\cos\frac{4\pi}{5}$.

4. La perpendiculaire à l'axe des abscisses passant par P coupe le cercle en B et en E. Par ailleurs la perpendiculaire à l'axe des abscisses passant par Q coupe le cercle en C et D. Voilà voilà ! ! ! Il nous reste donc à montrer que $\cos(2\pi/5) = (\sqrt{5}-1)/4$, pour ça on fera fonctionner l'incroyable machine complexe, mais avant, il faut qu'on puisse comprendre le lien entre nombres complexes et géométrie. Je vous laisse déduire de notre petite théorie une construction de l'hexagone régulier. Notez néanmoins que la construction de l'heptagone (7 côtés) régulier est impossible et l'on peut démontrer

que $\cos(2\pi/7)$ ne peut pas s'exprimer en fonction de nos opérations constructibles, mais cette histoire dépasse le cadre de notre cours.



2.2 La méthode de Viète de résolution d'une cubique

Maintenant que le pont algébrico-géométrique est établi, tentons de comprendre la méthode de Viète permettant de résoudre une cubique via le problème de la trisection d'un angle à la règle non graduée et au compas. La trisection d'un angle revient à construire $\cos\theta$ quand $\cos 3\theta$ est donné. Or on peut démontrer relativement facilement que [3]

$$\cos 3\theta = 4\cos^3\theta - 3\cos\theta.$$

Le problème de la trisection de l'angle est donc équivalent à la résolution de l'équation

$$4x^3 - 3x = \cos 3\theta.$$

Si on arrive à démontrer que l'une des solutions s'écrit comme combinaison de nombres rationnels et de racines carrées emboitées alors c'est gagné ! Trop optimiste pour le coup car on peut démontrer que l'angle constructible $\pi/3$ (car $\cos(\pi/3) = 1/2$) n'est pas trisectable. Cette question revient à montrer que l'équation $4x^3 - 3x - 1/2 = 0$ n'admet pas de solution dans $\mathbb{Q}$, mais ceci est une autre histoire qu'on réservera probablement à un autre livre. On

3. La formule $\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$ implique en prenant $a = b$ que $\cos 2a = 2\cos^2 a - 1$. Ainsi en prenant $b = 2a$ on obtient

$$\begin{aligned}
\cos 3a &= \cos a \cos 2a - \sin a \sin 2a \\
&= \cos a(2\cos^2 a - 1) - 2\sin^2 a \cos a \quad \text{car } \sin 2a = 2\sin a \cos a \\
&= \cos a(2\cos^2 a - 1 - 2 + 2\cos^2 a) \quad \text{car } \sin^2 a = 1 - \cos^2 a \\
&= 4\cos^3 a - 3\cos a
\end{aligned}$$

peut d'ailleurs se douter que la trisection est impossible puisque nos nombres constructibles vérifient plutôt des équations de degré $\neq 3$ de façon intuitive.

Par exemple, les nombres constructibles $x_1 = \sqrt{17}$, $x_2 = \sqrt{1+\sqrt{2}}$ et $x_3 = 8+\sqrt{3+\sqrt{31+\sqrt{2}}}$ sont solutions des équations $x^2 - 17 = 0$, $x^4 - 2x^2 - 1 = 0$ et

$$x^8-64x^7+1780x^6-28096x^5+275192x^4-1711872x^3+6599944x^2-14405760x+13616098=0$$

dont les degrés sont des puissances de 2.

Nous sommes partis bien loin, mais pour une bonne raison, à savoir plonger la méthode de Viète dans son contexte géométrique. Nous avons vu que toute cubique se ramène à la forme $x^3 + ax + b = 0$. Afin de simplifier nos calculs, nous pouvons écrire cette dernière équation sous la forme $x^3 = 3px + 2q$. Notez alors que dans ce cas la formule de Cardan devient

$$x = \sqrt[3]{q+\sqrt{q^2-p^3}} + \sqrt[3]{q-\sqrt{q^2-p^3}}.$$

Revenons à Viète, son idée géniale était donc de transformer cette équation sous la forme

$$4y^3 - 3y = c.$$

En effet, en posant $x = ky$, où k désigne un réel strictement positif, on obtient

$$k^3y^3 = (3pk)y + 2q \quad \text{ou encore} \quad k^3y^3 - (3pk)y = 2q.$$

Cette dernière est équivalente à

$$\frac{k^3}{4}4y^3 - 3(pk)y = 2q.$$

Afin d'avoir une équation de la forme $4y^3 - 3y = c$, il suffit que k vérifie $k^3/4 = pk$ dans le but de diviser notre équation par pk et obtenir $c = 2q/pk$. Puisque k est strictement positif, l'égalité $k^3/4 = pk$ implique qu'il suffit de prendre $k = 2\sqrt{p}$ [4] afin d'obtenir notre changement de variable. Dans ce cas le nombre c est donné par

$$c = \frac{q}{p\sqrt{p}}$$

Notre savant effectue ce changement de variable pour une raison fort valable et ce parce que

$$4\cos^3\theta - 3\cos\theta = \cos 3\theta.$$

Sans perte de généralité, nous pouvons supposer $3\theta \in [0,\pi]$. En posant $y = \cos\theta$, l'équation devient $\cos 3\theta = c$. Cette dernière égalité impose à ce qu'on prenne $|c| \leq 1$, ce qui est équivalent à

$$\left|\frac{q}{p\sqrt{p}}\right| \leq 1$$

ou encore $q^2 \leq p^3$. Dans ce cas,

$$\cos(3\theta) = c \iff \cos(\theta) = \cos\left(\frac{1}{3}(\arccos(c) + 2n\pi)\right)$$

4. Nous supposons ici que p est positif.

Il s'ensuit que les solutions de notre équation $x^3 = 3px + 2q$ sont donnés par la formule

$$x_n = 2\sqrt{p}\cos\left(\frac{1}{3}(\varphi + 2n\pi)\right) \quad \text{où} \quad n \in \{0,1,2\} \text{ et } \varphi = \arccos(q/p\sqrt{p}).$$

Regardons ce que cela donne sur quelques exemples concrets.

Exemple 1 : Les solutions de l'équation $x^3 = 3x$ sont trivialement $x = 0, \pm\sqrt{3}$. Dans cet exemple $p = 1$ et $q = 0$. La méthode de Viète donne $\varphi = \arccos(0) = \pi/2$, ce qui implique que les solutions sont

$$x_n = 2\sqrt{1}\cos\left(\frac{1}{3}(\pi/2 + 2n\pi)\right).$$

Ceci donne

$$\begin{aligned}
x_0 &= 2\cos(\pi/6) = \sqrt{3}\\
x_1 &= 2\cos(5\pi/6) = 2\cos(\pi - \pi/6) = -2\cos(\pi/6) = -\sqrt{3}\\
x_2 &= 2\cos(3\pi/2) = 0,
\end{aligned}$$

qui sont bien les solutions attendues ! Incroyable n'est-ce pas ?

Exemple 2 : Prenons l'équation $x^3 = 6x + 4$. Ici, $p = q = 2$ et nous avons

$$\begin{aligned}
\varphi &= \arccos\left(\frac{q}{p\sqrt{p}}\right)\\
&= \arccos\left(\frac{2}{2\sqrt{2}}\right)\\
&= \arccos\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\\
&= \frac{\pi}{4}.
\end{aligned}$$

Ainsi, les solutions sont données par la formule

$$x_n = 2\sqrt{2}\cos\left(\frac{1}{3}(\pi/4 + 2n\pi)\right).$$

En remplaçant n successivement par 0, 1 et 2 on obtient [5]

$$\begin{aligned}
x_0 &= 2\sqrt{2}\cos(\pi/12) = 1 + \sqrt{3}\\
x_1 &= 2\sqrt{2}\cos(3\pi/4) = -2\\
x_2 &= 2\sqrt{2}\cos(5\pi/12) = 2\sqrt{2}\cos(\pi/2 - \pi/12) = \sqrt{3} - 1.
\end{aligned}$$

5. Pour calculer $\cos(\pi/12)$ et $\sin(\pi/12)$ on pourra remarquer que $\pi/12 = \pi/3 - \pi/4$, ce qui implique par exemple que

$$\begin{aligned}
\cos(\pi/12) &= \cos(\pi/3 - \pi/4)\\
&= \cos(\pi/3)\cos(\pi/4) + \sin(\pi/3)\sin(\pi/4)\\
&= \frac{\sqrt{2} + \sqrt{6}}{4}.
\end{aligned}$$