République Tunisienne
Ministère de l'Enseignement Supérieur
et de la Recherche Scientifique
– – – ⋆⋆⋆ – – –
Université de Monastir
Faculté des Sciences Économiques
et de Gestion de Mahdia

FSEG Mahdia
كلية العلوم الإقتصادية و التصرف بالمهدية

Année Universitaire : 2021-2022
⋆⋆⋆
Filière : Licence en Sciences de Gestion
Niveau : Première année
☛ Module : Analyse
⋆⋆⋆
✍ Chargé du cours : Mr. Kais Feki

Examen Final en Mathématiques 1 (Session Principale)

17 Janvier 2022 (11h.30 ➙ 13h.30)

Aucun document n'est autorisé. Seules les calculatrices non-programmables et non graphiques sont autorisées. Il sera tenu compte de la rigueur et de la clarté de la rédaction. Cet énoncé comporte 3 exercices indépendants.

➤ Exercice 1 : (5 points)

(1) Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = x^3 - 3x + 2.$$

(a) Chercher tous les points critiques de f sur $\mathbb{R}$.
(b) Déterminer tous les extremums locaux de f sur $\mathbb{R}$.

(2) Calculer avec justification les valeurs suivantes : $\min\limits_{x\in[0,2]} f(x)$ et $\max\limits_{x\in[0,2]} f(x)$.

(3) Calculer la limite suivante :

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x)\ln(1-x)\sin x}{e^{x^2}-1}$$

(4) On considère la fonction de deux variables suivante :

$$g(x,y) = x^2y + x^2 - 2x - y + 1.$$

Chercher les extremums locaux de la fonction g sous la contrainte $y - x = -1$ par la méthode de substitution.

➤ Exercice 2 : (7 points)

On considère les fonctions de deux variables suivantes :

$$f(x,y) = \tfrac{x^3}{3} - 2xy - y^2 + \tfrac{2}{3} \qquad \text{et} \qquad g(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2y^2}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

(1) (a) Déterminer $\nabla f(x,y)$ pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.
(b) Montrer que f possède exactement deux points critiques sur $\mathbb{R}^2$ que l'on déterminera.

(2) (a) Soit $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. Déterminer $\mathcal{H}_f(x,y)$ la matrice hessienne de f au point (x,y).
(b) La fonction f admet-elle en $(0,0)$ un maximum local ? justifier votre réponse.

(3) Soit $\mathcal{P}$ le plan tangent à la surface représentative $\mathcal{S}_f$ de f au point $A(1,-2,f(1,-2))$.
(a) Déterminer l'équation du plan $\mathcal{P}$.
(b) Préciser la position relative de $\mathcal{S}_f$ par rapport à $\mathcal{P}$ au voisinage du point $(1,-2)$.

(4) Montrer que l'équation $f(x,y) = 1$ permet de définir une fonction implicite φ au voisinage du point $(1,-2)$ vérifiant $\varphi(1) = -2$ puis calculer

$$\lim_{x\to 1} \frac{\varphi(x)+2}{x-1}.$$

(5) Montrer que la fonction $(x,y) \mapsto \frac{\partial g}{\partial x}(x,y)$ est continue sur $\mathbb{R}^2$.

➤ Exercice 3 : (8 points)

Soient les fonctions réelles suivantes :

$$f(x) = \ln(1 + e^x) \quad \text{et} \quad g(x) = \frac{\ln(1 + e^x) - \ln 2}{x}.$$

(1) Montrer que $f \in C^\infty(\mathbb{R})$ puis calculer $f'(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

(2) (a) Montrer que f est strictement convexe sur $\mathbb{R}$.

(b) Déduire que pour tout $a, b \in \mathbb{R}$, on a

$$1 + e^{\frac{a+b}{2}} \leq \sqrt{(1 + e^a)(1 + e^b)}.$$

(3) (a) Donner le développement limité en 0 à l'ordre 2 de la fonction $x \mapsto \ln(2 + x)$.

(b) Déduire que le développement limité en 0 à l'ordre 2 de la fonction f est donné par :

$$f(x) = \ln 2 + \tfrac{x}{2} + \tfrac{x^2}{8} + \mathrm{o}(x^2).$$

(c) Soit T_0 la tangente à la courbe représentative $\mathcal{C}_f$ de f au point d'absisse $x = 0$. Déterminer l'équation de T_0 puis préciser la position relative de $\mathcal{C}_f$ par rapport à T_0 au voisinage de 0.

(4) (a) Montrer que g est prolongeable par continuitée en 0 puis déterminer h la fonction prolongement par continuité de g en 0.

(b) Étudier la dérivabilité de h sur D_h où D_h désigne le domaine de définition de h.

✿ ✿ ***Bon travail*** ✿ ✿

Corrigé détaillé de l'examen final

en mathématiques 1 préparé par Mr. Kais Feki

2021-2022

EX 1 1) $f(x) = x^3 - 3x + 2$

a) $f \in C^\infty(\mathbb{R})$. De plus $\forall x \in \mathbb{R}$ on a

$f'(x) = 3x^2 - 3$. $f'(x) = 0 \iff 3x^2 - 3 = 0$

$\iff 3x^2 = 3$

$\iff x^2 = 1$

$\iff x = 1$ ou $x = -1$

Donc les points critiques de f sont 1 et -1

b) $\forall x \in \mathbb{R}$ on a $f''(x) = 6x$

•) $f''(1) = 6 > 0 \Rightarrow f$ admet en $x = 1$ un minimum local

••) $f''(-1) = -6 < 0 \Rightarrow f$ admet en $x = -1$ un maximum local

2)

x	0		1		2
$f(x)$	2		0		4

$\Rightarrow \max_{x \in [0,2]} f(x) = 4$ et $\min_{x \in [0,2]} f(x) = 0$

3) $\dfrac{f(x)\ln(1-x)\sin x}{e^{x^2}-1} \underset{0}{\sim} \dfrac{2x(-x)\cdot x}{x^2} = -\dfrac{2x^2}{x^2} = -2$

$\Rightarrow \lim_{x \to 0} \dfrac{f(x)\ln(1-x)\sin x}{e^{x^2}-1} = \lim_{x \to 0} -2 = -2$

4) $g(x,y) = x^2y + x^2 - 2x - y + 1$

Les extremums locaux de f sous la contrainte $y - x = -1$?

$y - x = -1 \iff \boxed{y = x - 1}$ (*)

$g(x,y) = g(x, x-1) = x^2(x-1) + x^2 - 2x - (x-1) + 1$

$= x^3 - x^2 + x^2 - 2x - x + 1 + 1$

$= x^3 - 3x + 2 = f(x)$

or d'après 1)b) f admet en $x = 1$ un minimum local et en $x = -1$ un maximum local.

or d'après (*) on a $x = 1 \Rightarrow y = 0$

$x = -1 \Rightarrow y = -2$

d'où g admet en $(1,0)$ un minimum local sous la contrainte $y - x = -1$ et en $(-1,-2)$ un maximum local sous la contrainte $y - x = -1$.

Exo 2 $f(x,y) = \frac{x^3}{3} - 2xy - y^2 + \frac{2}{3}$

1) a) $f \in C^1(\mathbb{R}^2)$. De plus $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$ on a

$\nabla f(x,y) = \left(x^2 - 2y \; ; \; -2x - 2y\right)$

$x^2 - 2y = \frac{\partial f}{\partial x}(x,y)$; $-2x - 2y = \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)$

b) $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ est un point critique de $f \iff \nabla f(x,y) = (0,0)$

$\iff (x^2 - 2y \; ; -2x - 2y) = (0,0)$

$\iff \begin{cases} x^2 - 2y = 0 \\ -2x - 2y = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x^2 - 2y = 0 \\ x + y = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x^2 - 2y = 0 \; (1) \\ y = -x \; (2) \end{cases}$

② dans ① donne $x^2 - 2\times(-x) = 0$

$\Rightarrow x^2 + 2x = 0 \Rightarrow x(x+2) = 0$

$\Rightarrow x = 0$ ou $x = -2$

ou ② donne $x = 0 \Rightarrow y = 0$

$x = -2 \Rightarrow y = 2$

$\Rightarrow (0,0)$ et $(-2,2)$ sont les points critiques de f

2) a) on a $\nabla f(x,y) = (x^2 - 2y\ ;\ -2x - 2y)\ \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$

$\Rightarrow Hf(x,y) = \begin{pmatrix} 2x & -2 \\ -2 & -2 \end{pmatrix} \quad \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$

b) $Hf(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ -2 & -2 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow \det(Hf(0,0)) = \begin{vmatrix} 0 & -2 \\ -2 & -2 \end{vmatrix} = -4 < 0$

$\Rightarrow f$ admet en $(0,0)$ un point selle

$\Rightarrow f$ n'admet pas en $(0,0)$ un maximum local

3) a) L'équation du plan tangent à S_f au point $A(1,-2,f(1,-2))$ est $(P): z = \nabla f(1,-2) \cdot \begin{pmatrix} x-1 \\ y+2 \end{pmatrix} + f(1,-2)$

ou $\nabla f(x,y) = (x^2 - 2y\ ;\ -2x - 2y)$

$\Rightarrow \nabla f(1,-2) = (5\ ;\ 2)$. ou $f(1,-2) = \frac{1}{3} + 4 - 4 + \frac{2}{3} = 1$

$\Rightarrow P: z = (5,2) \cdot \begin{pmatrix} x-1 \\ y+2 \end{pmatrix} + 1 = 5(x-1) + 2(y+2) + 1$

$= 5x + 2y - 5 + 4 + 1$

$\Rightarrow \boxed{P: z = 5x + 2y}$

b) $\det(Hg(1,-2)) = \begin{vmatrix} 2 & -2 \\ -2 & -2 \end{vmatrix} = -4-4 = -8 < 0$

$\Rightarrow$ $\mathcal{S}$ traverse S_g au voisinage du point $(1,-2)$

4) $g(x,y)=1 \iff \frac{x^3}{3} - 2xy - y^2 + \frac{2}{3} - 1 = 0$

$\iff \frac{x^3}{3} - 2xy - y^2 - \frac{1}{3} = 0$

$\iff h(x,y) = 0$

où $h(x,y) = \frac{x^3}{3} - 2xy - y^2 - \frac{1}{3}$

- $h(1,-2) = \frac{1}{3} + 4 - 4 - \frac{1}{3} = 0$
- $h \in C^1(\mathbb{R}^2)$ avec $(1,-2) \in \mathbb{R}^2$
- $\frac{\partial h}{\partial y}(x,y) = -2x - 2y \Rightarrow \frac{\partial h}{\partial y}(1,-2) = -2+4 = 2 \neq 0$

d'après le théorème des fonctions implicites

il existe I intervalle ouvert de $\mathbb{R}$ contenant 1

et $\varphi : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe C^1 sur I

tel que $\varphi(1) = -2$ et $h(x, \varphi(x)) = 0 \ \forall x \in I$

$$\lim_{x \to 1} \frac{\varphi(x)+2}{x-1} = \lim_{x \to 1} \frac{\varphi(x)-\varphi(1)}{x-1} = \varphi'(1)$$

or $\varphi'(1) = \dfrac{-\frac{\partial h}{\partial x}(1,-2)}{\frac{\partial h}{\partial y}(1,-2)} = \dfrac{-\frac{\partial h}{\partial x}(1,-2)}{2} = \frac{-5}{2}$

(car $\frac{\partial h}{\partial x}(x,y) = x^2 - 2y \Rightarrow \frac{\partial h}{\partial x}(1,-2) = 5$)

$\Rightarrow \lim_{x \to 1} \frac{\varphi(x)+2}{x-1} = -\frac{5}{2}$.

5) $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ on a

$$\frac{\partial g}{\partial x}(x,y) = \frac{2xy^2(x^2+y^2) - x^2y^2 \times (2x)}{(x^2+y^2)^2}$$

$$= \frac{2x^3y^2 + 2xy^4 - 2x^3y^2}{(x^2+y^2)^2} = \frac{2xy^4}{(x^2+y^2)^2}$$

D'autre part

$$\lim_{x \to 0} \frac{g(x,0) - g(0,0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0} \frac{0}{x} = 0 < \infty$$

$$\Rightarrow \frac{\partial g}{\partial x}(0,0) = 0$$

D'où $$\frac{\partial g}{\partial x}(x,y) = \begin{cases} \frac{2xy^4}{(x^2+y^2)^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Il est clair que $\frac{\partial g}{\partial x}$ est continue sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$

continuité de $\frac{\partial g}{\partial x}$ en $(0,0)$

on pose $x = r\cos\theta$ et $y = r\sin\theta$ $(r > 0$ et $\theta \in [0, 2\pi[)$

$(x,y) \to (0,0) \iff r \to 0$; $x^2 + y^2 = r^2$

$$\left| \frac{\partial g}{\partial x}(r\cos\theta ; r\sin\theta) \right| = \frac{|2r\cos\theta \times r^4 \sin^4\theta|}{(r^2)^2}$$

$$= \frac{2r^5}{r^4} \underbrace{|\cos\theta|}_{\leq 1} \times \underbrace{|\sin^4\theta|}_{\leq 1}$$

$$\leq 2r \xrightarrow[r \to 0]{} 0$$

$$\Rightarrow \lim_{(x,y) \to (0,0)} \frac{\partial g}{\partial x}(x,y) = 0 = \frac{\partial g}{\partial x}(0,0) \Rightarrow \frac{\partial g}{\partial x} \text{ est continue en } (0,0)$$

$$\Rightarrow \frac{\partial g}{\partial x} \text{ est continue sur } \mathbb{R}^2.$$

Ex # 3 $f(x) = \ln(1+e^x)$

1) • $x \longmapsto 1+e^x \in C^\infty(\mathbb{R})$
• $1+e^x > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$
$\Rightarrow f \in C^\infty(\mathbb{R})$

De plus $\forall x \in \mathbb{R}$ on a $f'(x) = \dfrac{e^x}{1+e^x}$

2) a) $f \in C^\infty(\mathbb{R}) \Rightarrow f$ est 2-fois dérivable sur $\mathbb{R}$.

De plus on a $f'(x) = \dfrac{e^x}{1+e^x}$

et $f''(x) = \left[f'(x)\right]' = \dfrac{e^x(1+e^x) - e^x \times e^x}{(1+e^x)^2}$

$= \dfrac{e^x + e^{2x} - e^{2x}}{(1+e^x)^2} = \dfrac{e^x}{(1+e^x)^2}$

$\Rightarrow f''(x) > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow f$ est strictement convexe sur $\mathbb{R}$.

b) f est strictement convexe sur $\mathbb{R} \Rightarrow f$ est convexe sur $\mathbb{R}$. D'où $\forall a, b \in \mathbb{R}$ on a

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leqslant \frac{f(a)+f(b)}{2}$$

$$\Rightarrow \ln\left(1+e^{\frac{a+b}{2}}\right) \leqslant \frac{\ln(1+e^a) + \ln(1+e^b)}{2}$$

$$\Rightarrow \ln\left(1+e^{\frac{a+b}{2}}\right) \leqslant \frac{\ln\left[(1+e^a)(1+e^b)\right]}{2}$$

$$\Rightarrow \ln\left(1+e^{\frac{a+b}{2}}\right) \leqslant \frac{1}{2}\ln\left[(1+e^a)(1+e^b)\right]$$

$\Rightarrow \ln\left(1+e^{\frac{a+b}{2}}\right) \leqslant \ln\left(\sqrt{(1+e^a)(1+e^b)}\right)$

$x \to e^x$ ↗

$\Rightarrow 1+e^{\frac{a+b}{2}} \leqslant \sqrt{(1+e^a)(1+e^b)}$

3) a) $\ln(2+x) = \ln\left(2\left(1+\frac{x}{2}\right)\right) = \ln 2 + \ln\left(1+\frac{x}{2}\right)$

on a on sait que $\ln(1+U) = U - \frac{U^2}{2} + o(U^2)$

$\frac{x}{2} \xrightarrow[x\to 0]{} 0 \Rightarrow \ln\left(1+\frac{x}{2}\right) = \frac{x}{2} - \frac{1}{2}\left(\frac{x}{2}\right)^2 + o(x^2)$

$\Rightarrow \ln\left(1+\frac{x}{2}\right) = \frac{x}{2} - \frac{1}{8}x^2 + o(x^2)$

$\Rightarrow \ln(2+x) = \ln 2 + \frac{x}{2} - \frac{1}{8}x^2 + o(x^2)$

b) $f(x) = \ln(1+e^x) = \ln(1+e^x-1+1)$

$= \ln(2 + \underbrace{(e^x-1)}_{\xrightarrow[x\to 0]{} 0})$

on d'après 3) a) on a $\ln(2+U) = \ln 2 + \frac{U}{2} - \frac{1}{8}U^2 + o(U^2)$

de plus on sait que $e^x - 1 = x + \frac{x^2}{2} + o(x^2) \xrightarrow[x\to 0]{} 0$

$\Rightarrow f(x) = \ln 2 + \frac{1}{2}\left(x+\frac{x^2}{2}\right) - \frac{1}{8}\left(x+\frac{x^2}{2}\right)^2 + o(x^2)$

$= \ln 2 + \frac{x}{2} + \frac{x^2}{4} - \frac{1}{8}x^2 + o(x^2)$

$= \ln 2 + \frac{x}{2} + \frac{x^2}{8} + o(x^2)$

$\Rightarrow \boxed{f(x) = \ln 2 + \frac{x}{2} + \frac{x^2}{8} + o(x^2)}$

c) d'après ce qui précède on a $f(x) = \ln 2 + \frac{x}{2} + \frac{x^2}{8} + o(x^2)$

$\Rightarrow T_0 : y = \ln 2 + \frac{x}{2}$

$f(x) - y = \frac{x^2}{8} + o(x^2) \underset{0}{\sim} \frac{x^2}{8} > 0$

$\Rightarrow \mathcal{C}_f$ est au dessus de T_0 au voisinage de 0.

4) a) $g(x) = \dfrac{\ln(1+e^x) - \ln 2}{x} = \dfrac{f(x) - \ln 2}{x}$

$\Rightarrow D_g = \{ x \in \mathbb{R} / x \neq 0 \} = \mathbb{R}^* = \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

mque $\lim\limits_{x \to 0} g(x) < \infty$?

D'après 3) b) on a $f(x) - \ln 2 = \frac{x}{2} + \frac{x^2}{8} + o(x^2)$

$\underset{0}{\sim} \frac{x}{2}$

$\Rightarrow g(x) = \dfrac{f(x) - \ln 2}{x} \underset{0}{\sim} \dfrac{\frac{x}{2}}{x} = \dfrac{\frac{1}{2}x}{x} = \frac{1}{2}$

$\Rightarrow \lim\limits_{x \to 0} g(x) = \lim\limits_{x \to 0} \frac{1}{2} = \frac{1}{2} < \infty$

$\Rightarrow g$ est prolongeable par continuité en 0

$$h(x) = \begin{cases} g(x) \text{ si } x \neq 0 \\ \frac{1}{2} \text{ si } x = 0 \end{cases} = \begin{cases} \dfrac{\ln(1+e^x) - \ln 2}{x} \text{ si } x \neq 0 \\ \frac{1}{2} \quad \text{si} \quad x = 0 \end{cases}$$

b) $D_h = \mathbb{R}$.

Il est clair que h est dérivable sur $\mathbb{R}^*$

(car $x \mapsto \ln(1+e^x) - \ln 2$ est dérivable sur $\mathbb{R}$
en particulier $\mathbb{R}^*$ et $x \mapsto x$ est dérivable sur $\mathbb{R}$
en particulier $\mathbb{R}^*$ et $x \neq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}^*$)

Dérivabilité de h en 0

$$\lim_{x\to 0}\frac{h(x)-h(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{f(x)-\ln 2}{x}-\frac{1}{2}}{x}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{2(f(x)-\ln 2)-x}{2x}}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{2(f(x)-\ln 2)-x}{2x^2}$$

or $f(x)-\ln 2=\frac{x}{2}+\frac{x^2}{8}+o(x^2)$

$\Rightarrow 2(f(x)-\ln 2)=x+\frac{x^2}{4}+o(x^2)$

$\Rightarrow 2(f(x)-\ln 2)-x=\frac{x^2}{4}+o(x^2)\underset{0}{\sim}\frac{x^2}{4}$

D'où $\frac{2(f(x)-\ln 2)-x}{2x^2}\underset{0}{\sim}\frac{\frac{x^2}{4}}{2x^2}=\frac{\frac{1}{4}x^2}{2x^2}$

$=\frac{1}{8}$

$\Rightarrow \lim_{x\to 0}\frac{2(f(x)-\ln 2)-x}{2x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{8}=\frac{1}{8}<\infty$

$\Rightarrow$ h est dérivable en 0 et $h'(0)=\frac{1}{8}$

D'où h est dérivable sur $\mathbb{R}=D_h$.